

6 Oscilace

6.1 Výkonové spektrum

lokální studium \rightarrow zanedbáváme zakřivení povrchu \rightarrow planparalelní geometrie \rightarrow rozklad signálu $\Phi(\mathbf{k}, t)$ (radiální rychlost, intenzita, ...) do Fourierovských komponent

$$\Phi(\mathbf{k}, t) = \iiint dx dy dt \Phi(x, y, t) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (1)$$

globální studium \rightarrow zanedbáváme zakřivení povrchu \rightarrow rozklad do báze kulových funkcí Y_l^m (funkce $P_l^m(\theta, \phi)$ jsou Legendreovy polynomy)

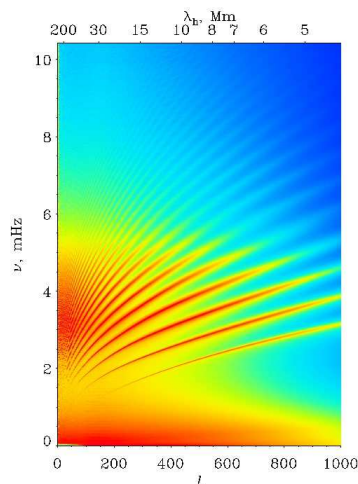
$$\Phi(l, m, \omega) = \iiint d\theta d\phi dt \Phi(\theta, \phi, t) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (2)$$

$$Y_l^m(\theta, \phi, t) = P_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

Výkonové spektrum $P(\mathbf{k}, t)$ je z definice rovno

$$P(\mathbf{k}, t) = \Phi(\mathbf{k}, t) \Phi^*(\mathbf{k}, t). \quad (4)$$

- rezonance ve výkonovém spektru svědčí o stojatém vlnění (viz Obrázek 1)
- rezonance korespondují odspoda s f modem a dále zvukovými mody
- signál na nízkých frekvencích koresponduje s konvekcí, v těchto frekvencích bychom pozorovali g mody vln
- u modů s nízkým l se pozoruje velká a malá separace: velká je citlivá na střední hustotu, malá na rychlost zvuku v blízkosti jádra, množství vodíku v blízkosti jádra, věk hvězdy
- typická frekvence oscilací 2,5-4,5 mHz (5 minut)
- frekvence vyšší než 5,3 mHz se neodrážejí zpět pod povrch, ale unikají do atmosféry
- vlny nám poskytují integrální informaci o podmínkách podél dráhy vlny
- sférická symetrie $\rightarrow P \neq P(m)$
- pozorujeme jen polokouli, na ní nejsou kulové funkce ortogonální \rightarrow vznikají falešné mody



Obrázek 1: Výkonové spektrum oscilací Slunce.

6.2 Vzorkovací teorém

Předpokládejme spojitý 2D signál $f(x, y)$, který budeme vzorkovat. Jak husté musí být vzorkování reprezentované polem delta funkcí $s(x, y)$ s kroky Δx a Δy

$$s(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y), \quad (5)$$

abychom neztráceli informaci (tj. byli schopni přesně zrekonstruovat původní spojitou funkci)? Vzorkovaný signál $d(x, y)$ je roven

$$d(x, y) = f(x, y) s(x, y). \quad (6)$$

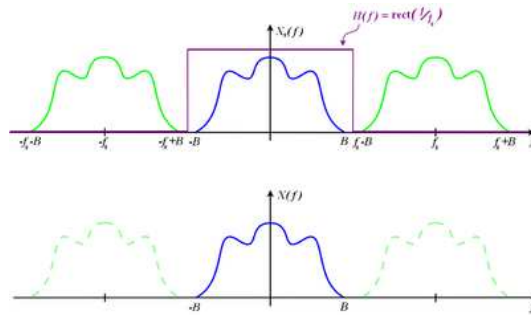
Převedením do Fourierova prostoru (odpovídající veličiny budou značeny velkými písmeny) a využitím konvolučního a škálovacího teorému dostáváme pro vzorkovaný signál $D(u, v)$ a pole delta funkcí $S(u, v)$:

$$D(u, v) = F(u, v) * S(u, v) \quad (7)$$

$$S(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - i\frac{1}{\Delta x}, v - j\frac{1}{\Delta y}\right) \quad (8)$$

Grafická podoba $D(u, v)$ je taková, že v bodech, které jsou vzdáleny $\frac{1}{\Delta x}$ ve směru x a $\frac{1}{\Delta y}$ ve směru y je umístěna $F(u, v)$ (viz Obrázek 2). Následným vyříznutím obdélníkovou funkcí $H(u, v)$ (funkce nabývá hodnoty 1 kolem jednoho spektra, jinde je 0) získáme z $D(u, v)$ funkci $F(u, v)$. Inverzní Fourierovou transformací (IFT) obdržíme celou spojitou funkci $f(x, y)$. V reálném prostoru koresponduje s inverzní Fourierovou transformací interpolace. Neboli

$$f(u, v) = \text{IFT}[D(u, v)H(u, v)] = d(x, y) * h(x, y). \quad (9)$$



Obrázek 2: Funkce $D(u, v)$, modře jedno spektrum $F(u, v)$, fialově obdélníková funkce $H(u, v)$.

To nám mimo jiné říká, že ideální interpolace je konvoluce vzorkovaného signálu s inverzní Fourierovou transformací obdélníkové funkce (tzv. sinc funkce). Pokud má ale funkce omezený nosič/spektrum v reálném/Fourierově prostoru, bude mít neomezené spektrum/nosič ve Fourierově/reálném prostoru. Proto se k interpolaci nepoužívá sinc, která má neomezený nosič (v důsledku toho se v interpolaci libovolného bodu musí do výpočtu zahrnout všechny vzorkované body $d(x, y)$), ale funkce jí podobné.

Tento postup nelze aplikovat vždy. Hlavním problémem je překryv funkcí $F(u, v)$ ve funkci $D(u, v)$. Pokud má $F(u, v)$ omezené spektrum ($f(u, v)$ má neomezený nosič), dá se tento problém vyřešit hustším vzorkováním daným Nyquistovými nerovnicemi. Pro vyříznutí pouze jednoho spektra musí platit

$$\frac{1}{\Delta x} \geq 2W_u, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \geq 2W_v, \quad (11)$$

$$\Delta x \leq \frac{1}{2W_u}, \quad (12)$$

$$\Delta y \leq \frac{1}{2W_v}, \quad (13)$$

kde W_u a W_v jsou suprema frekvencí $F(u, v)$. Pokud $F(u, v)$ nemá omezené spektrum (libovolná fotka), budou se spektra překrývat vždy. Vyříznutím jednoho spektra $F(u, v)$ současně vyřízneme i část sousedního spektra $F(u, v)$, čímž vznikají falešné frekvence (aliasing) a ztrácíme informaci o vysokofrekvenčním signálu (details,

hrany). Problému se dá zabránit za cenu oříznutí vysokých frekvencí $F(u, v)$ tak, aby se při daném vzorkování již nepřekrývaly (ořezává se ještě před Fourierovou transformací $f(x, y)$).

