FUNDAMENTÁLNÍ KONCEPT

→ (M)HD rovnice se sférickou geometrií

- nízké Machovo číslo ⇐ $\frac{E_{konvekce}}{E_{vnitřní}} \ll 1$
- $\frac{E_{magnetická}}{E_{vnitřní}} \ll 1$

→ splněno do $0{,}98 R_\odot$, blíže k povrchu změny ionizace, rychlosti překračují c_s → superadiabatická zóna

→ anelastická aproximace – rychlost, mg. pole a změny termodynamiky způsobené konvekcí jsou malé oproti pozadí.

- filtrují se akustické vlny ⇒ efektivní implementace v programu

– adiabatický přístup – efektivní konvekce promíchává entropii

adiabaticita: $$\epsilon = \frac{\frac{\partial T}{\partial r} - \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{ad}}{\frac{\partial T}{\partial r}} = -\frac{H_T}{c_p}\frac{\partial S}{\partial r}$$

pro $\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{ad} = -\frac{g}{c_p}$

na $\odot$: $\epsilon < 10^{-4}$ všude, až na posledních pár procent poloměru $(r < 0{,}97)$

$\epsilon < 10^{-2}$ pro $r \leq 0{,}995 R_\odot$

⇒ termodynamické variace způsobené konvekcí jsou malé oproti stratifikovanému pozadí –

tedy $\bar{\rho} v^2 \leq P$ ⇒ $\frac{v}{c_s} \ll 1$

$c_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$

→ anelastická aproximace OK.

+ ideální plyn: $\frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = -\bar{\rho} g$, $\bar{P} = (c_p - c_v)\bar{\rho}\bar{T}$

$$\frac{\bar{S}}{c_p} = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\bar{P}}{P_0}\right) - \ln\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)$$

rovnice $\bar{x}$ ... pozaďová hodnota

x ... perturbace

v ... vektor
B ... vektor
Ω ... vektor

$$\nabla\cdot(\bar\rho v) = 0$$

$$\bar\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v\right) = -\nabla p - \rho g - 2\bar\rho\,(\Omega_0\times v) + \frac{1}{\mu}(\nabla\times B)\times B + \nabla\cdot\mathcal{D}$$

$$\bar\rho\bar T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v\cdot\nabla s\right) = -\bar\rho\bar T v_r\frac{d\bar s}{dr} + \nabla\cdot\left[\varkappa_r\bar\rho c_p\left(\nabla T + \frac{d\bar T}{dr}\vec r\right)\right] + \Phi + \mu\eta j^2$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(v\times B) - \nabla\times(\eta\nabla\times B)$$

linearizovaná stavová rovnice

$$\frac{\rho}{\bar\rho} = \frac{p}{\bar p} - \frac{T}{\bar T} = \frac{p}{\Gamma_1\bar p} - \frac{s}{c_p}$$

tenzor viskozity $\mathcal{D}_{ij} = -2\rho\nu\left[e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot v)\delta_{ij}\right]$

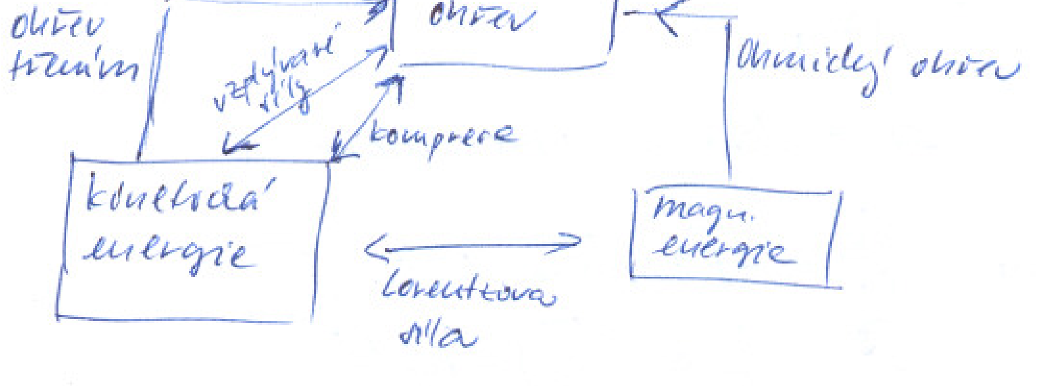
rychlost ohřevu $\Phi = 2\nu\bar\rho\left[e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot v)^2\right]$

e_{ij} ... tenzor ~~napětí~~ rychlosti deformace

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$j = \frac{1}{\mu}\nabla\times B$$

