

6 Oscilace

6.1 Výkonové spektrum

lokální studium \rightarrow zanedbáváme zakřivení povrchu \rightarrow planoparalelní geometrie \rightarrow rozklad signálu $\Phi(x, y, t)$ (radiální rychlost, intenzita, ...) do Fourierovských komponent

$$\Phi(k_x, k_y, \omega) = \iiint dx dy dt \Phi(x, y, t) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (1)$$

globální studium \rightarrow zanedbáváme zakřivení povrchu \rightarrow rozklad do báze kulových funkcí Y_l^m (funkce $P_l^m(\theta, \phi)$ jsou Legendreovy polynomy)

$$\Phi(l, m, \omega) = \iiint d\theta d\phi dt \Phi(\theta, \phi, t) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t) \quad (2)$$

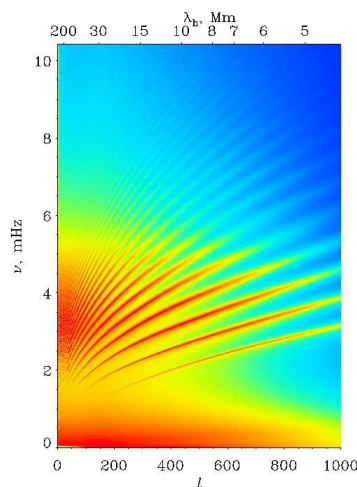
$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \exp(im\phi) P_l^m(\cos\theta) \quad (3)$$

Výkonové spektrum P je z definice rovno

$$P(k_x, k_y, \omega) = \Phi(k_x, k_y, \omega) \Phi^*(k_x, k_y, \omega), \quad (4)$$

$$P(l, m, \omega) = \Phi(l, m, \omega) \Phi^*(l, m, \omega). \quad (5)$$

- rezonance ve výkonovém spektru svědčí o **stojatém vlnění** (viz Obrázek 1)
- oscilace **generované poruchami tlaku** způsobené turbulentní konvekcí
- rezonance korespondují odspoda s f modem a dále zvukovými p mody
- signál na nízkých frekvencích odpovídá konvekcí, v těchto frekvencích bychom pozorovali gravitační g mody vln
- u modů s nízkým l se pozoruje velká a malá separace: velká je citlivá na střední hustotu, malá na rychlost zvuku v blízkosti jádra, množství vodíku v blízkosti jádra, věk hvězdy
- typická frekvence oscilací 2,5-4,5 mHz (**5 minut**)
- frekvence vyšší než 5,3 mHz se neodrážejí zpět pod povrch, ale unikají do atmosféry
- vlny nám poskytují integrální **informaci** o podmínkách **podél trajektorie vlny**
- sférická symetrie $\rightarrow P \neq P(m)$
- pozorujeme jen polokouli, na ní nejsou kulové funkce ortogonální \rightarrow vznikají falešné mody



Obrázek 1: Výkonové spektrum oscilací Slunce.

6.2 Vzorkovací teorém

Předpokládejme spojitý 2D signál $f(x, y)$, který budeme vzorkovat. Jak husté musí být vzorkování reprezentované polem delta funkcí $s(x, y)$ s kroky Δx a Δy

$$s(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y), \quad (6)$$

abychom neztráceli informaci (tj. byli schopni přesně zrekonstruovat původní spojitou funkci)? Vzorkovaný signál $d(x, y)$ je roven

$$d(x, y) = f(x, y) s(x, y). \quad (7)$$

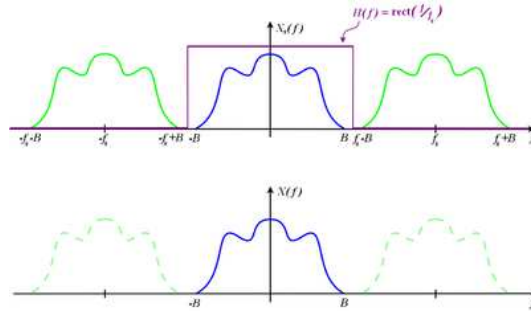
Převedením do Fourierova prostoru (odpovídající veličiny budou značeny velkými písmeny) a využitím konvolučního a škálovacího teorému dostáváme pro vzorkovaný signál $D(u, v)$ a pole delta funkcí $S(u, v)$:

$$D(u, v) = F(u, v) * S(u, v) \quad (8)$$

$$S(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - i\frac{1}{\Delta x}, v - j\frac{1}{\Delta y}\right) \quad (9)$$

Grafická podoba $D(u, v)$ je taková, že v bodech, které jsou vzdáleny $\frac{1}{\Delta x}$ ve směru x a $\frac{1}{\Delta y}$ ve směru y je umístěna $F(u, v)$ (viz Obrázek 2). Následným vyříznutím obdélníkovou funkcí $H(u, v)$ (funkce nabývá hodnoty 1 kolem jednoho spektra, jinde je 0) získáme z $D(u, v)$ funkci $F(u, v)$. Inverzní Fourierovou transformací (IFT) obdržíme celou spojitou funkci $f(x, y)$. V reálném prostoru koresponduje s inverzní Fourierovou transformací interpolace. Neboli

$$f(u, v) = \text{IFT}[D(u, v) H(u, v)] = d(x, y) * h(x, y). \quad (10)$$



Obrázek 2: Funkce $D(u, v)$, modře jedno spektrum $F(u, v)$, fialově obdélníková funkce $H(u, v)$.

To nám mimo jiné říká, že **ideální interpolace je konvoluce vzorkovaného signálu s inverzní Fourierovou transformací obdélníkové funkce (tzv. sinc funkce, $\sin x/x$)**. Pokud má ale funkce omezený nosič/spektrum v reálném/Fourierově prostoru, bude mít neomezené spektrum/nosič ve Fourierově/reálném prostoru. Proto se k interpolaci nepoužívá sinc, která má neomezený nosič (v důsledku toho se v interpolaci libovolného bodu musí do výpočtu zahrnout všechny vzorkované body $d(x, y)$), ale funkce jí podobné s omezeným nosičem.

