Fourierova transformace

- ve spektroskopii velmi praktická
  - pozorování je konvoluce → násobení ve F. prostoru

FT: reprezentace funkce v periodické bázi

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{2\pi i x\sigma}\, dx$$

inverzní $$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\, e^{-2\pi i x\sigma}\, d\sigma$$

ne vždy existuje! ve fyzice ale skoro vždy ano.

pro $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

pro $F(x) = F_r(x) + i F_i(x)$

$$\Rightarrow f(\sigma) = \int F_R(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx + i \int F_I(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx +$$

$$+ i \int F_R(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx - \int F_I(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

pro $f(\sigma) = f_R(\sigma) + i f_I(\sigma)$

$$f_R(\sigma) = \int F_R(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx - \int F_I(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

$$f_I(\sigma) = \int F_I(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx + \int F_R(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

pro $F(x) = F_R(x)$ ... fyzikální signál

$$f(\sigma) = \int F_R \cos 2\pi x\sigma\, dx + i \int F_R \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

$f(\sigma)$ stále komplexní

pro $F(x) = F_R(x)$; $F_R(x) = F_R(-x)$

$$f(\sigma) = \int F_R(x) \cos 2\pi x\sigma \, dx$$

Fourierův obraz – v polárních koordinátech

$$f(\sigma) = |f(\sigma)| e^{i\psi}$$

$$|f(\sigma)| = \sqrt{f_R^2(\sigma) + f_I^2(\sigma)}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{f_I(\sigma)}{f_R(\sigma)}$$

Pozn.: amplitudové spektrum – popis funkce
Fázové spektrum – kde jsou $\boxed{\text{obrázek}}$

Pozn.: $\sigma = 0 \Rightarrow$ totální integrál

$$f(0) = \int F(x) e^{2\pi i x \cdot 0} dx = \int F(x) dx$$

a opačně $F(0)$.

Příklady:

(1) $B(x)$ $\begin{cases} 0 & \text{pro } -\frac{W}{2} > x > \frac{W}{2} \\ 1 & \text{pro } -\frac{W}{2} \leq x \frac{W}{2} \end{cases}$ box car

$$b(\sigma) = \int B(x) e^{2\pi i \sigma x} dx = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} e^{2\pi i x\sigma} dx =$$

$$= \left(\frac{e^{2\pi i x\sigma}}{2\pi i \sigma}\right)_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} = \frac{1}{2\pi i \sigma}\left(e^{2\pi i \frac{W\sigma}{2}} - e^{-2\pi i \frac{W\sigma}{2}}\right) =$$

$$= W \frac{\sin \pi W\sigma}{\pi W\sigma} = \boxed{W \operatorname{sinc} \pi W\sigma}$$

=28=