Energetika



1. rovnice pohybu $/ v \cdot$; $E_k = \frac{1}{2}\bar{\rho} v^2$

$$\to \frac{\partial E_k}{\partial t} = -\nabla\cdot(v E_k - v\cdot\mathcal{D}) - v\cdot\nabla P + v_r \rho g + v\cdot(j\times B) - \cancel{\mathcal{O}}$$

+ další manipulace

$$\to \frac{\partial}{\partial t}(E_k + E_t + E_m) =$$

$$= -\nabla\cdot\left(\mathcal{F}^{KE} + \mathcal{F}^{EN} + \mathcal{F}^{RD} + \mathcal{F}^{PF} + \mathcal{F}^{VD} + \mathcal{F}^{BS}\right)$$

- E_t ... tepelná $E_t = \bar{\rho}\bar{T} S$
- E_m ... magnetická $E_m = \frac{B^2}{2\mu}$
- $\mathcal{F}^{KE}$ ... tok kinetické energie ; $\mathcal{F}^{KE} = E_k \vec{v}$
- $\mathcal{F}^{EN}$ ... tok entalpie ; $\mathcal{F}^{EN} = (\bar{\rho}\bar{T} S + P) v = = \bar{\rho} c_p T v$
- $\mathcal{F}^{RD}$ ... tok energie zářivou difúzí ;

$$\mathcal{F}^{RD} = -\varkappa_r \bar{\rho} c_p \left(\nabla T + \frac{d\bar{T}}{dr}\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

- $\mathcal{F}^{PF}$ ... Poyntingův tok

$$\mathcal{F}^{PF} = \underbrace{(\eta j - v\times B)}_{E}\times B$$

- $\mathcal{F}^{VD}$ ... tok viskózní energie (tření); $\mathcal{F}^{VD} = -v\cdot\mathcal{D}$
- $\mathcal{F}^{BS}$ ... tok potenciální energie pozaďové stratifikace

$$\mathcal{F}^{BS} = \bar{\rho} v \bar{Q}$$

většinu konv. obálky dominuje $\mathcal{F}^{EN}$, teče ven

$\mathcal{F}^{KE}$ ... slabší a teče dovnitř

$\mathcal{F}^{RD}$ ... v KZ zanedbatelný, důležitý v zářivém jádru

$\mathcal{F}^{PF}$ ... pro proces dynama, jinak zanedbatelný

$\mathcal{F}^{VD}$ ... obecně zanedbatelný

$\mathcal{F}^{BS}$ ... pokud je referenční rovnice adiabatický, pak $\mathcal{F}^{BS} = 0$, mimochodem je to to, co konvektivní pohyb spolu s $\mathcal{F}^{RD}$ způsobuje pokud tepelná rovnováha:

$$\left\langle \mathcal{F}_r^{KE} + \mathcal{F}_r^{EN} + \mathcal{F}_r^{RD} + \mathcal{F}_r^{PF} + \mathcal{F}_r^{VD} \right\rangle_{\vartheta \varphi t} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

cesta k rovnováze trvá dlouho

$$\tau_{rad} = \frac{M_{CZ}\, c_V\, \overline{T}}{L_\odot} \sim 10^5 \text{ let}$$

relaxace za tak dlouho

$$\tau_{konv,\, turnover} \sim 1 \text{ měsíc}$$

PŘENOS MOMENTU HYBNOSTI

$$\mathcal{L} = r \sin\vartheta \left(\Omega_0 r \sin\vartheta + \langle v_\varphi \rangle \right) = \lambda^2 \Omega$$

$$\lambda = r \sin\varphi$$

průměr (zonální) pohybové rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\mathcal{L}) = -\nabla \cdot \left(F^{MC} + F^{RS} + F^{VD} + F^{MS} + F^{MT} \right)$$

mer. cirk. $F^{MC} = \bar{\rho} \langle \vec{v}_M \rangle \mathcal{L}$

Reynolds $F^{RS} = r\bar{\rho} \sin\varphi \left(\langle v_r' v_\varphi' \rangle \frac{\vec{r}}{r} + \langle v_\varphi' v_\vartheta' \rangle \frac{\vec{\vartheta}}{\vartheta} \right)$