Tento postup nelze aplikovat vždy. Hlavním problémem je překryv funkcí $F(u, v)$ ve funkci $D(u, v)$. Pokud má $F(u, v)$ omezené spektrum ($f(u, v)$ má neomezený nosič), dá se tento problém vyřešit hustším vzorkováním daným **Nyquistovými nerovnicemi**. Pro vyříznutí pouze jednoho spektra musí platit:

$$\frac{1}{\Delta x} \geq 2W_u \quad (11)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \geq 2W_v \quad (12)$$

$$\Delta x \leq \frac{1}{2W_u} \quad (13)$$

$$\Delta y \leq \frac{1}{2W_v} \quad (14)$$

kde W_u a W_v jsou suprema frekvencí $F(u, v)$. Pokud $F(u, v)$ nemá omezené spektrum (libovolná fotka), budou se spektra překrývat vždy. Vyříznutím jednoho spektra $F(u, v)$ současně vyřízneme i část sousedního spektra

$F(u, v)$, čímž vznikají falešné frekvence (**aliasing**) a ztrácíme informaci o vysokofrekvenčním signálu (detaily, hrany). Problému se dá zabránit za cenu oříznutí vysokých frekvencí $F(u, v)$ tak, aby se při daném vzorkování již nepřekrývaly (ořezává se ještě před Fourierovou transformací $f(x, y)$).

Stejně vztahy jako v prostorové oblasti platí i mezi časem a frekvencí. Nejvyšší frekvenci, kterou můžeme s daným vzorkováním Δt pozorovat, tzv. **Nyquistova frekvence** je rovna $\nu_{Ny} = \frac{1}{2\Delta t} = \nu_{obs}/2$. Všechny **vyšší frekvence se vzorkují do nižších** (aliasing). Konkrétně o co je frekvence vyšší než Nyquistova $\nu = \nu_{Ny} + \delta\nu$, o to se tato frekvence bude vzorkovat do nižších frekvencí $\nu = \nu_{Ny} - \delta\nu$. Přesněji:

$$\nu = \nu_{Ny} + \delta\nu = \nu_{obs}/2 + \delta\nu \rightarrow \delta\nu = \nu - \nu_{obs}/2 \quad (15)$$

$$\nu_{alias} = \nu_{obs}/2 - \delta\nu \rightarrow \nu_{alias} = \nu_{obs} - \nu \quad (16)$$

Se započítáním násobných frekvencí, které se v signálu také vyskytují (viz Obrázek 3) můžeme všechny aliasy popsat rovnicemi

$$\nu_{alias} = |(N+1)\nu_{obs} - \nu|, \quad N \in \mathbb{N} \quad (17)$$

$$\nu_{alias} = |N\nu_{obs} + \nu|, \quad N \in \mathbb{N} \quad (18)$$

$$(19)$$

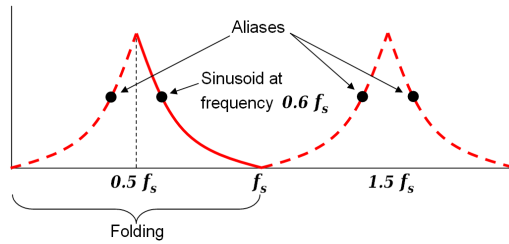
nebo jejich kombinací

$$\nu_{alias} = |N\nu_{obs} - \nu|, \quad N \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

V intervalu $[0; \nu_{Ny}]$ existuje právě jeden (klasický) alias s $N = \text{int}\left(\frac{\nu}{\nu_{obs}} + 0,5\right)$, kde funkce $\text{int}(x)$ vrací celou část čísla x :

$$\nu_{alias} = \left| \text{int}\left(\frac{\nu}{\nu_{obs}} + 0,5\right) \nu_{obs} - \nu \right| \quad (21)$$

Výslednou frekvence odpovídá situaci, kdy se pozorovaná frekvence ν „odrazí“ od hranice $\nu = \nu_{Ny}$ a pokračuje dále k nule, následně se „odrazí“ od hranice $\nu = 0$ zpět a tak dále až „procestuje vzdálenost rovnou původní frekvenci ν “ a skončí na $\nu = \nu_{alias}$.



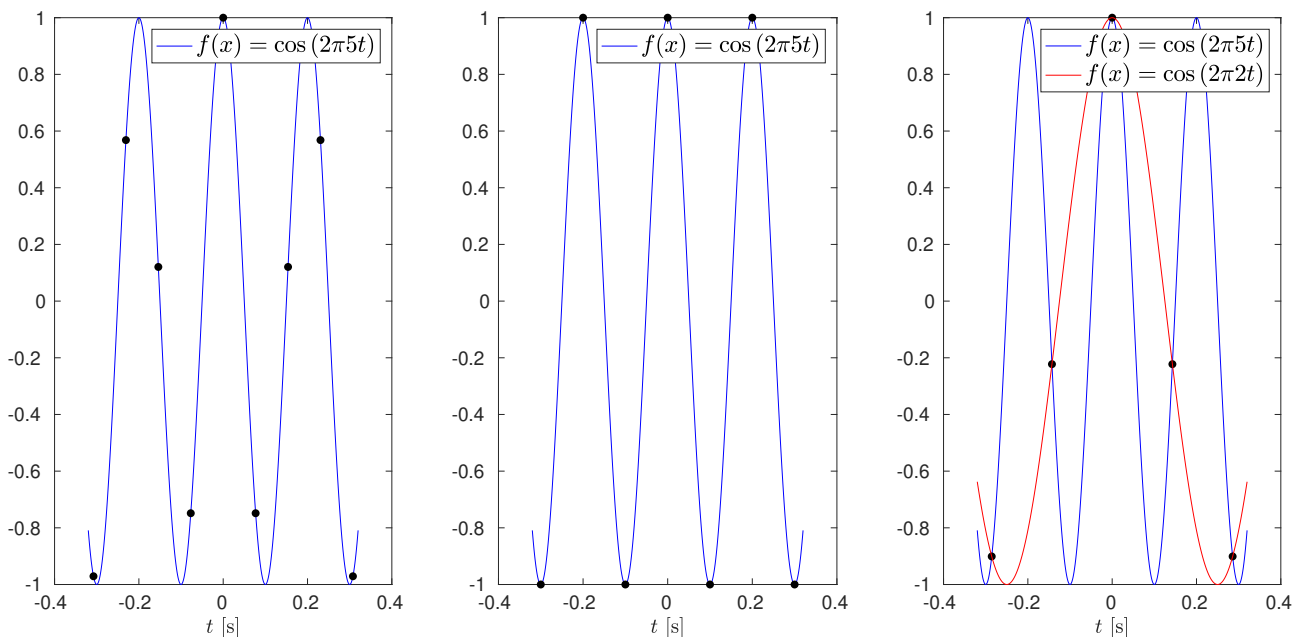
Obrázek 3: Vzorkování frekvencí vyšších než Nyquistova.