Pokud budeme pozorovat po dobu T , bude nejnižší frekvence, kterou rozlišíme $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ta se dá „libovolně“ snižovat delšími pozorovacími řadami. Naopak nejvyšší rozlišitelná frekvence ω_{Ny} je při vzorkování s frekvencí Δt rovna $\Delta\omega_{Ny} = \frac{\pi}{\Delta t}$. Všechny vyšší frekvence se vzorkují do nižších (aliasing). Konkrétně o co je frekvence vyšší než Nyquistova $\omega = \omega_{Ny} + \delta\omega$, o to se tato frekvence bude vzorkovat do nižších frekvencí $\omega = \omega_{Ny} - \delta\omega$.

6.3 Základní mod oscilací

Základním modem oscilací budeme rozumět vlnu šířící se rychlostí zvuku c_s a mající vlnovou délku rovnou průměru Slunce $\lambda = 2R_\odot$. Dále budeme předpokládat adiabatickou aproximaci a pokusíme se odhadnout časovou škálu průchodu vlny Sluncem tam a zpět. Rychlost zvuku můžeme spočítat z rovnice

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}}, \quad (14)$$

kde \bar{P} a $\bar{\rho}$ jsou střední hodnota tlaku a střední hodnota hustoty. Pro střední hodnotu hustoty platí:

$$\bar{\rho} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_\odot}{R_\odot^3} \quad (15)$$

Střední hodnotu tlaku odhadneme z rovnice hydrostatické rovnováhy, kterou hrubě diskretizujeme (povrch - střed):

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4} \Rightarrow \frac{0 - \bar{P}}{M_\odot - 0} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4} \Rightarrow \bar{P} = \frac{GM_\odot^2}{4\pi R_\odot^4} \quad (16)$$

Čas průchodu vlny τ spočítáme z rovnice:

$$\tau = 2 \frac{\lambda}{c_s} = \frac{4R_\odot}{\sqrt{\frac{\gamma G}{3} \frac{M_\odot}{R_\odot}}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma\pi}} (G\rho)^{-1/2} \quad (17)$$

Pokud dosadíme, vyjde zhruba 45 minut. Reálné časy jsou okolo 15 minut, protože rychlost zvuku směrem do centra roste.

6.4 Lineární adiabatické oscilace nerotujícího Slunce

6.4.1 Předpoklady a základní rovnice

Předpoklady:

- poruchy (indexované čárkou) jsou malé vůči pořadovým hodnotám (indexované nulou)
- lineární: $v' \ll c_s$
- adiabatické: $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{konst.}$
- sféricky symetrické pozadí
- zanedbáváme magnetická pole, tenzor napětí, rotaci
- $\mathbf{v}_0 = 0$, $\rho_0 = \rho_0(r)$, $P_0 = P_0(r)$

Řešené rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \nabla \Phi \rho \quad (19)$$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{konst.} \quad (20)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (21)$$

Dále víme, že $\Delta\Phi = g$ je gravitační zrychlení. Na stavovou rovnici aplikujeme úplnou časovou derivaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = \frac{dP}{dt} \frac{1}{\rho^\gamma} - P\gamma \frac{1}{\rho^{\gamma+1}} \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{dP}{dt} - P\gamma \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{1}{\rho^\gamma} = 0 \quad (22)$$

Navíc $c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$. Celkem dostáváme:

$$\frac{dP}{dt} = c_s^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (23)$$

Do rovnic zavedeme Eulerovské perturbace (čárkované) ρ' , $\mathbf{v}' = \frac{d\xi}{dt}$, P' a Φ' . S Lagrangeovými perturbacemi (δ) souvisí vztahem

$$\delta A = A' + \xi_r \cdot \frac{\partial A_0}{\partial r}. \quad (24)$$

6.4.2 Linearizace rovnic a Cowlingova aproximace

Hustotu, tlak, rychlost a gravitační potenciál si rozdělíme na pozadovou hodnotu a poruchu. Budeme předpokládat, že pozadové hodnoty splňují rovnice (18)–(21).

Linearizace rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = \nabla \cdot \left(\xi \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot [\xi \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0)] \quad (27)$$

Poslední rovnice je ale ve skutečnosti rovna nule, protože jsme předpokládali $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ (popřípadě $\mathbf{v}_0 = 0$). Rovnici integrujeme přes libovolný čas dt . Aby byla splněna pro libovolný čas, musí platit

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0. \quad (28)$$

Linearizace ostatních rovnic je triviální. Stavovou rovnici však máme zapsanou pomocí úplných derivací, tedy Lagrangeových poruch. Pomocí převodního vztahu mezi Lagrangeovými a Eulerovskými poruchami (24) a integrací přes libovolný čas odvodíme požadovaný tvar. Linearizované rovnice nabývají tvaru:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0 \quad (29)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' - \nabla \Phi' \rho_0 - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (30)$$

$$P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (31)$$

$$\Delta \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (32)$$

Pro zjednodušení rovnic budeme předpokládat, že malé poruchy způsobené vlnami mají za následek pouze zanedbatelné poruchy gravitačního pole (Cowlingova aproximace). Tím fakticky škrtneme Poissonovu rovnici a jeden ze členů v pohybové rovnici. Tímto zjednodušením se dopouštíme odchylky jen několika jednotek procent od řešení plných rovnic.

Zbylé rovnice převedeme do sférických souřadnic. Například $\xi = \xi_r \mathbf{e}_r + \xi_h$. Při lokálním přístupu složka r koresponduje se složkou z a složka h se složkami x a y . V dalších úpravách budeme potřebovat operátor divergence ve sférických souřadnicích (úhlovou část nemusíme rozepisovat):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r} \nabla_h \cdot \mathbf{A}_h \quad (33)$$

Hydrodynamické rovnice převedeme do sférických souřadnic, pohybovou rovnici rozdělíme na radiální a úhlovou část a ze stavové rovnice vyjádříme ρ' :

$$\rho' + \nabla_r \cdot (\rho_0 \xi_r) + \frac{1}{r} \nabla_h \cdot (\rho_0 \xi_h) = 0 \quad (34)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \xi_h = 0 \quad (35)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (36)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} \right) = -\nabla_r P' - \frac{1}{r} \nabla_h P' - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (37)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (38)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (39)$$

$$P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (40)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \quad (41)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (42)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \left(\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (43)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho_0}{g} g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (44)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho_0}{g} N^2 \quad (45)$$

N^2 v posledním vztahu je Brunt-Väisälöva frekvence. Z teorie směšovací délky víme, že

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{\text{ad}} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right], \quad (46)$$

ale pro adiabatické přiblížení můžeme za $\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{\text{ad}}$ dosadit $\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r}$. Tím dostáváme

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln P_0}{\partial r} - \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} \right). \quad (47)$$

Celkem máme nyní k řešení 4 rovnice:

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h = 0 \quad (48)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (49)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (50)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \xi_r \quad (51)$$

Řešení prostředních dvou budeme hledat ve tvaru $\xi_r \propto \exp(-i\omega t)$, $\boldsymbol{\xi}_h \propto \exp(-i\omega t)$, čímž obdržíme soustavu rovnic:

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h = 0 \quad (52)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (53)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \boldsymbol{\xi}_h = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (54)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \xi_r \quad (55)$$

Pro řešení navíc budeme předpokládat následující okrajové podmínky:

$$\boldsymbol{\xi}(r=0) = 0 \quad (56)$$

$$\delta P(r=R_\odot) = 0 \quad (57)$$

První z nich je podmínka stabilního středu Slunce, druhá říká, že nejsou žádné externí síly (například atmosféra).