Maxwell $F^{MS} = -\frac{r \sin\vartheta}{4\pi} \left(\langle B_r' B_\varphi' \rangle \frac{\vec{r}}{r} + \langle B_\varphi' B_\vartheta' \rangle \frac{\vec{\vartheta}}{\vartheta} \right)$

střední pole $F^{MT} = -\frac{r\sin\vartheta}{4\pi} \langle B_\varphi \rangle \langle \vec{B}_M \rangle$; $\vec{B}_M = B_r \frac{\vec{r}}{r} + B_\vartheta \frac{\vec{\vartheta}}{\vartheta}$

viskózní difúze $F^{VD} = -\bar{\rho}\nu\lambda^2 \nabla\Omega$

$F^{MC} = \bar{\rho} \langle \vec{v}_M \rangle \mathcal{L}$ komponenta $\bar{\rho} \langle \vec{v}_M \rangle \lambda^2 \Omega_0$ je akce Coriolisovy síly, která přesměrovává meridionální do zonální

$$-\nabla \cdot F^{MC} = -\bar{\rho} \langle \vec{v}_M \rangle \cdot \nabla\mathcal{L}$$

$\Rightarrow$ MC kolmá k $\mathcal{L}$ distribuuje $\mathcal{L}$, aby byl konst. podél proudnic $\Rightarrow$ pokud buňka od rovníku k pólu, pak přenos tak, aby póly rychlejší $\rightarrow$ to ale není sluneční případ, takže toky jinak hlavní původce udržování dif. rotace – Reynoldsův tensor

⇒ redistribuce hlavně konvekcí, osově nesymetrickými pohyby. ⇒ korelace mezi komponentami fluktuujícího pole

$\langle v_\theta' v_\phi' \rangle$ ... transport úhlového momentu v šířce

$\langle v_r' v_\phi' \rangle$ ... — " — v hloubce

zdrojem RS i vlny, přestřelování, shear

ve stavu rovnováhy: $\nabla \cdot F^{RS} = -\nabla \cdot F^{MC}$

model:

difrotace $\mathcal{L} = \lambda^2 \Omega$ moment úhlový $\nabla \cdot F^{MC}$ —— + ····· −

⇒ pokud rovnováha, pak RS musí urychlovat hlubší KZ a rovník a decelerovat póly a horní KZ

Taylor – Proudman teorém

- pokud se pevné těleso pomalu pohybuje tekutinou, která se otáčí s vysokou rychlostí Ω, pak bude rychlost tekutiny konstantní podél libovolné přímky rovnoběžné s osou rotace. Ω musí být větší než rychlost pohybu tělesa, aby byla Coriolisova síla větší než odstředivé.

Důkaz: $\rho(u \cdot \nabla) u = F - \nabla p$ ... Navier-Stokes pokud uvažované členy zanedbatelné a tekutina tedy nekompresibilní (ρ = konst), pak

$$2\rho\, \Omega \times w = -\nabla p \quad /\cdot \nabla\times$$

$$2\rho\, \nabla\times(\Omega\times w) = -\nabla\times\nabla p = 0$$

$$\underbrace{\Omega\, \nabla\cdot w}_{=0} + \boxed{(\nabla\Omega)\cdot w} = 0$$

$$(\Omega\cdot\nabla)\vec{w} = 0 \ \ldots \text{Taylor-Proudman}$$

potřebujeme $\nabla\cdot\Omega = 0$

pro: $\Omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$\quad$, pro $\Omega_x = \Omega_y = 0$

$$\Rightarrow \Omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{pro } \Omega_z \neq 0$$

Rossbyho číslo: $R_0 = \frac{U}{2\Omega_0 r}$ $\quad$ U … char. rychlost vůči rotujícímu framu

pak pohyb. rce

$$2\Omega_0 \times \langle v\rangle_{\varphi,t} + \frac{\nabla\langle p\rangle_{\varphi,t}}{\bar\rho} + \frac{\langle\rho\rangle_{\varphi,t}\, g}{\bar\rho}\frac{\vec{r}}{r} = 0 \quad /\cdot\nabla\times$$

a zonální komponenta:

$$\boxed{\Omega_0\cdot\nabla\Omega = \frac{g}{2c_p \underbrace{\lambda}_{r\sin\vartheta} r}\frac{\partial\langle S\rangle_{\varphi,t}}{\partial\vartheta}}$$

Taylor-Proudman pro ☉ s diferenciální rotací

pro perfektně adiabatickou stratifikaci $\frac{\partial S}{\partial\vartheta} = 0$