Pokud budeme pozorovat po dobu T , bude nejnižší frekvence, kterou rozlišíme $\Delta\nu = \frac{1}{T}$. Ta se dá „libovolně“ snižovat delšími pozorovacími řadami.

Na obrázku 4 jsou vykresleny případy, kdy je vzorkování vyšší než Nyquistovo ($13\times$ za sekundu), právě Nyquistovo ($10\times$ za sekundu) a nižší než Nyquistovo ($7\times$ za sekundu). V prvních dvou případech jsme schopni z diskrétní funkce přesně zrekonstruovat původní funkci. Ve třetím případě se nám v důsledku nedostatečného vzorkování jeví frekvence změny nižší. Konkrétně pozorovaná frekvence je 5 Hz, frekvence vzorkování je pouze 7 Hz (Nyquistova frekvence je $7/2 = 3,5$ Hz), takže se nám původní frekvence vzorkuje do frekvence $\left| \text{int}\left(\frac{5}{7} + 0,5\right) 7 - 5 \right| = 2$ Hz.

6.3 Základní mod oscilací

Základním modem oscilací budeme rozumět vlnu šířící se rychlostí zvuku c_s a mající vlnovou délku rovnou průměru Slunce $\lambda = 2R_\odot$. Dále budeme předpokládat adiabatickou aproximaci a pokusíme se odhadnout časovou



Obrázek 4: **Vlevo:** Nyquistova frekvence vyšší než pozorovaná. **Uprostřed:** Nyquistova frekvence je právě rovna pozorované frekvenci. **Vpravo:** Nyquistova frekvence o 1,5 Hz nižší než pozorovaná. Pozorovaná frekvence se vzorkuje na frekvenci 2 Hz.

škálu průchodu vlny Sluncem tam a zpět. Rychlost zvuku můžeme spočítat z rovnice

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}}, \quad (22)$$

kde \bar{P} a $\bar{\rho}$ jsou střední hodnota tlaku a střední hodnota hustoty. Pro střední hodnotu hustoty platí:

$$\bar{\rho} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_\odot}{R_\odot^3} \quad (23)$$

Střední hodnotu tlaku odhadneme z rovnice hydrostatické rovnováhy, kterou hrubě diskretizujeme (povrch - střed):

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4} \Rightarrow \frac{0 - \bar{P}}{M_\odot - 0} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4} \Rightarrow \bar{P} = \frac{GM_\odot^2}{4\pi R_\odot^4} \quad (24)$$

Čas průchodu vlny τ spočítáme z rovnice:

$$\tau = 2 \frac{\lambda}{c_s} = \frac{4R_\odot}{\sqrt{\frac{\gamma G}{3} \frac{M_\odot}{R_\odot}}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma \pi}} (G\rho)^{-1/2} \quad (25)$$

Pokud dosadíme, vyjde zhruba 45 minut. Reálné časy jsou okolo 15 minut, protože rychlost zvuku směrem do centra roste.

6.4 Lineární adiabatické oscilace nerotujícího Slunce

6.4.1 Předpoklady a základní rovnice

Předpoklady:

- poruchy (indexované čárkou) jsou malé vůči pozadovým hodnotám (indexované nulou)
- lineární aproximace: $v' \ll c_s$
- adiabatické přiblížení: $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{konst.}$
- sféricky symetrické pozadí, $\rho_0 = \rho_0(r)$, $P_0 = P_0(r)$
- zanedbáváme magnetická pole, tenzor napětí, rotaci

- stacionární pozadí, $\mathbf{v}_0 = 0$

Řešené rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (26)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \nabla \Phi \rho \quad (27)$$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{konst.} \quad (28)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (29)$$

Dále víme, že $\nabla \Phi_0 = g \mathbf{e}_r$ je gravitační zrychlení. Na stavovou rovnici aplikujeme úplnou časovou derivaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = \frac{dP}{dt} \frac{1}{\rho^\gamma} - P \gamma \frac{1}{\rho^{\gamma+1}} \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{dP}{dt} - P \gamma \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{1}{\rho^\gamma} = 0 \quad (30)$$

Navíc $c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$. Celkem dostáváme:

$$\frac{dP}{dt} = c_s^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (31)$$

Do rovnic zavedeme Eulerovské perturbace (čárkované) ρ' , $\mathbf{v}' = \frac{d\xi}{dt}$ (ξ_r je výchylka od střední hodnoty v radiálním směru), P' a Φ' . S Lagrangeovými perturbacemi (δ) souvisí vztahem

$$\delta A = A' + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) A_0 = A' + \xi_r \cdot \frac{\partial A_0}{\partial r}. \quad (32)$$

6.4.2 Linearizace rovnic a Cowlingova aproximace

Hustotu, tlak, rychlost a gravitační potenciál si rozdělíme na pozadovou hodnotu a poruchu. Budeme předpokládat, že pozadové hodnoty splňují rovnice (26)–(29).

Linearizace rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \right) = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) = \nabla \cdot \left(\boldsymbol{\xi} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot [\boldsymbol{\xi} \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0)] \quad (35)$$

Poslední rovnice je ale ve skutečnosti rovna nule, protože jsme předpokládali $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ (popřípadě $\mathbf{v}_0 = 0$). Rovnici integrujeme přes libovolný čas T . Aby byla splněna pro libovolný čas, musí platit

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) = 0. \quad (36)$$

Linearizace ostatních rovnic je triviální. Stavovou rovnici však máme zapsanou pomocí úplných derivací, tedy Lagrangeových poruch. Pomocí převodního vztahu mezi Lagrangeovými a Eulerovskými poruchami (32) a integrací přes libovolný čas odvodíme požadovaný tvar. Linearizované rovnice nabývají tvaru:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (37)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' - \nabla \Phi' \rho_0 - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (38)$$

$$P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (39)$$

$$\Delta \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (40)$$

Pro zjednodušení rovnic budeme předpokládat, že malé poruchy způsobené vlnami mají za následek pouze **zanedbatelné poruchy gravitačního pole** (Cowlingova aproximace). Tím fakticky škrtneme Poissonovu rovnici a jeden ze členů v pohybové rovnici. Tímto zjednodušením se dopouštíme odchylky jen několika jednotek procent od řešení plných rovnic.