6.4.3 Řešení v separovaném tvaru

Řešení budeme hledat v následujícím separovaném tvaru:

$$\rho'(r, \theta, \phi) = \rho'(r) f(\theta, \phi), \quad (58)$$

$$P'(r, \theta, \phi) = P'(r) f(\theta, \phi), \quad (59)$$

$$\xi_r(r, \theta, \phi) = \xi_r(r) f(\theta, \phi), \quad (60)$$

$$\xi_h(r, \theta, \phi) = \xi_h(r) \nabla_h f(\theta, \phi), \quad (61)$$

kde $f(\theta, \phi)$ je neznámá funkce úhlových souřadnic. Navíc budeme předpokládat regulární řešení na pólech. Po jednoduchém dosazení (58)–(61) do (52)–(55) se budeme zajímat nejprve o rovnici kontinuity:

$$\left[\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) \right] f(\theta, \phi) + \frac{\rho_0}{r} \xi_h \Delta_h f(\theta, \phi) = 0 \quad (62)$$

Pokud budeme hledat řešení v separovaném tvaru, musíme z rovnice vykrátit $f(\theta, \phi)$. Takže musí být splněna rovnice

$$\Delta_h f(\theta, \phi) = \alpha f(\theta, \phi), \quad (63)$$

kde α je konstanta. Vlastní funkce úhlové části Laplaceova operátoru jsou kulové funkce a vlastními čísly jsou $-l(l+1)$. Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích můžeme formálně zapsat jako $\Delta = \Delta_r + \Delta'_h = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_h$. Po dosazení do rovnice (63) dostáváme vztah pro velikost horizontálního vlnového vektoru k_h :

$$\Delta_h Y_l^m(\theta, \phi, t) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (64)$$

$$r^2 \Delta'_h Y_l^m(\theta, \phi, t) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (65)$$

Budeme předpokládat lokální přístup, kdy můžeme zanedbat zakřivení povrchu a vlastní funkce Laplaceova operátoru jsou imaginární exponenciály (přechod od kulových funkcí k Fourierově bázi). Neboly:

$$r^2 i^2 (k_x^2 + k_y^2) = -l(l+1) \quad (66)$$

$$k_h^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (67)$$

$$k_h = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \quad (68)$$

Z horizontální části pohybové rovnice vyjádříme ξ_h a dosadíme spolu se stavovou rovnicí do (62):

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (69)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h \nabla_h f(\theta, \phi) = -\frac{P'}{r} \nabla_h f(\theta, \phi) \quad (70)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{P'}{r} \quad (71)$$

$$\xi_h = \frac{P'}{\omega^2 \rho_0 r} \quad (72)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) - \frac{l(l+1) \rho_0}{r} \xi_h = 0 \quad (73)$$

$$\rho' + \frac{2}{r} \rho_0 \xi_r + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \xi_r + \rho_0 \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} P' = 0 \quad (74)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2 \frac{\xi_r}{r} + \xi_r \left(\frac{N^2}{g} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left[1 - \frac{l(l+1) c_s^2}{r^2 \omega^2} \right] = 0 \quad (75)$$

$$\frac{N^2}{g} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} \quad (76)$$

Navíc předpokládáme, že pozadí je v hydrostatické rovnováze, tj. že platí

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} = -g \rho_0. \quad (77)$$

Pro zjednodušení podoby rovnic zavedeme Lambovu frekvenci $S_l^2 = \frac{l(l+1) c_s^2}{r^2}$. Výsledný tvar rovnice (75) má podobu:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2 \frac{\xi_r}{r} - \frac{\xi_r g}{c_s^2} + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (78)$$

V další aproximaci budeme předpokládat lokální přístup, kdy se r ani ξ_r příliš nemění a jejich podíl můžeme vůči derivaci ξ_r podle r zanedbat.

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r g}{c_s^2} + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (79)$$

Zbývá ještě upravit radiální část pohybové rovnice. Do té dosadíme stavovou rovnici (55).

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (80)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{g P'}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (81)$$

Spolu s rovnicemi (79) a (81) máme předepsány okrajové podmínky (56) a (57). Rovnici (57) upravíme a dosadíme za poruchu tlaku z rovnice (72):

$$\delta P = P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = P' - \xi_r g \rho_0 = 0, \quad (82)$$

$$\omega^2 \rho_0 r \xi_h = g \rho_0 \xi_r, \quad (83)$$

$$\frac{\xi_h}{\xi_r} = \frac{g}{\omega^2 r}. \quad (84)$$

6.4.4 JWKB řešení (Jeffreys–Wentzel–Kramers–Brillouin)

Řešení rovnic (79) a (81) můžeme v lokálním přístupu, kdy předpokládáme, že v rámci oscilací se mění zejména hustota hledat ve tvaru tzv. JWKB aproximace:

$$\xi_r = A \rho_0^{-1/2} \exp(ik_r r), \quad (85)$$

$$P' = B \rho_0^{1/2} \exp(ik_r r), \quad (86)$$

kde A , B a k_r jsou konstanty (k_r se mění pomalu s r). Po dosazení do rovnice (79) a jejím následné vynásobení $\rho_0^{1/2}$ dostáváme:

$$A \left(ik_r \rho_0^{-1/2} - \frac{1}{2} \rho_0^{-3/2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) - \frac{g}{c_s^2} A \rho_0^{-1/2} + \frac{B \rho_0^{1/2}}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (87)$$

$$A \left(ik_r - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{g}{c_s^2} \right) + \frac{B}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (88)$$

Označme $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{-1}{H_\rho}$ tlakovou škálu. Výsledná rovnice přejde na tvar:

$$A \left[ik_r + \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] + \frac{B}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (89)$$

Podobně upravíme i rovnici (81):

$$B \left(ik_r \rho_0^{1/2} + \frac{1}{2} \rho_0^{-1/2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) + \frac{g}{c_s^2} \rho_0^{1/2} B + \rho_0 A \rho_0^{-1/2} (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (90)$$

$$A (N^2 - \omega^2) + B \left[ik_r - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] = 0 \quad (91)$$

Hledáme netriviální řešení pro A a B . Determinant matice tvořené rovnicemi (89) a (91) musí být 0.

$$\left[ik_r + \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] \left[ik_r - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] - \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} \right) (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (92)$$

Křížové členy v hranatých závorkách se odečtou, cílem bude vyjádření k_r^2 z této disperzní relace.

$$-k_r^2 - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right)^2 - \frac{N^2 - \omega^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (93)$$

a

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - N^2 - \frac{c_s^2}{4H_\rho^2} - \frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_\rho}}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2). \quad (94)$$

Zbývá upravit N^2 :

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) = g \left(\frac{1}{c_s^2 \rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{1}{H_\rho} \right) = g \left(\frac{-g}{c_s^2} + \frac{1}{H_\rho} \right) = -\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_\rho} \quad (95)$$

Zavedeme akustickou hraniční frekvenci $\omega_c^2 = \frac{c_s^2}{4H_\rho^2}$. Ta u povrchu nabývá hodnoty přibližně 5,3 mHz (viz Obrázek 1). Finální tvar rovnice (94):

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2). \quad (96)$$

Z tvaru, v jakém jsme hledali řešení navíc vidíme, že pro $k_r < 0$ se bude porucha exponenciálně utlumovat, pro $k_r > 0$ se porucha bude šířit ve tvaru vlny.