$\Rightarrow \Omega_0\cdot\nabla\Omega = 0 \Rightarrow$ rotace cylindrická

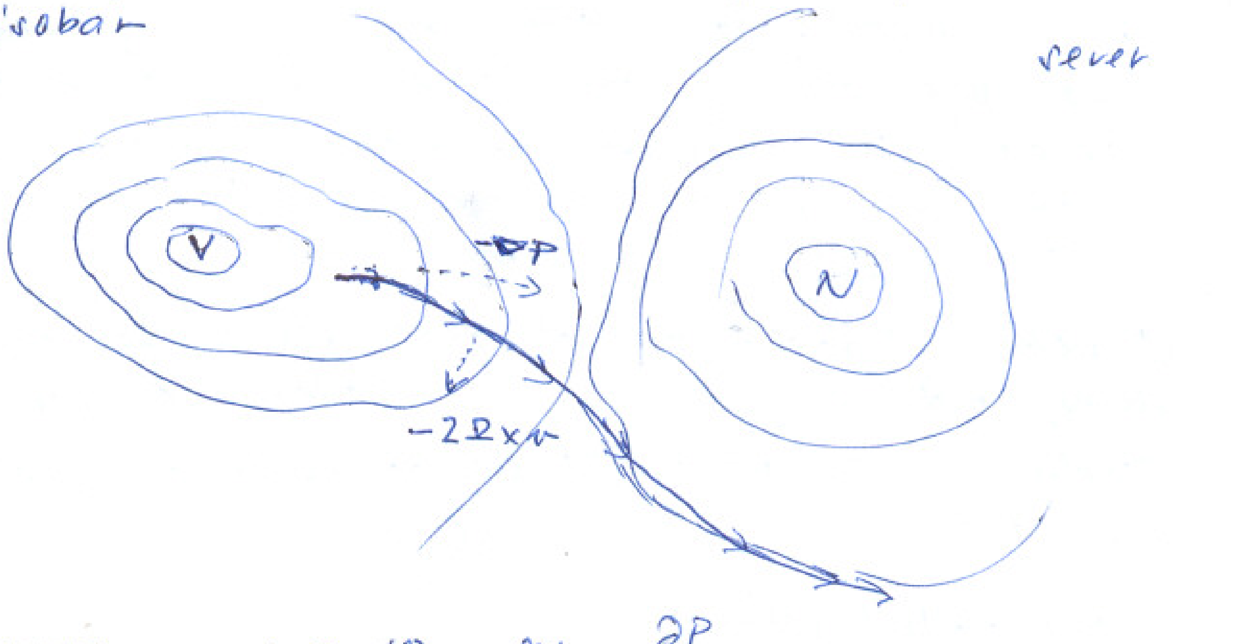
pro $\frac{\partial S}{\partial\vartheta} < 0$ (teplé póly) $\Rightarrow \Omega_0\cdot\nabla\Omega < 0$, pokles Ω k vyšším šířkám

šířkový gradient entropie (u. hustoty u. teploty) na izobarických plochách vede k necylindrické rotaci

Geostrofický vítr

- teoretické proudění, které je důsledkem přesné rovnováhy mezi Coriolisovou silou a gradientem tlaku.
- podél isobar
- v realitě není rovnováha přesná kvůli tření a odstředivé síle

⇒ 1. vítr z oblasti s vysokým tlakem do oblasti s nízkým tlakem
2. odkláněn Coriolisovou silou kvůli rotaci (na severu doprava, na jihu doleva)
3. proud zrychluje, stejně se zvětšuje odklon Coriolisem
4. až je dosažena rovnováha → pohyb není od vyššího k nižšímu tlaku, ale podél isobar



rovnice:

$$-\rho \cdot 2\omega(\varphi) \sin\varphi \, v_g = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\rho \cdot 2\omega(\varphi) \sin\varphi \, u_g = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$v_g = \frac{-1}{2\omega(\varphi)\sin\varphi\,\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = v_x$$

$$u_g = \frac{1}{2\omega(\varphi)\sin\varphi\,\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = v_y$$

⇒ oblasti nižšího tlaku jsou obíhány proti směru hodinových ručiček na severní polokouli

↳ pokud tření ⇒ zpomaluje účinek Coriolisovy síly ⇒ tlakové níže → vzduch spiráluje dovnitř.