Zbylé rovnice převedeme do sférických souřadnic. Například $\boldsymbol{\xi} = \xi_r \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\xi}_h$. Při lokálním přístupu složka r koresponduje se složkou z a složka h se složkami x a y . V dalších úpravách budeme potřebovat operátor divergence ve sférických souřadnicích (úhlovou část nemusíme rozepisovat):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r} \nabla_h \cdot \mathbf{A}_h \quad (41)$$

Hydrodynamické rovnice převedeme do sférických souřadnic, pohybovou rovnici rozdělíme na radiální a úhlovou část a ze stavové rovnice vyjádříme ρ' :

$$\rho' + \nabla_r \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}_r) + \frac{1}{r} \nabla_h \cdot (\rho_0 \boldsymbol{\xi}_h) = 0 \quad (42)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h = 0 \quad (43)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (44)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} \right) = -\nabla_r P' - \frac{1}{r} \nabla_h P' - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (45)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (46)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (47)$$

$$P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (48)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \quad (49)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (50)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \left(\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (51)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho_0}{g} g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (52)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho_0}{g} N^2 \quad (53)$$

N^2 v posledním vztahu je Brunt-Väisälöva frekvence. Z teorie směřovací délky víme, že

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{\text{ad}} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right], \quad (54)$$

ale pro adiabatické přiblížení můžeme za $\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{\text{ad}}$ dosadit $\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r}$. Tím dostáváme

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln P_0}{\partial r} - \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} \right). \quad (55)$$

Celkem máme nyní k řešení 4 rovnice:

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \boldsymbol{\xi}_h = 0 \quad (56)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (57)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (58)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \xi_r \quad (59)$$

Řešení budeme hledat ve tvaru $\xi_r \propto \exp(-i\omega t)$, $\xi_h \propto \exp(-i\omega t)$, čímž obdržíme soustavu rovnic:

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \xi_h = 0 \quad (60)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g\rho' \quad (61)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (62)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \xi_r \quad (63)$$

6.4.3 Řešení v separovaném tvaru

Řešení budeme hledat v následujícím separovaném tvaru:

$$\rho'(r, \theta, \phi) = \rho'(r) f(\theta, \phi), \quad (64)$$

$$P'(r, \theta, \phi) = P'(r) f(\theta, \phi), \quad (65)$$

$$\xi_r(r, \theta, \phi) = \xi_r(r) f(\theta, \phi), \quad (66)$$

$$\xi_h(r, \theta, \phi) = \xi_h(r) \nabla_h f(\theta, \phi), \quad (67)$$

kde $f(\theta, \phi)$ je neznámá funkce úhlových souřadnic. Navíc budeme předpokládat regulární řešení na pólech. Po jednoduchém dosazení (64)–(67) do (60)–(63) se budeme zajímat nejprve o rovnici kontinuity:

$$\left[\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) \right] f(\theta, \phi) + \frac{\rho_0}{r} \xi_h \Delta_h f(\theta, \phi) = 0 \quad (68)$$

Pokud budeme hledat řešení v separovaném tvaru, musíme z rovnice vykrátit $f(\theta, \phi)$. Takže musí být splněna rovnice

$$\Delta_h f(\theta, \phi) = \alpha f(\theta, \phi), \quad (69)$$

kde α je konstanta. Vlastní funkce úhlové části Laplaceova operátoru jsou kulové funkce a vlastními čísly jsou $-l(l+1)$. Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích můžeme formálně zapsat jako $\Delta = \Delta_r + \Delta'_h = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_h$. Po dosazení do rovnice (69) dostáváme vztah pro velikost horizontálního vlnového vektoru k_h :

$$\Delta_h Y_l^m(\theta, \phi, t) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (70)$$

$$r^2 \Delta'_h Y_l^m(\theta, \phi, t) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (71)$$

Budeme předpokládat lokální přístup, kdy můžeme zanedbat zakřivení povrchu a vlastní funkce Laplaceova operátoru jsou imaginární exponenciály (přechod od kulových funkcí k Fourierově bázi). Neboly:

$$r^2 i^2 (k_x^2 + k_y^2) = -l(l+1) \quad (72)$$

$$k_h^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (73)$$

$$\boxed{k_h = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}} \quad (74)$$

Z horizontální části pohybové rovnice vyjádříme ξ_h a dosadíme spolu se stavovou rovnicí do (68):

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (75)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h \nabla_h f(\theta, \phi) = -\frac{P'}{r} \nabla_h f(\theta, \phi) \quad (76)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{P'}{r} \quad (77)$$

$$\xi_h = \frac{P'}{\omega^2 \rho_0 r} \quad (78)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho_0 \xi_r) - \frac{l(l+1) \rho_0}{r} \xi_h = 0 \quad (79)$$

$$\rho' + \frac{2}{r} \rho_0 \xi_r + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \xi_r + \rho_0 \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} P' = 0 \quad (80)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2 \frac{\xi_r}{r} + \xi_r \left(\frac{N^2}{g} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left[1 - \frac{l(l+1) c_s^2}{r^2 \omega^2} \right] = 0 \quad (81)$$

$$\frac{N^2}{g} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} \quad (82)$$

Navíc předpokládáme, že pozadí je v hydrostatické rovnováze, tj. že platí

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} = -g \rho_0. \quad (83)$$

Pro zjednodušení podoby rovnic zavedeme **Lambovu frekvenci** $S_l^2 = \frac{l(l+1) c_s^2}{r^2}$. Výsledný tvar rovnice (81) má podobu:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2 \frac{\xi_r}{r} - \frac{\xi_r g}{c_s^2} + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (84)$$

V další aproximaci budeme předpokládat **lokální přístup**, kdy se r ani ξ_r příliš nemění a jejich podíl můžeme vůči derivaci ξ_r podle r zanedbat (ekvivalentně předpokládáme, že $\lambda \ll r$).

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r g}{c_s^2} + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (85)$$

Zbývá ještě upravit radiální část pohybové rovnice. Do té dosadíme stavovou rovnici (63).

