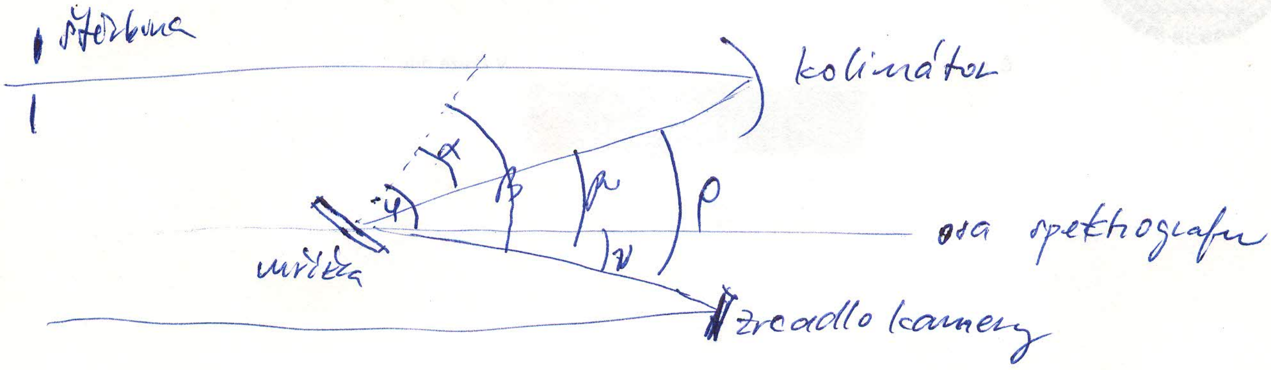
Výpočet natočení mřížky

– aby do patřičného směru patřičná λ v patřičném řádu n



α, β ... mřížková rovnice: $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{n\lambda}{d} = n\lambda C$

μ, ρ, ν ... konstantní (konstrukce spektrografu)

řešíme pro $\alpha, \beta, \boxed{\varphi}$

trigonometrie

$$\beta - \alpha = \rho$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \beta - \nu \\ \varphi &= \alpha + \mu \end{aligned}\right\} \quad 2\varphi = \alpha + \beta + \mu - \nu$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\mu-\nu}{2}$$

hledáme   svázané   konstrukce

$$\sin\alpha + \sin\beta = n\lambda C = \sin\alpha + \sin(\alpha+\rho) =$$

$$= \sin\alpha + \sin\alpha\cos\rho + \cos\alpha\sin\rho = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\rho + \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\sin\rho$$

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\sin\rho = n\lambda C - \sin\alpha(1+\cos\rho)$$

$$x = \sin\alpha$$

$$\sqrt{1-x^2}\,\sin\rho = n\lambda C - x(1+\cos\rho) \quad \Big|^2$$

$$(1-x^2)\sin^2\rho = n^2\lambda^2C^2 - 2n\lambda C x(1+\cos\rho) + x^2(1+\cos\rho)^2$$

$$\sin^2\varphi - x^2\sin^2\varphi = n^2\lambda^2c^2 - 2n\lambda c\, x(1+\cos\varphi) + x^2(1+\cos\varphi)^2$$

$$\sin^2\varphi - x^2\sin^2\varphi = n^2\lambda^2c^2 - 2n\lambda c x(1+\cos\varphi) + x^2 + 2x^2\cos\varphi + x^2\cos^2\varphi \Rightarrow$$

$$x^2(-\sin^2\varphi - 1 - 2\cos\varphi - \cos^2\varphi) + 2n\lambda c x(1+\cos\varphi) + \sin^2\varphi - n^2\lambda^2c^2 = 0$$

$$-2x^2(1+\cos\varphi) + 2n\lambda c x(1+\cos\varphi) + \sin^2\varphi - n^2\lambda^2c^2 = 0$$

$$x^2 - n\lambda c x + \frac{n^2\lambda^2c^2 - \sin^2\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \qquad M = n\lambda c$$

$$x^2 - Mx + \frac{M^2 - \sin^2\varphi}{2(\cos\varphi+1)} = 0$$

diskriminant nezáporný!

$$\Delta = M^2 - 4\,\frac{M^2-\sin^2\varphi}{2(\cos\varphi+1)} = \frac{M^2(\cos\varphi+1) - 2(M^2-\sin^2\varphi)}{\cos\varphi+1} =$$

$$= \frac{M^2\cos\varphi + M^2 - 2M^2 + 2\sin^2\varphi}{\cos\varphi+1} = \frac{M^2(\cos\varphi-1) + 2\sin^2\varphi}{\cos\varphi+1} =$$

$$= \frac{M^2(\cos\varphi-1)(\cos\varphi+1) + 2\sin^2\varphi(\cos\varphi+1)}{(\cos\varphi+1)^2} = \frac{M^2(\cos^2\varphi-1) + 2\sin^2\varphi(\cos\varphi+1)}{(\cos\varphi+1)^2} =$$

$$= \frac{-M^2\sin^2\varphi + 2\sin^2\varphi(\cos\varphi+1)}{(\cos\varphi+1)^2} = \underline{\frac{4\sin^2\varphi}{(\cos\varphi+1)^2}\left(\frac{\cos\varphi+1}{2} - \frac{M^2}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow \frac{\cos\varphi+1}{2} - \frac{M^2}{4} \geq 0$$

$$\frac{(n\lambda c)^2}{4} \leq \frac{\cos\varphi+1}{2}$$

$$n \leq \underbrace{\frac{1}{\lambda c}\sqrt{2(\cos\varphi+1)}}_{\text{maximální použitelný řád}}$$

řešení:

$$\sin\alpha = \frac{n\lambda c}{2} \pm \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}\sqrt{\frac{\cos\varphi+1}{2}-\frac{n^2\lambda^2c^2}{4}}$$

jedno řešení pro paprsek tam, druhé pro paprsek zpět $\rightarrow$ $(\sin\alpha)_1 = \sin\alpha$

$(\sin\alpha)_2 = \sin\beta$

$\alpha \leq \beta$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{n\lambda c}{2} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}\sqrt{\frac{\cos\varphi+1}{2}-\frac{n^2\lambda^2c^2}{4}}\\ \sin\beta &= \frac{n\lambda c}{2} + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+1}\sqrt{\frac{\cos\varphi+1}{2}-\frac{n^2\lambda^2c^2}{4}}\end{aligned}}$$

$$\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{m-n}{2}$$ konstanta