6.4.5 Disperzní relace pro p a g mody

P mody (zvukové vlny) se mohou v závislosti na S_l šířit velmi hluboko do zóny zářivé rovnováhy. Nicméně tyto mody (s nízkým S_l) se obtížně pozorují. Pro mody šířící se pouze v konvektivní zóně můžeme v rovnici (96) zanedbat N^2 oproti ω^2 . Rovnice se zjednoduší na tvar:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{c_s^2} \quad (97)$$

$$\frac{S_l^2}{c_s^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} = k_h^2 \quad (98)$$

$$k_r^2 c_s^2 = \omega^2 - \omega_c^2 - k_h^2 c_s^2 \quad (99)$$

$$k^2 = k_r^2 + k_h^2 \quad (100)$$

$$\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 c_s^2 \quad (101)$$

Vlna se šíří pod povrchem a díky rostoucí rychlosti zvuku směrem k centru se lomí od kolmice. Ve spodním odrazném bodě nastává úplný odraz. Pro odrazné body r_1 a r_2 platí $k_r = 0$, protože v místě odrazu se vlna nešíří v radiálním směru. Pro spodní odrazný bod navíc platí, že ω_c^2 můžeme zanedbat vůči ω^2 . Neboli:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) = 0, \quad (102)$$

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{L^2}{\omega^2 r_1^2} (N^2 - \omega^2) = 0, \quad (103)$$

$$r_1^2 = \frac{L^2 c_s^2 \omega^2 - N^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad (104)$$

$$r_1 = \frac{L c_s}{\omega}, \quad (105)$$

$$\frac{\omega}{L} = \frac{c_s(r_1)}{r_1}, \quad (106)$$

kde jsme označili $L = \sqrt{l(l+1)}$. Pro horní odrazný bod r_2 můžeme naopak zanedbat S_l oproti ω_c a platí $\omega = \omega_c$, ale díky strmému poklesu hustoty směrem k povrchu můžeme pro zjednodušení požadovat $r_2 = R_\odot$.

Na rozdíl od p modů se g mody (gravitační mody) nešíří v konvektivní zóně, ale jen ve vrstvě zářivé rovnováhy. Tam můžeme zanedbat ω^2 oproti S_l^2 a rovnice (96) se zjednoduší na tvar:

$$k_r^2 = \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) - \frac{\omega_c^2}{c_s^2} \quad (107)$$

$$k_r^2 = k_h^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{\omega_c^2}{c_s^2} \quad (108)$$

$$k_r^2 = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} - k_h^2 - \frac{\omega_c^2}{c_s^2} \quad (109)$$

$$k^2 + \frac{\omega_c^2}{c_s^2} = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} \quad (110)$$

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k^2 + \frac{\omega_c^2}{c_s^2}} \quad (111)$$

$$\omega^2 = N^2 \cos^2 \theta \quad (112)$$

V poslední rovnici jsme si vybrali jen ty vlny, kde $k^2 \gg \frac{\omega_c^2}{c_s^2}$ a označily θ úhel mezi horizontálním vlnovým vektorem a celkovým vlnovým vektorem. Díky $\cos^2 \theta$ se tyto mody šíří hlavně horizontálně.

6.4.6 Disperzní relace pro f mod

F mody jsou gravitační mody šířící se na povrchu. Analogicky vlnám na vodní hladině budeme proto předpokládat $\delta P = 0$. Pro odvození disperzní relace budeme vycházet z rovnic (79), (81) a (24). Nejprve pro obecnost nebudeme pokládat $\delta P = 0$. Z rovnice (24) vyjádříme (s využitím hydrostatické rovnováhy pozadí) P' :

$$P' = \delta P + \xi_r \rho_0 g \quad (113)$$

Tento výsledek dosadíme do zbývajících dvou rovnic:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{g \xi_r}{c_s^2} + \frac{\delta P}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) + \frac{g \xi_r}{c_s^2} - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r^2 \omega^2} = 0 \quad (114)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\delta P}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r^2 \omega^2} = 0 \quad (115)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \rho_0 g + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{g \delta P}{c_s^2} + \frac{\xi_r g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (116)$$

Z rovnic vyloučíme $\frac{\partial \xi_r}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g^2 \rho_0 l (l+1)}{r^2 \omega^2} \xi_r - \frac{g \delta P}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ + \frac{g \delta P}{c_s^2} + \xi_r \frac{g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g^2 \rho_0 l (l+1)}{r^2 \omega^2} \xi_r + \frac{g \delta P}{c_s^2} \frac{S_l^2}{\omega^2} + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ + \xi_r \frac{g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (118)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g l (l+1)}{\omega^2 r^2} \delta P + \xi_r \frac{g \rho_0}{r} \left[\frac{r N^2}{g} - \frac{r \omega^2}{g} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{g r}{c_s^2} + \frac{g l (l+1)}{\omega^2 r} \right] = 0 \quad (119)$$

$$\frac{N^2}{g} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_0 c_s^2} g \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = -\frac{g}{c_s^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \quad (120)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g l (l+1)}{\omega^2 r^2} \delta P + \xi_r \frac{g \rho_0}{r} \left[\frac{g l (l+1)}{\omega^2 r} - \frac{r \omega^2}{g} \right] = 0 \quad (121)$$

Tato rovnice se dá splnit pro $\delta P = 0$ a $\left[\frac{g l (l+1)}{\omega^2 r} - \frac{r \omega^2}{g} \right] = 0$. Disperzní relace pro f mod nabývá tvaru:

$$\frac{g l (l+1)}{\omega^2 r} = \frac{r \omega^2}{g} \quad (122)$$

$$\omega^4 = \frac{g^2}{r^2} l (l+1) \quad (123)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{r} \sqrt{l(l+1)} \quad (124)$$

$$\omega^2 = k_h g \quad (125)$$

Dosazením tohoto řešení do (115) spolu s podmínkou $\delta P = 0$ odvodíme řešení pro ξ_r :

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r g \sqrt{l(l+1)}} = 0 \quad (126)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \xi_r = 0 \quad (127)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - k_h \xi_r = 0 \quad (128)$$

Tato rovnice má exponenciální řešení ve tvaru

$$\xi_r \propto \exp[k_h (r - R_\odot)], \quad (129)$$

ze kterého je patrný rychlý pokles s hloubkou. Jde tedy skutečně o povrchový mod.