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (86)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{g P'}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (87)$$

Pro řešení navíc budeme předpokládat následující okrajové podmínky:

$$\xi(r=0) = 0 \quad (88)$$

$$\delta P(r=R_\odot) = 0 \quad (89)$$

První z nich je podmínka stabilního středu Slunce, druhá říká, že nejsou žádné externí síly (například atmosféra). Rovnici (89) upravíme a dosadíme za poruchu tlaku z rovnice (78):

$$\delta P = P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = P' - \xi_r g \rho_0 = 0, \quad (90)$$

$$\omega^2 \rho_0 r \xi_h = g \rho_0 \xi_r, \quad (91)$$

$$\frac{\xi_h}{\xi_r} = \frac{g}{\omega^2 r}. \quad (92)$$

6.4.4 JWKB řešení (Jeffreys–Wentzel–Kramers–Brillouin)

Řešení rovnic (85) a (87) můžeme v lokálním přístupu, kdy předpokládáme, že v rámci oscilací se mění zejména hustota hledat ve tvaru tzv. JWKB aproximace:

$$\xi_r = A \rho_0^{-1/2} \exp(ik_r r), \quad (93)$$

$$P' = B \rho_0^{1/2} \exp(ik_r r), \quad (94)$$

kde A , B a k_r jsou konstanty (k_r se mění pomalu s r). Po dosazení do rovnice (85) a jejím následné vynásobení $\rho_0^{1/2}$ dostáváme:

$$A \left(ik_r \rho_0^{-1/2} - \frac{1}{2} \rho_0^{-3/2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) - \frac{g}{c_s^2} A \rho_0^{-1/2} + \frac{B \rho_0^{1/2}}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (95)$$

$$A \left(ik_r - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{g}{c_s^2} \right) + \frac{B}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (96)$$

Označme $\boxed{\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{-1}{H_\rho}}$ **hustotní škálu**. Výsledná rovnice přejde na tvar:

$$A \left[ik_r + \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] + \frac{B}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (97)$$

Podobně upravíme i rovnici (87):

$$B \left(ik_r \rho_0^{1/2} + \frac{1}{2} \rho_0^{-1/2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) + \frac{g}{c_s^2} \rho_0^{1/2} B + \rho_0 A \rho_0^{-1/2} (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (98)$$

$$A (N^2 - \omega^2) + B \left[ik_r - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] = 0 \quad (99)$$

Hledáme netriviální řešení pro A a B . Determinant matice tvořené rovnicemi (97) a (99) musí být 0.

$$\left[ik_r + \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] \left[ik_r - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] - \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} \right) (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (100)$$

Křížové členy v hranatých závorkách se odečtou, cílem bude vyjádření k_r^2 z této disperzní relace:

$$-k_r^2 - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right)^2 - \frac{N^2 - \omega^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (101)$$

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - N^2 - \frac{c_s^2}{4H_\rho^2} - \frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_\rho}}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2). \quad (102)$$

Zbývá upravit N^2 :

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) = g \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{1}{H_\rho} \right) = g \left(\frac{-g}{c_s^2} + \frac{1}{H_\rho} \right) = -\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_\rho} \quad (103)$$

Zavedeme **akustickou hraniční frekvenci** $\boxed{\omega_c^2 = \frac{c_s^2}{4H_\rho^2}}$. Ta u povrchu nabývá hodnoty přibližně 5,3 mHz (viz Obrázek 1). Finální tvar rovnice (102):

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2). \quad (104)$$

Z tvaru, v jakém jsme hledali řešení navíc vidíme, že pro $k_r^2 < 0$ se bude porucha exponenciálně utlumovat, pro $k_r^2 > 0$ se porucha bude šířit ve tvaru vlny.

6.4.5 Disperzní relace pro p a g mody

P mody (zvukové vlny) se mohou v závislosti na S_l šířit velmi hluboko do zóny zářivé rovnováhy. Nicméně tyto mody (s nízkým S_l) se obtížně pozorují. Pro mody šířící se pouze v konvektivní zóně můžeme v rovnici (104) zanedbat N^2 oproti ω^2 . Rovnice se zjednoduší na tvar:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{c_s^2} \quad (105)$$

$$\frac{S_l^2}{c_s^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} = k_h^2 \quad (106)$$

$$k_r^2 c_s^2 = \omega^2 - \omega_c^2 - k_h^2 c_s^2 \quad (107)$$

$$k^2 = k_r^2 + k_h^2 \quad (108)$$

$$\boxed{\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 c_s^2} \quad (109)$$

Vlna se šíří pod povrchem a díky rostoucí rychlosti zvuku směrem k centru se lomí od kolmice. Ve spodním odrazném bodě nastává úplný odraz. Pro spodní odrazný bod r_1 platí $k_r = 0$, protože v místě odrazu se vlna

nešíří v radiálním směru. Ve větších hloubkách navíc platí, že ω_c^2 můžeme zanedbat vůči ω^2 . Neboli:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) = 0, \quad (110)$$

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{L^2}{\omega^2 r_1^2} (N^2 - \omega^2) = 0, \quad (111)$$

$$r_1^2 = \frac{L^2 c_s^2 \omega^2 - N^2}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_c^2)}, \quad (112)$$

$$r_1 = \frac{L c_s}{\omega}, \quad (113)$$

$$\frac{\omega}{L} = \frac{c_s(r_1)}{r_1}, \quad (114)$$

kde jsme označili $L = \sqrt{l(l+1)}$. Pro horní odrazný bod r_2 můžeme naopak zanedbat S_l oproti ω_c a platí $\omega = \omega_c \propto H_\rho^{-2}$. Šířit se mohou jen vlny, splňující $\omega \geq \omega_c$. Vzhledem ke strmému poklesu hustoty směrem k povrchu můžeme pro zjednodušení požadovat $r_2 = R_\odot$.

