ENERGETICKÁ ROVNICE

MHD:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$
$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v\right] = -\nabla P + j\times B$$
$$\rho\left[\frac{dU}{dt} + P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = Q - L$$
$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(v\times B) - \frac{1}{\mu}\nabla\times\left(\frac{1}{\sigma}\nabla\times B\right)$$
$$j = \sigma(E + v\times B)$$

---

adiabatický děj: $U = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$

Q ... heating

L ... cooling

$v\cdot$

$$\underbrace{\rho v\cdot\frac{dv}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)} = -v\cdot\nabla P + \underbrace{v\cdot j\times B}$$

$\cancel{j\cdot(v\times B)}$

$$v\cdot j\times B = j\cdot B\times v = -j\cdot v\times B$$

Ohm: $v\times B = \frac{j}{\sigma} - E$

$$v\cdot j\times B = j\cdot E - \frac{j^2}{\sigma}$$

$$j\cdot E = \left| j = \frac{1}{\mu}\nabla\times B\right| = \frac{1}{\mu}\nabla\times B\cdot E = \dots$$

$$-\nabla\cdot(E\times B) = -\nabla\cdot(E\times B_c) - \nabla\cdot(E_c\times B) =$$
$$= -B_c\cdot(\nabla\times E) - E_c\cdot(B\times\nabla) =$$
$$= -B\cdot(\nabla\times E) + E\cdot(\nabla\times B) \qquad -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

$$\dots = +\frac{1}{\mu}B\cdot\underbrace{(\nabla\times E)}_{= -\frac{\partial B}{\partial t}} - \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(E\times B) = \overbrace{-\frac{1}{\mu}B\cdot\frac{\partial B}{\partial t}} - \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(E\times B)$$

=11/1=

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\rho v^2}{2} = -v\cdot\nabla P - \frac{j^2}{\sigma} - \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(E\times B) - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \nabla\cdot\left(v\frac{\rho v^2}{2}\right) = -v\cdot\nabla P - \frac{j^2}{\sigma} - \frac{1}{\mu}\nabla\cdot(E\times B) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\rho v^2}{2}v + \underbrace{\frac{1}{\mu}E\times B}_{\text{Poynting flux}}\right) = -v\cdot\nabla P - \underbrace{\frac{j^2}{\sigma}}_{\text{Jouleovo teplo}}$$

$\Rightarrow$ celková energie (Eulerovské koordináty) se mění prací $-v\cdot\nabla P$, Joulovým teplem a tokem energie $\frac{\rho v^2}{2}v + \frac{1}{\mu}E\times B$

---

energetická rovnice $\rho\frac{dU}{dt} + P\cancel{\nabla v} = Q - L$

pro $U = \frac{P}{(\gamma-1)\rho}$

$$\underbrace{\rho\frac{dU}{dt} + \overset{\nabla\cdot(Pv)}{\cancel{P\nabla\cdot v}}} = Q - L - v\cdot\nabla P$$

$$\rho\frac{dU}{dt} + \nabla\cdot(Pv) = \rho\frac{\partial U}{\partial t} + \rho v\cdot\nabla U + \nabla\cdot(Pv) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) - U\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho v\cdot\nabla U + \nabla\cdot(Pv) =$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + U\nabla\cdot(\rho v) + \rho v\cdot\nabla U + \nabla\cdot(Pv) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla\cdot(U\rho v) \cancel{- \rho v\cdot\nabla U + \rho v\cdot\nabla U} + \nabla\cdot(Pv) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla\cdot(U\rho v + Pv) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla\cdot\left[v(U\rho + P)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla\cdot\left[v\left(\frac{P\rho}{(\gamma-1)\rho} + P\right)\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla\cdot\left[v\frac{P\gamma}{\gamma-1}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla\cdot\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} p v\right) = -v\cdot\nabla p + Q + L$$

sečteme s rovnicí MHD energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}\right) + \nabla\cdot\left(\frac{\rho v^2}{2} v + \frac{\gamma}{\gamma-1} p v + \frac{1}{\mu} E\times B\right) =$$