7 Helioseismologie

7.1 Rezonance a Duvallův zákon

Rezonanční podmínka pro stojaté vlny mezi odraznými body r_1 a r_2 se dá zapsat ve tvaru

$$\int_{r_1}^{r_2} dr k_r = \pi (n + \alpha), \quad (130)$$

kde n je řád vlny a α fázová změna při odrazu. Ta závisí pouze na vlastnostech prostředí. Speciálně pro p mody s vysokými frekvencemi, pro které můžeme zanedbat ω_c dostáváme:

$$\pi (n + \alpha) = \int_{r_1}^{R_\odot} dr \omega \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (131)$$

$$F(\omega) = \frac{\pi (n + \alpha)}{\omega} = \int_{r_1}^{R_\odot} dr \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (132)$$

Spodní odrazný bod závisí podle vztahu (106) pouze na poměru $\frac{\omega}{L}$. Stejně tak integrand závisí pouze na poměru $\frac{\omega}{L}$. Celkově se obecná 2D disperzní relace $\omega = \omega(n, l)$ rozpadá na 1D disperzní relaci mezi poměry $\frac{\omega}{L}$ a $\frac{n + \alpha}{\omega}$. Tato skutečnost je známá jako Duvallův zákon. Platí přibližně pro $l < 250$ s hodnotou $\alpha \approx 1,5$. Jinými slovy při uhádnutí správné konstanty α můžeme rezonanční frekvence p modů popsat jedinou funkcí. Zároveň nám hodnota α napovídá o vlastnostech v okolí místa odrazu vlny.

7.2 Inverzní úlohy

7.2.1 Inverze rychlosti zvuku

Rychlost zvuku v závislosti na r můžeme odvodit přímo z rovnice (132). Zavedme substituce $u = \frac{L^2}{\omega^2}$ a $\xi = \frac{r^2}{c_s^2}$:

$$F(\omega) = \frac{\pi (n + \alpha)}{\omega} = \int_u^{\xi_\odot} d\xi (\xi - u)^{1/2} \frac{d \ln r}{d\xi}, \quad (133)$$

kde jsme označili $\xi_\odot = \xi(R_\odot)$. Po zavedení funkce $G = \ln r$ přejde integrál na Abelův:

$$F(\omega) = \frac{\pi (n + \alpha)}{\omega} = \int_u^{\xi_\odot} d\xi (\xi - u)^{1/2} \frac{dG}{d\xi}, \quad (134)$$

který má analytické řešení. Zderivujeme rovnici podle u :

$$-2 \frac{dF(u)}{du} = \int_u^{\xi_\odot} d\xi \frac{dG/d\xi}{(\xi - u)^{1/2}} \quad (135)$$

Řešení této rovnice je:

$$G(\xi) - G(\xi_\odot) = \frac{-2}{\pi} \int_{\xi_\odot}^{\xi} du \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} \quad (136)$$

a po vrácení proměnné r odvodíme implicitní rovnici pro rychlost zvuku $r(c_s)$:

$$r = r_\odot \exp \left(\frac{-2}{\pi} \int_{\xi_\odot}^{\xi} du \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} \right) \quad (137)$$

Rovnice se dá invertovat jednoznačně, protože $c_s(r)$ je monotónní funkce. Takto odvozená rychlost zvuku souhlasí s modelem Slunce v oblasti $r > 0,4R_\odot$ a má okolo $r \approx 0,7R_\odot$ „hrb“, který koresponduje s hranicí konvektivní zóny. Ve větších hloubkách se inverze s modelem Slunce neshoduje kvůli malému počtu vln, které do této hloubky pronikají a s jejich obtížným měřením.

7.2.2 Perturbace modelu

Cílem inverzních metod je odvodit vylepšení modelu Slunce, které minimalizuje rozdíl mezi odvozenými a pozorovanými frekvencemi oscilací. Budeme předpokládat pouze perturbace rychlosti zvuku δc_s , která vyvolá perturbaci pozorované frekvence $\delta\omega$. Navíc předpokládáme, že obě perturbace jsou malé. Rozvoj rovnice (132) podle $\frac{\delta c_s}{c_s}$ a podle $\frac{\delta\omega}{\omega}$ by v takovém případě měl být shodný.

Rovnici (132) zapíšeme obecně s perturbacemi ve tvaru:

$$\pi(n + \alpha) = \int_{r_1}^{R_\odot} dr \left[\frac{(\omega + \delta\omega)^2}{(c_s + \delta c_s)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} \quad (138)$$

Nejprve položíme $\delta c_s = 0$ a uděláme rozvoj integrandu ve frekvencích:

$$\begin{aligned} \left[\frac{(\omega + \delta\omega)^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} &= \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \\ &= \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 + \frac{2\delta\omega}{\omega} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\omega\delta\omega}{c_s^2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 + \frac{\frac{2\omega\delta\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right)^{1/2} = \\ &A = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (139)$$

$$= A \left(1 + \frac{\frac{\omega\delta\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right) = A + \frac{\frac{\omega\delta\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2}} = A + \frac{\delta\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (140)$$

V druhém případě položíme $\delta\omega = 0$ a rozvineme integrand podle poruchy rychlosti zvuku:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\omega^2}{(c_s + \delta c_s)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} &= \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta c_s}{c_s} \right)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 - \frac{2\delta c_s}{c_s} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \\ &= \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\omega^2 \delta c_s}{c_s^3} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 - \frac{\frac{2\omega^2 \delta c_s}{c_s^3}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right)^{1/2} = A \left(1 - \frac{\frac{\omega^2 \delta c_s}{c_s^3}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right) \\ &A - \frac{\frac{\omega^2 \delta c_s}{c_s^3} \frac{1}{c_s}}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2}} = A - \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (141)$$

Výsledky rovnic (140) a (141) musíme porovnávat pod integrálem. A se odečte:

$$\int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} = - \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (142)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} = - \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (143)$$

Z pozorování známe $\frac{\delta\omega}{\omega}$, cílem je odvodit $\frac{\delta c_s}{c_s}$. Integrál na levé straně označíme τ . Má význam neporušeného cestovního času vlny. Část $\frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2}$ označíme $K_{\frac{\delta c_s}{c_s}}$ a nazveme ho citlivostním jádrem pro poruchu $\delta c_s/c_s$. Citlivostní jádro kvantifikuje perturbaci cestovního času referenčního modelu Slunce za přítomnosti dané poruchy modelu (v tomto případě poruchy rychlosti zvuku). Je to jeden ze vstupů do inverzní úlohy a výhodou je, že se dá z modelu předpočítat, což inverzi velmi urychlí. Podobným způsobem se mohou počítat citlivostní jádra i pro jiné poruchy referenčního modelu. Celý integrál na pravé straně má význam průměrné perturbace rychlosti zvuku podél paprsku. Celkem získáváme tvar:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{1}{\tau} \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta c_s}{c_s} K_{\frac{\delta c_s}{c_s}} \quad (144)$$