Na rozdíl od p modů se g mody (gravitační mody) nešíří v konvektivní zóně, ale jen ve vrstvě zářivé rovnováhy. Tam můžeme zanedbat ω^2 oproti S_l^2 a rovnice (104) se zjednoduší na tvar:

$$k_r^2 = \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) - \frac{\omega_c^2}{c_s^2} \quad (115)$$

$$k_r^2 = k_h^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{\omega_c^2}{c_s^2} \quad (116)$$

$$k_r^2 = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} - k_h^2 - \frac{\omega_c^2}{c_s^2} \quad (117)$$

$$k^2 + \frac{\omega_c^2}{c_s^2} = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} \quad (118)$$

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k^2 + \frac{\omega_c^2}{c_s^2}} \quad (119)$$

$$\boxed{\omega^2 = N^2 \cos^2 \theta} \quad (120)$$

V poslední rovnici jsme si vybrali jen ty vlny, kde $k^2 \gg \frac{\omega_c^2}{c_s^2}$ a označily θ úhel mezi horizontálním vlnovým vektorem a celkovým vlnovým vektorem. Díky $\cos^2 \theta$ se tyto mody šíří **hlavně horizontálně**.

6.4.6 Disperzní relace pro f mod

F mody jsou gravitační mody šířící se na povrchu. Analogicky vlnám na vodní hladině (a dalším typům povrchových vln) budeme proto předpokládat volný povrch, $\delta P = 0$. Pro odvození disperzní relace budeme vycházet z rovnic (85), (87) a (32). Pro obecnost nejprve nebudeme pokládat $\delta P = 0$. Z rovnice (32) vyjádříme (s využitím hydrostatické rovnováhy pozadí) P' :

$$P' = \delta P + \xi_r \rho_0 g \quad (121)$$

Tento výsledek dosadíme do rovnic (85) a (87).

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{g \xi_r}{c_s^2} + \frac{\delta P}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) + \frac{g \xi_r}{c_s^2} - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r^2 \omega^2} = 0 \quad (122)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\delta P}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r^2 \omega^2} = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \rho_0 g + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{g \delta P}{c_s^2} + \frac{\xi_r g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (124)$$

Z rovnic vyloučíme $\frac{\partial \xi_r}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g^2 \rho_0 l (l+1)}{r^2 \omega^2} \xi_r - \frac{g \delta P}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ + \frac{g \delta P}{c_s^2} + \xi_r \frac{g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g^2 \rho_0 l (l+1)}{r^2 \omega^2} \xi_r + \frac{g \delta P}{c_s^2} \frac{S_l^2}{\omega^2} + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ + \xi_r \frac{g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (126)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{gl(l+1)}{\omega^2 r^2} \delta P + \xi_r \frac{g \rho_0}{r} \left[\frac{r N^2}{g} - \frac{r \omega^2}{g} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{gr}{c_s^2} + \frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} \right] = 0 \quad (127)$$

$$\frac{N^2}{g} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_0 c_s^2} g \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = -\frac{g}{c_s^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \quad (128)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{gl(l+1)}{\omega^2 r^2} \delta P + \xi_r \frac{g \rho_0}{r} \left[\frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} - \frac{r \omega^2}{g} \right] = 0 \quad (129)$$

Tato rovnice se dá splnit pro $\delta P = 0$ a $\left[\frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} - \frac{r \omega^2}{g} \right] = 0$. Disperzní relace pro f mod nabývá tvaru:

$$\frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} = \frac{r \omega^2}{g} \quad (130)$$

$$\omega^4 = \frac{g^2}{r^2} l(l+1) \quad (131)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{r} \sqrt{l(l+1)} \quad (132)$$

$$\boxed{\omega^2 = k_h g} \quad (133)$$

Dosazením tohoto řešení do (123) spolu s podmínkou $\delta P = 0$ odvodíme řešení pro ξ_r :

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r gl(l+1)}{rg \sqrt{l(l+1)}} = 0 \quad (134)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \xi_r = 0 \quad (135)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - k_h \xi_r = 0 \quad (136)$$

Tato rovnice má exponenciální řešení ve tvaru

$$\xi_r \propto \exp[-k_h (R_\odot - r)], \quad (137)$$

ze kterého je patrný rychlý pokles s hloubkou. Jde tedy skutečně o povrchový mod.

7 Helioseismologie

7.1 Rezonance a Duvallův zákon

Rezonanční podmínka pro stojaté vlny mezi odraznými body r_1 a r_2 se dá zapsat ve tvaru

$$\int_{r_1}^{r_2} dr k_r = \pi (n + \alpha), \quad (138)$$

kde n je řád vlny a α fázová změna při odrazu. Ta závisí pouze na vlastnostech prostředí. Speciálně pro p mody s vysokými frekvencemi, pro které můžeme zanedbat ω_c dostáváme:

$$\pi (n + \alpha) = \int_{r_1}^{R_\odot} dr \omega \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (139)$$

$$F(\omega) = \frac{\pi (n + \alpha)}{\omega} = \int_{r_1}^{R_\odot} dr \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2 \omega^2} \right)^{1/2} \quad (140)$$

Spodní odrazný bod závisí podle vztahu (114) pouze na poměru $\frac{\omega}{L}$. Stejně tak integrand závisí pouze na poměru $\frac{\omega}{L}$. Celkově se obecná 2D disperzní relace $\omega = \omega(n, l)$ rozpadá na 1D disperzní relaci mezi poměry $\frac{\omega}{L}$ a $\frac{n + \alpha}{\omega}$. Tato skutečnost je známá jako Duvallův zákon. Platí přibližně pro $l < 250$ s hodnotou $\alpha \approx 1,5$. Jinými slovy při uhádnutí správné konstanty α můžeme rezonanční frekvence p modů popsat jedinou funkcí. Zároveň nám hodnota α napovídá o vlastnostech v okolí místa odrazu vlny.