$$= Q - \frac{j^2}{\sigma} - L$$

energie zachovávána (a pouze zářena) pokud

$$\underbrace{Q = \frac{j^2}{\sigma}}$$

$\Rightarrow$ ohřev pouze Joulovým teplem

$\Rightarrow$ nepotenciálová část $\frac{B^2}{2\mu}$ se disipuje Joulovým teplem

$\hookrightarrow$ nepotenciálová část $\rightarrow$ volná energie

př. – skvrna kompletně disipuje v koróně

$B \sim 1000\ G \approx 0{,}1\ T$

$V = (10\times 10\times 10)\ Mm^3 = 10^{18}\ m^3$

$$E_M = \frac{B^2}{2\mu} V = \frac{0{,}01}{2\mu} 10^{18}\ J = \frac{10^{16}}{2\cdot 4\pi 10^{-7}}\ J =$$

$$\approx \frac{100}{8\pi} 10^{21}\ J \approx \underline{4\times 10^{21}\ J}$$

méně než co se pozoruje v erupcích

$\Rightarrow$ silnější pole ve větším objemu musí disipovat

Explozivní vs. neexplozivní disipace

Joulovým teplem → ne-explozivní

odhad: $t_J \sim \dfrac{B^2/2\mu}{j^2/\sigma}$

$j = \frac{1}{\mu} \nabla \times B \approx \frac{1}{\mu} \frac{B}{L}$ ... char. vzdálenost

$$\Rightarrow t_J = \frac{B^2/2\mu}{B^2/\mu^2 L^2 \sigma} = \frac{\mu L^2 \sigma}{2}$$

difúze pole: podobně,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta B : \quad \frac{B}{t_{diff}} \approx \frac{1}{\mu\sigma} \frac{B}{L^2}$$

faktor 2 je nezajímavý

$$t_{diff} \sim \mu \sigma L^2$$

s difuzivitou $\eta = \dfrac{1}{\mu\sigma}$

$$t_J \approx \frac{L^2}{\eta} \ \dots \ f$$

v chromosféře $\eta \sim 10^7 \ \frac{cm^2}{s}$

v koróně: $\eta \sim 3 \times 10^3 \ \frac{cm^2}{s}$

dynamický čas: $t_d \sim \dfrac{L}{v}$

$$t_J = \frac{L^2}{\eta} = \frac{Lv}{\eta} \frac{L}{v} = R_M t_D$$

↳ Reynoldsovo číslo

pak pro $R_M \gg 1$ je $t_J \gg t_D$ ⇒ disipace nehraje v dynamickém procesu skoro roli

dynamický proces: $v \sim c_A \sim 10^6$ m/s

$$t_J = \frac{L^2}{\eta} = \frac{L c_A}{\eta} \frac{L}{c_A} = N_L \frac{L}{c_A} = N_L t_A$$

← Alfvénův čas

↳ Lundquistovo číslo

⇒ char. čas ne-explozivní disipace dynamickým procesem s Alfvénovou rychlostí

$$t_J = \frac{L N_L}{c_A}$$

koróna: $L \sim 10^7 m$, $c_A \sim 10^6 m/s$, $\eta \sim 10^3 cm^2/s$

$N_L \sim 10^{14}$, $\frac{L}{c_A} \sim 10 s$

$\Rightarrow t_J \sim 10^{15} s$

rapidní explozivní disipace (Sweetův model)

$$t_R \sim \frac{L\sqrt{N_L}}{c_A}$$

pro korónu: $t_R \sim 10^8 s$ ... pořád moc

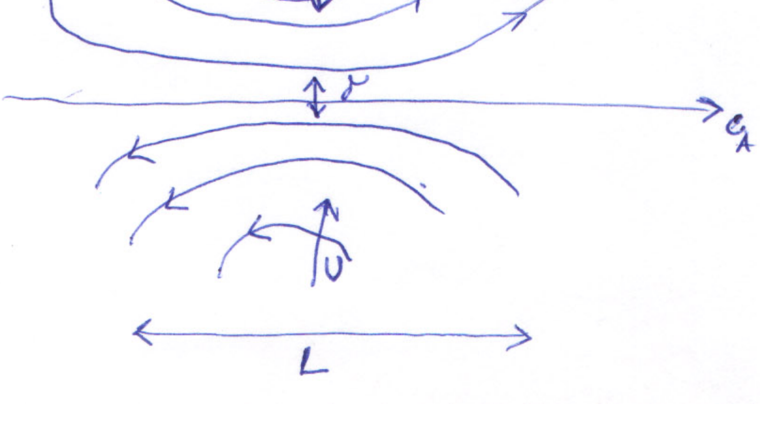
Petchekův mechanismus rekonexe:

$$t_P \sim \frac{L \ln N_L}{c_A}$$

pro korónu: $t_P \sim 300 s$ ... blízké realitě

disipace v tenkých vrstvách, kde teče elektrický proud (proudové vrstvy), které jsou formovány plazmatickými pohyby. Deformace mg. polí přidává volnou energii, poruchy ΔB tvoří proudové vrstvy

$\boxed{\text{Sweetův mechanismus rekonexe}}$



antiparalelní pole tlačená k sobě na délce L
plazma vytlačováno mezi antiparalelními poli
↳ gradient pole roste do vytvoření stabilního stavu

zachování hmoty:

$$\rho v L = c_A \delta \rho$$

čas disipace ~ čas dynamický

$$\frac{\delta^2}{\eta} \sim \frac{\delta}{v} \Rightarrow v = \frac{\eta}{\delta}$$

$$\frac{\eta}{\delta} L = c_A \delta$$

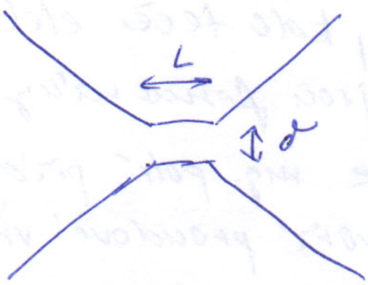
$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{L\eta}{c_A}} \qquad N_L = \frac{c_A L}{\eta}$$

$$u = \frac{\eta}{\delta} = \sqrt{\frac{c_A \eta}{L}} = \frac{c_A}{\sqrt{N_L}}$$

↳ rychlost rekonexe

char. čas: $t_S = \frac{L}{v} = \frac{L\sqrt{N_L}}{c_A}$

zkrácení času zmenšit L



Petschekův mechanismus

↳ Karlický → přednáška

=11/6=

MECHANISMUS URYCHLOVÁNÍ ČÁSTIC

stochastická akcelerace v jedné dimenzi:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} E(x,t)$$

trajektorie: $x = X(t)$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{q}{m} E(X(t),t)$$

pole je slabé $\Rightarrow$ rozpis trajektorie v mocninách E-pole:

$$x = x_0 + v_0 t + X^{I}(t) + \cancel{X^{II}(t) + \ldots}$$

iniciální hodnoty:

$$\Rightarrow \ddot{X}^{I} = \frac{q}{m} E(x_0 + v_0 t, t)$$

předpoklad: fluktuující pole je náhodné v prostoru i čase, ale korelační čas:

$$\left\langle E(x,t)\, E(x+\xi, t+\tau) \right\rangle = \langle E^2 \rangle \underbrace{R(\xi,\tau)}_{\text{korelační fce}}$$

$\Rightarrow$ změna rychlosti za t je dána do 1. řádu:

$$\Delta \dot{X}^{I} \equiv \dot{X}^{I}(t) - \dot{X}^{I}(0) = \frac{q}{m} \int_0^t dt' \, E(x_0 + v_0 t', t')$$

$$\Rightarrow \left\langle (\Delta \dot{X}^{I})^2 \right\rangle = \frac{q^2}{m^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \underbrace{\left\langle E(x_0 + v_0 t', t')\, E(x_0 + v_0 t'', t'') \right\rangle}_{\langle E^2 \rangle R(v\tau, \tau)}$$

$$\tau = t'' - t'$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\Delta t} \right\rangle = \left(\frac{q}{m}\right)^2 \langle E^2 \rangle \int d\tau \, R(v\tau, \tau)$$

$\Rightarrow$ částice difunduje v rychlostním prostoru a získává energii

+ Fermiho akcelerace