Zbývá ukázat, že τ je skutečně neporušený cestovní čas vlny (p modu se zanedbáním ω_c). Odvodíme i trajektorii vlny (v paprskové aproximaci). Trasu paprsku $\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ můžeme rozložit na radiální $\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk_r}$ a úhlovou $r \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dk_h}$ část. Z radiální části vyjádříme dt a budeme integrovat přes trajektorii paprsku.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{d}{dk_r} \left(c_s \sqrt{k_r^2 + k_h^2} \right) = c_s \frac{k_r}{\sqrt{k_r^2 + k_h^2}} = \frac{c_s^2 k_r}{\omega} \quad (145)$$

$$dt = \frac{\omega}{c_s^2 k_r} dr = dr \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2}} = dr \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2}} = \frac{dr}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (146)$$

$$\tau = \int_{r_t}^{R_\odot} dt = \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{dr}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (147)$$

Zbývá určit, jak se mění úhel θ s hloubkou. Výraz $r \frac{d\theta}{dr}$ upravíme následujícím způsobem:

$$r \frac{d\theta}{dr} = r \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{d\omega}{dk_r} / \frac{d\omega}{dk_h} = \frac{k_r}{k_h} = \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (148)$$

7.3 Přímé metody

7.3.1 Seismický poloměr

Jednoduchým výpočtem můžeme z disperzní relace pro f mod odvodit poloměr Slunce, protože $\omega(l)$ známe z pozorování.

$$\omega^2 = g k_h = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot} \quad (149)$$

Takto odvozený poloměr se od skutečného liší asi o 0,3 Mm. To je způsobeno zejména špatným modelem podpovrchové konvekce a faktem, že jsme při odvozování disperzní relace pro f mody zanedbali vnější síly.

7.3.2 Výpočet citlivostních jader

Alternativní výpočet citlivostních jader Citlivostní jádra se dají počítat i z cestovních časů. Mějme

$$\tau = \int_{r_t}^{R_\odot} dr \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2}, \quad (150)$$

kde c_s je funkcí všech nezávislých perturbovaných veličin q_α indexovaných α . Z pozorovaných radiálních rychlostí $\Phi(x, y, t)$ si nejprve pomocí vhodného filtru $F(\omega, k)$ vybereme vlny, které budeme chtít studovat. Nejčastější jsou hřebínkové filtry, které izolují jednotlivé mody a fázově-rychlostní filtry, které filtrují mody se spodním odrazným bodem ve stejné hloubce. Výsledná dále zpracovávaná data $\psi(\omega, k) = \Phi(\omega, k) F(\omega, k)$ se využívají pro odvozování „pozorovaných“ cestovních časů. Nechť x_1 a x_2 jsou dva různé body na povrchu Slunce. Z bodu x_1 putuje vlna pod povrchem a v bodě x_2 se znovu vynoří na povrchu. Tam vyvolá patřičnou odezvu. Jako cestovní čas je označen takový čas τ , který maximalizuje kros-korelační funkci $C(x_1, x_2, \tau)$ definovanou jako

$$C(x_1, x_2, \tau) = \int_0^T dt' \psi(x_1, t') \psi(x_2, t' + \tau), \quad (151)$$

kde T je celková doba pozorování. Následnou minimalizací rozdílu „pozorovaného“ a modelem spočteného cestovní času pro všechna pozorování indexované a dojdeme k jinému vztahu pro citlivostní jádra:

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \sum_a (\tau_a - \tau_a^{\text{obs}})^2 \quad (152)$$

$$\delta\chi^2 = \sum_a (\tau_a - \tau_a^{\text{obs}}) \frac{\delta\tau_a}{\delta q^\alpha} \delta q^\alpha = 0 \quad (153)$$

Právě výraz $\frac{\delta\tau_a}{\delta q^\alpha}$ můžeme označit za citlivostní jádro pro perturbaci q^α .

Obecná rovnice pro výpočet citlivostních jader Pro formální odvození obecných rovnic popisujících citlivostní jádra si nejprve odvodíme obecnou lineární perturbaci disperzní relace. Kvadráty frekvencí jsou vlastní čísla funkcí q_α , takže obecná disperzní relace je zadána rovnicí

$$\omega^2 q_\alpha = \mathfrak{L}(q_\alpha), \quad (154)$$

kde \mathfrak{L} je formální zápis pro lineární operátor rovnic stavby. Rovnici vynásobíme q_α^* a vyintegrujeme přes objem Slunce:

$$\omega^2 = \frac{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* \mathfrak{L}(q_\alpha)}{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* q_\alpha} \quad (155)$$

Porucha parametrů q_α se přes operátor rovnic stavby promítne v poruchu ω^2 . Pro opravu prvního řádu nahradíme $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + \delta\omega^2$ a $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1$. Pro „poruchy nultého řádu“ budeme předpokládat, že splňují neporušené rovnice. Potom rovnice prvního řádu bude ve tvaru:

$$\delta\omega^2 = \frac{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* \mathfrak{L}_1(q_\alpha)}{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* q_\alpha} = 2\omega\delta\omega \quad (156)$$

Lineární operátor \mathfrak{L}_1 v sobě zahrnuje poruchy všech parametrů q_α a lze je od sebe odseparovat. Rovnici (156) ještě vydělíme $2\omega^2$:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \left(K_{\frac{\delta\rho}{\rho}} \frac{\delta\rho}{\rho} + K_{\frac{\delta c_s^2}{c_s^2}} \frac{\delta c_s^2}{c_s^2} + K_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dots \right) \quad (157)$$

Nesmíme zapomenout, že jsme se omezili jen na lineární poruchy a například magnetické pole je při libovolné nenulové intenzitě nelineární porucha.

Jak ale vlastně citlivostní jádra počítat? Vezměme si dva vektory nezávislých parametrů (například hustotu, rychlost zvuku a zastoupení helia, rychlosti toků plazmatu) \mathbf{x} a \mathbf{Y} . Tyto vektory jsou spolu svázány rovnicemi stavby (zde zapsané pomocí hermitovské matice A):

$$A\mathbf{x} = \mathbf{Y} \quad (158)$$

Již ale víme, že platí

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \mathbf{K}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} \rangle, \quad (159)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{Y} = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{Y} \rangle, \quad (160)$$

kde jsme formálně zavedli středování přes objem Slunce. Rovnici (158) nejprve zprava vynásobme $\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}$ a poté vystředujeme:

$$\langle \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} A\mathbf{x} \rangle = \langle A^* \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \rangle \quad (161)$$

Z porovnání posledních dvou výrazů plyne $A^* \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{K}_{\mathbf{x}}$. Neboli rovnice popisující citlivostní jádra jsou hermitovsky sdružené rovnicím stavby.

7.4 Inverzní metody

7.4.1 Time-distance

Obecněji můžeme rovnici pro cestovní čas a pozorování a zapsat takto:

$$\tau^a(r) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P K_{\beta}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) q^{\beta}(\mathbf{r}', z) + n^a(\mathbf{r}) \quad (162)$$

kde \mathbf{r}' je horizontální polohový vektor, z vertikální složka polohového vektoru, P počet perturbovaných parametrů, a indexuje uvažované geometrie šíření vln a $n^a(\mathbf{r})$ náhodný šum, který se dá odhadnout z mnoha pozorování. Rovnici diferencujeme a tím předepíšeme tvar pro perturbaci cestovního času (citlivostní jádro v perturbované rovnici již není kompletní, ale linearizované):

$$\delta\tau^a(r) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P K_{\beta}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \delta q^{\beta}(\mathbf{r}', z) + n^a(\mathbf{r}) \quad (163)$$

Poruchu cestovního času známe díky porovnání s modelem, ke kterému chceme hledat vylepšení, a ve kterém jsou zároveň počítána citlivostní jádra. Existují dvě hlavní metody, jak z této rovnice odvodit parametry $\delta q^\beta(\mathbf{r}', z)$, které nás zajímají.