7.2 Inverzní úlohy

7.2.1 Inverze rychlosti zvuku

Rychlost zvuku v závislosti na r můžeme odvodit přímo z rovnice (140). Zavedme substituce $u = \frac{L^2}{\omega^2}$ a $\xi = \frac{r^2}{c_s^2}$:

$$F(\omega) = \frac{\pi(n + \alpha)}{\omega} = \int_u^{\xi_\odot} d\xi (\xi - u)^{1/2} \frac{d \ln r}{d\xi}, \quad (141)$$

kde jsme označili $\xi_\odot = \xi(R_\odot)$. Po zavedení funkce $G = \ln r$ přejde integrál na Abelův:

$$F(\omega) = \frac{\pi(n + \alpha)}{\omega} = \int_u^{\xi_\odot} d\xi (\xi - u)^{1/2} \frac{dG}{d\xi}, \quad (142)$$

který má analytické řešení. Zderivujeme rovnici podle u :

$$-2 \frac{dF(u)}{du} = \int_u^{\xi_\odot} d\xi \frac{dG/d\xi}{(\xi - u)^{1/2}} \quad (143)$$

Řešení této rovnice je:

$$G(\xi) - G(\xi_\odot) = \frac{-2}{\pi} \int_{\xi_\odot}^{\xi} du \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} \quad (144)$$

a po vrácení proměnné r odvodíme implicitní rovnici pro rychlost zvuku $r(c_s)$:

$$r = r_\odot \exp \left(\frac{-2}{\pi} \int_{\xi_\odot}^{\xi} du \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} \right) \quad (145)$$

Rovnice se dá invertovat jednoznačně, protože $c_s(r)$ je monotónní funkce. Takto odvozená rychlost zvuku souhlasí s modelem Slunce v oblasti $r > 0,4R_\odot$ a má okolo $r \approx 0,7R_\odot$ „hrb“, který koresponduje s hranicí konvektivní zóny. Ve větších hloubkách se inverze s modelem Slunce neshoduje kvůli malému počtu vln, které do této hloubky pronikají a jejich obtížným měřením.

7.2.2 Perturbace modelu

Cílem inverzních metod je odvodit vylepšení modelu Slunce, které minimalizuje rozdíl mezi odvozenými a pozorovanými frekvencemi oscilací. Budeme předpokládat pouze perturbace rychlosti zvuku δc_s , která vyvolá perturbaci pozorované frekvence $\delta \omega$. Navíc předpokládáme, že obě perturbace jsou malé. Rozvoj rovnice (140) podle $\frac{\delta c_s}{c_s}$ a podle $\frac{\delta \omega}{\omega}$ by v takovém případě měl být shodný.

Rovnici (140) zapíšeme obecně s perturbacemi ve tvaru:

$$\pi(n + \alpha) = \int_{r_1}^{R_\odot} dr \left[\frac{(\omega + \delta \omega)^2}{(c_s + \delta c_s)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} \quad (146)$$

Nejprve položíme $\delta c_s = 0$ a uděláme rozvoj integrandu ve frekvencích:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(\omega + \delta\omega)^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \\ & = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 + \frac{2\delta\omega}{\omega} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\omega\delta\omega}{c_s^2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 + \frac{\frac{2\omega\delta\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right)^{1/2} = \\ & A = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (147)$$

$$= A \left(1 + \frac{\frac{\omega\delta\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right) = A + \frac{\frac{\omega\delta\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2}} = A + \frac{\delta\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (148)$$

V druhém případě položíme $\delta\omega = 0$ a rozvineme integrand podle poruchy rychlosti zvuku:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\omega^2}{(c_s + \delta c_s)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta c_s}{c_s} \right)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 - \frac{2\delta c_s}{c_s} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \\ & = \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\omega^2 \delta c_s}{c_s^3} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 - \frac{\frac{2\omega^2 \delta c_s}{c_s^3}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right)^{1/2} = A \left(1 - \frac{\frac{\omega^2 \delta c_s}{c_s^3}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right) \\ & A - \frac{\frac{\omega^2 \delta c_s}{c_s^3} \frac{1}{c_s}}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2}} = A - \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (149)$$

Výsledky rovnic (148) a (149) musíme porovnávat pod integrálem. A se odečte:

$$\int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} = - \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (150)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} = - \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (151)$$

Z pozorování známe $\frac{\delta\omega}{\omega}$, cílem je odvodit $\frac{\delta c_s}{c_s}$. Integrál na levé straně označíme τ . Má význam neporušeného cestovního času vlny. Část $\frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2}$ označíme $K_{\frac{\delta c_s}{c_s}}$ a nazveme ho **citlivostním jádrem** pro poruchu $\delta c_s/c_s$. Citlivostní jádro kvantifikuje perturbaci cestovního času referenčního modelu Slunce za přítomnosti dané poruchy modelu (v tomto případě poruchy rychlosti zvuku). Je to jeden ze vstupů do inverzní úlohy a výhodou je, že se dá z modelu předpočítat, což inverzi velmi urychlí. Podobným způsobem se mohou počítat citlivostní jádra i pro jiné poruchy referenčního modelu. Celý integrál na pravé straně má význam **průměrné perturbace rychlosti zvuku podél paprsku**. Celkem získáváme tvar:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = - \frac{1}{\tau} \int_{r_1}^{R_\odot} dr \frac{\delta c_s}{c_s} K_{\frac{\delta c_s}{c_s}} \quad (152)$$

Zbývá ukázat, že τ je skutečně neporušený cestovní čas vlny (p modu se zanedbáním ωc). Odvodíme i trajektorii vlny (v paprskové aproximaci). Trasu paprsku $\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ můžeme rozložit na radiální $\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk_r}$

a úhlovou $r \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dk_h}$ část. Z radiální části vyjádříme dt a budeme integrovat přes trajektorii paprsku.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{d}{dk_r} \left(c_s \sqrt{k_r^2 + k_h^2} \right) = c_s \frac{k_r}{\sqrt{k_r^2 + k_h^2}} = \frac{c_s^2 k_r}{\omega} \quad (153)$$

$$dt = \frac{\omega}{c_s^2} \frac{dr}{k_r} = dr \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2}} = dr \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2}} = \frac{dr}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (154)$$

$$\tau = \int_{r_t}^{R_\odot} dt = \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{dr}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (155)$$

Zbývá určit, jak se mění úhel θ s hloubkou. Výraz $r \frac{d\theta}{dr}$ upravíme následujícím způsobem:

$$r \frac{d\theta}{dr} = r \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{d\omega}{dk_h} / \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{k_h}{k_r} = \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (156)$$

7.3 Přímé metody

7.3.1 Seismický poloměr

Jednoduchým výpočtem můžeme z disperzní relace pro f mod odvodit poloměr Slunce, protože $\omega(l)$ známe z pozorování.

$$\omega^2 = gk_h = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot} \quad (157)$$

Takto odvozený poloměr se od skutečného liší asi o 0,3 Mm. To je způsobeno zejména špatným modelem podpovrchové konvekce a faktem, že jsme při odvozování disperzní relace pro f mody zanedbali vnější síly.