→ funguje pokud $Ro = 1/\Omega\tau$ je malé (τ... charakt. čas)

Tepelný vítr

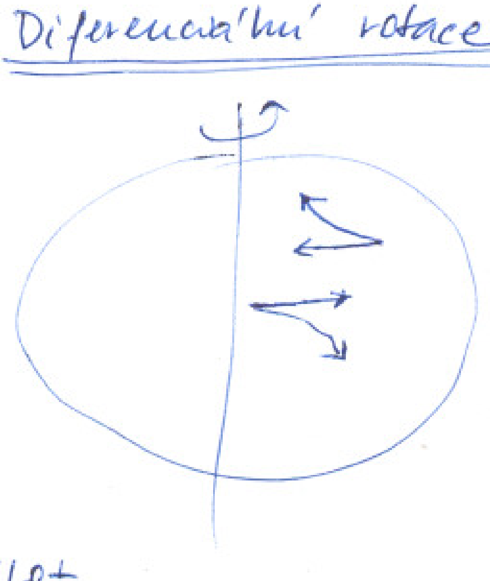
vertikální střih v geostrofickém větru způsobený horizontálním gradientem teploty

komponenta (necylindrická), která splňuje Taylor-Proudmanův teorém, je tepelný vítr. Ten je indukován gradientem (šířkovým) entropie.

Ve sluneční obálce → $\frac{\partial S}{\partial \vartheta}$ způsobeno ovlivněním efektivity konvekce rotací. Pokud je konvekce efektivnější u pólů, póly se ohřejí. ~~Pak~~ Celkový tok dodávaný zespodu musí být stejný jako přenesený konvekcí ⇒ musí docházet k šířkovému transportu energie. Pole anizotropického přenosu energie pak může mít vliv na udržení diferenciální rotace podobně jak RS.

Sluneční případ → pokud platí rovnováha tepelného větru, pak póly o cca 5K teplejší než rovník. Tepelný vítr je nezávislý na parametrech meridionální cirkulace.

Diferenciální rotace



rychlejší → přenos momentu hybnosti k rovníku

pomalejší → k pólu pomalejší elementy

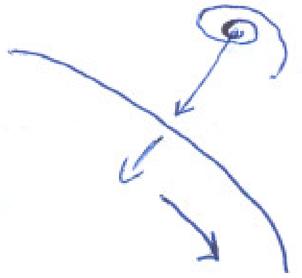
lokálně se nezachovává tato komponenta hybnosti

⇒ rovník se urychluje

→ proto meridionální cirkulace

$= X/8 \pm$

Down flow plume



pohyb dolů → cyklonický

dole zarážen vzplývavou silou, diverguje, získává anticyklonickou složku

→ přenos momentu hybnosti k rovníku

Torzní oscilace — Spruit, Sol. Phys 2003

pásy rychlejší (a pomalejší) rotace, aktivní oblasti se objevují na hranici rychlejšího a pomalejšího pásu. Oscilace nejlépe vidět na rovníkové hraně aktivního pásu. Migrují s aktivitou

co je způsobuje?

¿ není to geostrofický tok?

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - 2\rho v_x \Omega \sin\vartheta$$

není důležité tření? Ekmanovo číslo rozhodne

$E = \nu / (\Omega L^2)$, L... char. škála délky

pro $E \gtrsim 1$ se musí tření započíst

typické hodnoty Ro a E pro torzní oscilace:

$\tau \sim 1\,\mathrm{yr}$ ⇒ $Ro = 1/(\Omega\tau) \approx 0{,}01$

pro $\nu \sim 10^{13}$ (granulace)

⇒ pro $E \sim 1$ musí být $L_E \sim 10\,\mathrm{Mm}$

⇒ pro chování na škále menší než 10 Mm →

→ započíst tření

↳ aktivní pásy → je to systém s nízkým tlakem?

odhad: $\frac{\delta p}{p} \approx \int_0^d \frac{\delta T}{T} \frac{dz}{H_p} \sim \frac{n\,\delta T}{T}$ n... počet H_p, které se vejdou do 0–d čili aby $\frac{\delta\rho}{\rho}\cdot\delta p<0 \Rightarrow \delta T<0$

→ to je OK, v pásech aktivity zvýšené vyzařování, tedy plyn musí být chladnější

→ úvahy v malých mg. elementech (již ne kalcs)