RLS (Regularised Least-Squares) Metoda RLS spočívá ve fitování parametrů $\delta q^\beta(\mathbf{r}', z)$ v rovnici (163). Cílem je minimalizovat rozdíl pozorovaných a modelem spočtených cestovních časů za současného potlačení nepřirozených řešení (tzv. regularizace). Celkem se hledá minimum χ^2 vůči δq^α ve tvaru

$$\chi^2 = \sum_a \frac{1}{\sigma_a^2} \left[\delta\tau^a - \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) \right]^2 + \mu L(\delta q^\alpha), \quad (164)$$

kde L je regularizační operátor, kterým můžeme potlačovat nefyzikální vlastnosti řešení a μ je uživatelem na základě zkušenosti volený parametr, který zvyšuje nebo snižuje význam regularizace. Výhodou této metody je malá časová náročnost inverze. Metoda ale není dostatečně robustní.

SOLA (Subtractive Optimally Localised Averaging) Metoda SOLA je zejména pro větší datové sady časově náročnější než RLS, avšak jejím výsledkem jsou lépe lokalizovaná a snadněji interpretovatelná průměrovací jádra a nižší míra systematických chyb, způsobená špatnou lokalizací průměrovacích jader okolo zkoumané oblasti. SOLA hledá řešení (163) v bodě (\mathbf{r}_0, z_0) ve tvaru konvoluce neznámých váhových funkcí w a porušeného cestovního času. Za $\delta\tau^a$ dosadíme z rovnice (163):

$$\delta q^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) = \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) \delta\tau^a(\mathbf{r}_i) \quad (165)$$

$$\begin{aligned} \delta q^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, z) \right] \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) \\ &+ \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (166)$$

Člen $[\cdot]$ označíme $\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0)$ a nazveme ho průměrovací jádro. Jeho významem je citlivost metody na změnu parametru δq^α při změně parametru δq^β jako funkce polohy. V ideálním případě je průměrovací jádro úměrné delta funkci. Rovnici (166) ještě rozdělíme na člen $\beta = \alpha$ a členy $\beta \neq \alpha$:

$$\delta q^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) + \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \delta q^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) \delta q^\alpha(\mathbf{r}', z) + \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta \neq \alpha} \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) \\ &+ \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (168)$$

Funkce w se odvozují z minimalizace χ^2 ve tvaru:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \mathcal{T}(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \mu \sum_{i, j, a, b} w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0) \Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j, z_0) \\ &+ \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \epsilon \sum_{a, i} [w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0)]^2 + \sum_{\beta} \lambda^\beta \left[\int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\beta^\alpha \right] \end{aligned} \quad (169)$$

V této rovnici je $\mathcal{T}(\mathbf{r}', z, z_0)$ uživatelem volená funkce (cílová funkce), která je lokalizovaná kolem vyšetřovaného místa, jinde je nulová (nejčastěji gaussian), μ , ν a ϵ jsou (podobně jako u RLS) volené kompromisní parametry, které potlačují nefyzikální řešení (typicky se napočítá celá řada modelů pro různé hodnoty μ , ν a ϵ z nichž se následně vybere nejlepší kombinace) a $\Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \text{cov}[n^a(\mathbf{r}_i), n^b(\mathbf{r}_j)]$ je šumová kovarianční matice. Do rovnice (169) se navíc přidávají normalizační podmínky $\forall \beta : \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) = \delta_\beta^\alpha$ připojené pomocí

Lagrangeových multiplikátorů λ^β .

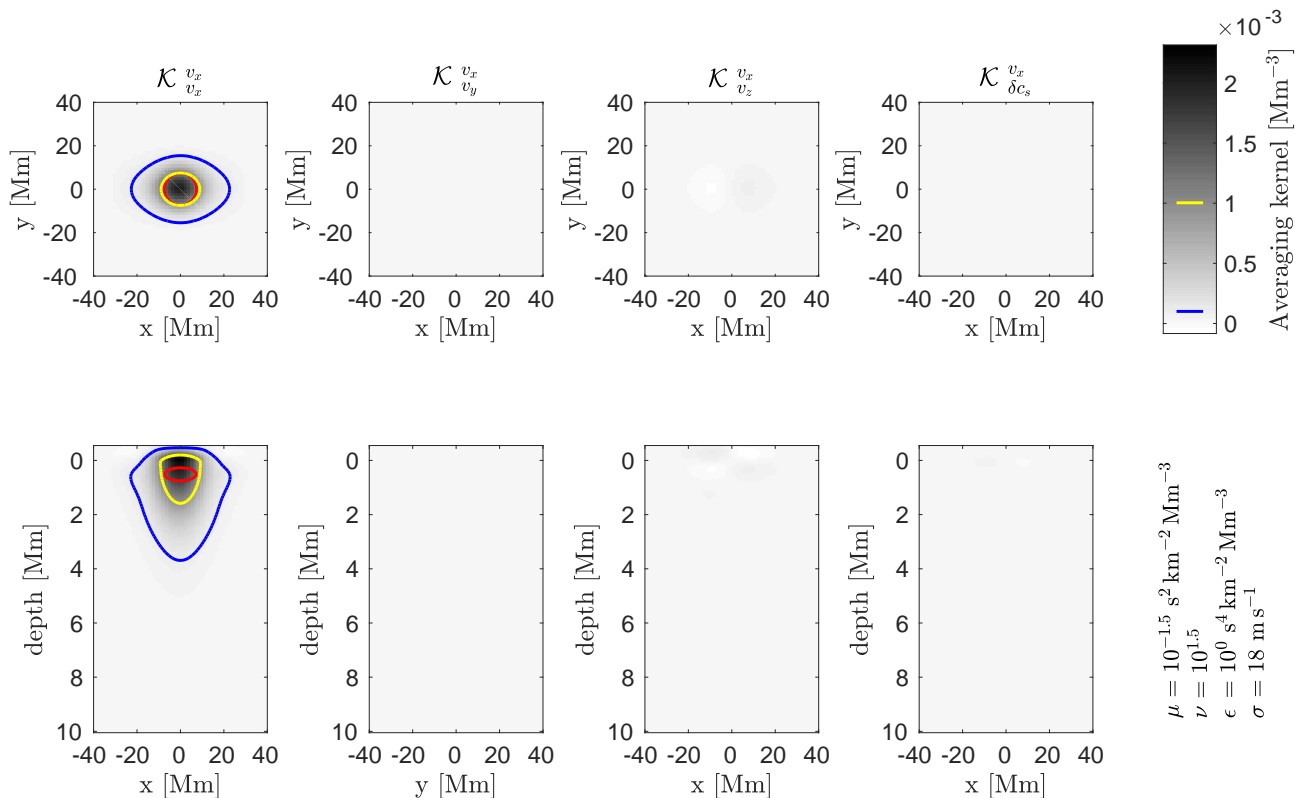
První člen v rovnici (169) má význam odchylky průměrovacího jádra od cílové funkce (tzv. misfit), člen úměrný μ minimalizuje příspěvek náhodného šumu, člen úměrný ν minimalizuje tzv. cross-talk. To jsou nechtěné

příspěvky do hodnoty δq^α z hodnoty δq^β (například nechceme, aby se část rychlosti toků plazmatu přičetla k rychlosti zvuku). Poslední člen úměrný ϵ má za úkol lokalizovat váhové funkce okolo počátku souřadnic.

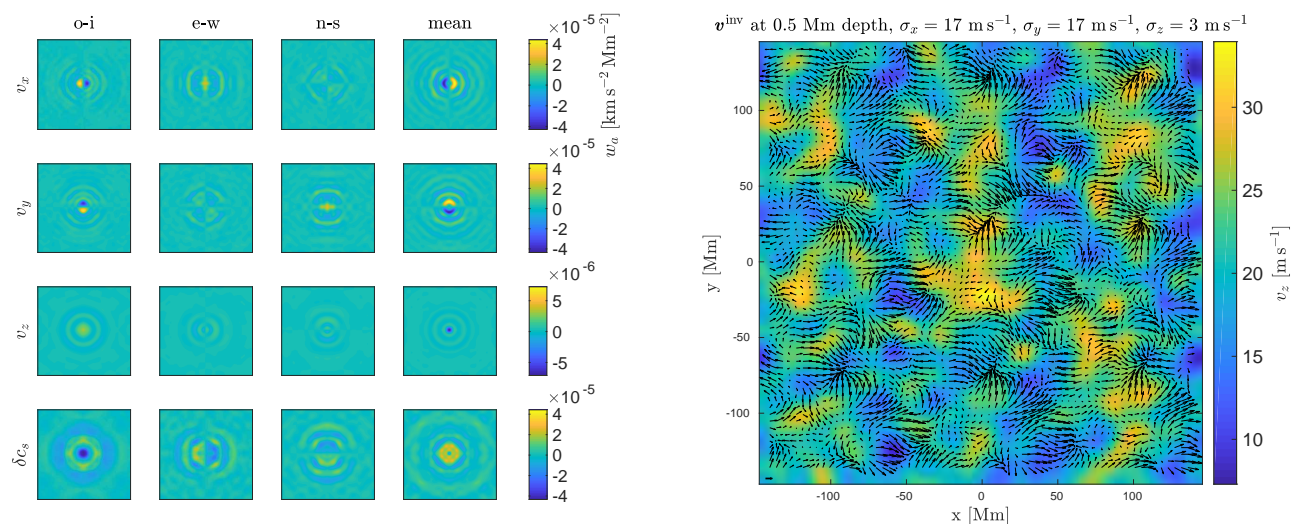
Hledá se minimum χ^2 vůči w_a^α a Lagrangeovu multiplikátorům λ^β . Výhodou je využití planparalelní geometrie a řešení inverze ve Fourierově prostoru. Výsledkem inverze jsou váhové funkce. Jejich aplikací na rovnici (165) odvodíme kýžené poruchy referenčního modelu.

Na obrázku 3 můžete vidět příklad inverze pro složku x vektoru rychlosti podpovrchových toků v hloubce 0,5 Mm. Ve ve stupni šedi zobrazeno průměrovací jádro. Červená křivka je 50 % maximální hodnoty cílové funkce, žlutá křivka je 50 % maximální hodnoty průměrovacího jádra v hloubce 0,5 Mm, a modrá respektive zelená je plus respektive minus 5 % maximální hodnoty průměrovacích jádra v hloubce 0,5 Mm. V horním řádku je zobrazen řez 3D průměrovacím jádrem v hloubce 0,5 Mm pod povrchem, ve spodním řádku naopak řez kolmo na osu symetrie. V prvním sloupci je zobrazen hlavní příspěvek do misfitu (tj. kvalita nařizování průměrovacího jádra na cílovou funkci). V ostatních sloupcích vidíme příspěvek cross-talku. Cross-talk mezi v_x a všemi ostatními veličinami je zanedbatelný. V „cross-talkových“ sloupcích je cílová funkce identicky nulová, tyto hodnoty jsou tedy také součástí misfitu. Na obrázku můžete také vidět hodnoty použitých kompromisních parametrů pro tuto inverzi a chybu výsledné veličiny.

Na obrázku 4 vlevo jsou zobrazeny váhové funkce w^α pro vektor toků a poruchu rychlosti zvuku. První a poslední sloupec popisují všesměrovou citlivost na přítomnost vln, druhý sloupec na vlny ve směru východ-západ a třetí sloupec na vlny ve směru sever-jih. V pravé části obrázku je zobrazena mapa rychlostních polí v hloubce 0,5 Mm, v okolí rovníku a mimo aktivní oblasti. Barevná mapa koresponduje s vertikální rychlostí, šipky pak s horizontální rychlostí. Referenční šipky v levém spodním rohu odpovídá horizontální rychlosti 250 m/s. Pokud bychom vykreslili pouze oscilace vertikální rychlosti, byla by patrná silná divergence horizontálních toků ve stoupavých proudech a silná konvergence horizontálních toků v klesajících proudech. Po přidání střední hodnoty vertikální rychlosti to již tak patrné není. Stále ale platí, že divergentní horizontální toky se objevují tam, kde je vertikální rychlost vyšší a konvergentní toky tam, kde je vertikální rychlost nižší. Chyby jednotlivých inverzí jsou uvažovány při cestovních časech průměrovaných po 24 hodin.



Obrázek 3: Příklad inverze složky x rychlosti toků v hloubce 0,5 Mm. Ve stupni šedi zobrazeno průměrovací jádro. Červená křivka je 50 % maximální hodnoty cílové funkce, žlutá křivka je 50 % maximální hodnoty průměrovacího jádra v cílové hloubce, a modrá respektive zelená je plus respektive minus 5 % maximální hodnoty průměrovacích jádra v cílové hloubce. V horním řádku je zobrazen řez 3D průměrovacím jádrem v cílové hloubce, ve spodním řádku řez kolmo na osu symetrie.



Obrázek 4: **Levá část:** Příklad váhových funkcí pro jednotlivé inverze. První a poslední sloupec popisují všesměrovou citlivost na přítomnost vln, druhý sloupec na vlny ve směru východ-západ a třetí sloupec na vlny ve směru sever-jih. **Pravá část:** Mapa rychlostních polí v hloubce 0,5 Mm, v okolí rovníku a mimo aktivní oblasti. Barevná mapa koresponduje s vertikální rychlostí, šipky pak s horizontální rychlostí. Referenční šipky v levém spodním rohu odpovídá horizontální rychlosti 250 m/s. Uvedené chyby jsou za předpokladu cestovních časů průměrovaných 24 hodin.