↳ emituje víc proto, že mg. pole redukuje opacitu

pro L... šířkový rozměr perturbace teploty

$$\Rightarrow \frac{\delta P}{P} = -2 \sin\vartheta \frac{v\,\Omega L}{c_s^2}$$

pro $c_s = 10^4\ m/s$; $v = 5\ m/s$, $L \sim 3\times10^8\ m$

$$\Rightarrow \frac{\delta P}{P} \sim -5\times10^{-5}$$

totéž pro $\frac{\delta T}{T}$

pro kvantitativní odhad → stratifikace

↳ „pseudopolytropní" model – polytropa s lineární teplotou

$T = T_0\,\xi$; $\xi = 1 + \frac{z}{z_0}$; $z=0$ fotosféra

pak $\rho = \rho_0\,\xi^2$

$P = P_0\,\xi^3$ rovnováha pro $P_0 = z_0\rho_0 g/3$

$$\Rightarrow \frac{d\ln T}{d\ln P} = \nabla = 1/3$$

pro superadiabatický gradient

$$\delta \equiv \nabla - \nabla_{ad} = \delta_0\,\xi^{-2} \ ; \ \delta_0 \sim 0{,}25$$

dá se to dohromady: $\frac{\Delta T}{T} = \int \delta\, d\ln P = \frac{3}{2}\delta_0\,\xi^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \epsilon\,\xi^{-2}$$

↳ $\equiv \left(\frac{\delta T}{T}\right)_0$

pro δP:

$$\delta \ln P = \int \frac{\delta T}{T} \frac{dz}{H} = \frac{\epsilon z_0}{2H_0} \xi^{-2}$$

H_0 ... povrchová

$$\Rightarrow \boxed{v = v_g \xi^{-1}} ; \quad v_g = \frac{\epsilon z_0}{2H_0} \frac{c_{s0}^2}{2\Omega L \sin\vartheta}$$

geostrofický tok azimutální $\quad c_{s0} \sim 10\,km/s$

musíme určit $\quad \epsilon = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_0$

uvažujeme 10% efektivní kontrast

$\Rightarrow$ pro toky $\frac{\delta F}{F} \sim 10^{-3}$

$\epsilon \sim \frac{\delta F}{F} \sim 10^{-3}$

$\Rightarrow$ pro $L \sim 3 \times 10^8\,m$ $\Rightarrow$ $v \sim 5\,m/s$ pro $z \sim 10\,Mm$

pro $z \approx 0$ $\quad v \sim 100\,m/s$, což je divné

je to divné proto, že na škálách pod 10 Mm se musí započíst tření

$\Rightarrow$ je zapotřebí získat opravu

přesnější řešení: $\quad v_g = 250\,m/s$

$$v_{x0} = v_{y0} = \frac{v_g}{\lambda} \sin(ky)$$

$$\lambda \sim 40$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{x0} = v_{y0} \sim 6\,m/s}$$

cyklonický charakter, tedy i vtok plazmatu do aktivních pásů

$\hookrightarrow$ není řízeno odspodu, pač termální balance skrze konv. zónu $\quad \tau \sim 10^5$ let

Reynoldsovo číslo $Re = \frac{vL}{\nu}$ důležitost inerc. sil proti viskózním
Re malé → laminární

Taylorovo číslo $Ta = \frac{4\Omega^2 r^4}{\nu^2}$ … důležitost odstředivé síly
Ta velké → odstř. síla důležitá

Rayleighovo číslo $Ra = \frac{g\beta}{\nu\alpha}(T_s - T_\infty)L^3$ důležitost vzplývavých sil
Ra velké → konvekce

β… termální expansní koeficient
α… tepelná difuzivita
ν… kinematická viskozita

Prandtlovo číslo $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ Pr malé → vedení spíš kondukcí

Ekmanovo číslo $Ek = \frac{\nu}{2L^2\Omega\sin\theta} \sim \frac{\nu}{\Omega L^2}$

důležitost tření v rotujícím prostředí
Ek malé → lze zanedbat tření

Rossbyho číslo důležitost Coriolisovy síly oproti odstředivé
$Ro = \frac{1}{\Omega\tau}$

Ro malé → Coriolis
Ro velké → odstředivá síla

Machovo číslo $Ma = \frac{v}{c_s}$ podzvukové $Ma < 1$
zvukové $Ma = 1$
transsonický $Ma \in (0{,}8 - 1{,}3)$
nadzvukový $Ma \in (1{,}2 - 5)$
hypersonický $Ma > 5$
↳ ionizace a disociace plynu

Reynoldsovo magnetické $R_m = \frac{vL}{\eta}$ důležitost advekce mg. pole proti jeho difúzi

R_m malé → difuzní charakter

=X/12=