7.3.2 Výpočet citlivostních jader

Alternativní výpočet citlivostních jader Citlivostní jádra se dají počítat i z cestovních časů. Mějme

$$\tau = \int_{r_t}^{R_\odot} dr \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2}, \quad (158)$$

kde c_s je funkcí všech nezávislých perturbovaných veličin q_α indexovaných α . Z pozorovaných radiálních rychlostí $\Phi(x, y, t)$ si nejprve pomocí vhodného filtru $F(\omega, k)$ vybereme vlny, které budeme chtít studovat. Nejčastější jsou hřebenové filtry, které izolují jednotlivé mody a fázově–rychlostní filtry, které filtrují mody se spodním odrazným bodem ve stejné hloubce. Výsledná dále zpracovávaná data $\psi(\omega, k) = \Phi(\omega, k) F(\omega, k)$ se využívají pro odvozování „pozorovaných“ cestovních časů. Nechť x_1 a x_2 jsou dva různé body na povrchu Slunce. Z bodu x_1 putuje vlna pod povrchem a v bodě x_2 se znovu vynoří na povrchu. Tam vyvolá patřičnou odezvu. Jako cestovní čas je označen takový čas τ , který maximalizuje kros-korelační funkci $C(x_1, x_2, \tau)$ definovanou jako

$$C(x_1, x_2, \tau) = \int_0^T dt' \psi(x_1, t') \psi(x_2, t' + \tau), \quad (159)$$

kde T je celková doba pozorování. Následnou minimalizací rozdílu „pozorovaného“ a modelem spočteného cestovní času pro všechna pozorování indexované a dojdeme k jinému vztahu pro citlivostní jádra:

$$\chi^2 = \sum_a (\tau_a - \tau_a^{\text{obs}})^2 \quad (160)$$

$$\delta\chi^2 = 2 \sum_a (\tau_a - \tau_a^{\text{obs}}) \frac{\delta\tau_a}{\delta q^\alpha} \delta q^\alpha = 0 \quad (161)$$

Právě výraz $\frac{\delta\tau_a}{\delta q^\alpha}$ můžeme označit za citlivostní jádro pro perturbaci q^α .

Obecná rovnice pro výpočet citlivostních jader Pro formální odvození obecných rovnic popisujících citlivostní jádra si nejprve odvodíme obecnou lineární perturbaci disperzní relace. Kvadráty frekvencí jsou vlastní čísla funkcí q_α , takže obecná disperzní relace je zadána rovnicí

$$\omega^2 q_\alpha = \mathfrak{L}(q_\alpha), \quad (162)$$

kde \mathfrak{L} je formální zápis pro lineární operátor rovnic stavby. Rovnici vynásobíme q_α^* a vyintegrujeme přes objem Slunce:

$$\omega^2 = \frac{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* \mathfrak{L}(q_\alpha)}{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* q_\alpha} \quad (163)$$

Porucha parametrů q_α se přes operátor rovnic stavby promítne v poruchu ω^2 . Pro opravu prvního řádu nahradíme $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + \delta\omega^2$ a $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1$. Pro „poruchy nultého řádu“ budeme předpokládat, že splňují neporušené rovnice. Potom rovnice prvního řádu bude ve tvaru:

$$\delta\omega^2 = \frac{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* \mathfrak{L}_1(q_\alpha)}{\int_{\odot} d^3r q_\alpha^* q_\alpha} = 2\omega\delta\omega \quad (164)$$

Lineární operátor \mathfrak{L}_1 v sobě zahrnuje poruchy všech parametrů q_α a lze je od sebe odseparovat. Rovnici (164) ještě vydělíme $2\omega^2$:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \left(K_{\frac{\delta\rho}{\rho}} \frac{\delta\rho}{\rho} + K_{\frac{\delta c_s}{c_s}} \frac{\delta c_s}{c_s} + K_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dots \right) \quad (165)$$

Nesmíme zapomenout, že jsme se omezili jen na lineární poruchy a například magnetické pole je při libovolné nenulové intenzitě nelineární porucha.

Jak citlivostní jádra přepočítat mezi sebou? Vezměme si dva vektory nezávislých parametrů (například hustotu, rychlost zvuku a zastoupení helia, rychlosti toků plazmatu) \mathbf{x} a \mathbf{Y} . Tyto vektory jsou spolu svázané rovnicemi stavby (zde zapsané pomocí hermitovské matice A):

$$A\mathbf{x} = \mathbf{Y} \quad (166)$$

Například rovnice (37) - (40) mají následující maticovou podobu:

$$\begin{bmatrix} 1 & \nabla \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g\mathbf{e}_r & 0 & \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} & \nabla & \rho_0 \nabla & 0 \\ -c_s^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial P_0}{\partial r} - c_s^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ -4\pi G & 0 & 0 & 0 & \Delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho_0 \boldsymbol{\xi} \\ \mathbf{v}' \\ P' \\ \Phi' \\ \xi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (167)$$

Již ale víme, že platí

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \mathbf{K}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} \rangle, \quad (168)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{Y} = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{Y} \rangle, \quad (169)$$

kde jsme formálně zavedli středování přes objem Slunce. Rovnici (166) nejprve zleva vynásobme $\mathbf{K}_{\mathbf{Y}}$ a poté vystředujeme:

$$\langle \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} A\mathbf{x} \rangle = \langle A^* \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{K}_{\mathbf{x}} \mathbf{x} \rangle \quad (170)$$

Z porovnání posledních dvou výrazů plyne $A^* \mathbf{K}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{K}_{\mathbf{x}}$. Neboli rovnice popisující citlivostní jádra jsou hermitovsky sdružené rovnicím stavby.

7.4 Inverzní metody

7.4.1 Time-distance

Obecně můžeme rovnici pro porušený cestovní čas $\delta\tau^a(\mathbf{r})$ zapsat takto:

$$\delta\tau^a(\mathbf{r}) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P K_{\beta}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \delta q^{\beta}(\mathbf{r}', z) + n^a(\mathbf{r}) \quad (171)$$

kde \mathbf{r} a \mathbf{r}' jsou horizontální polohové vektory, z vertikální složka polohového vektoru, P počet perturbovaných parametrů, a indexuje uvažované geometrie šíření vln a $n^a(\mathbf{r})$ náhodný šum, který se dá odhadnout z mnoha pozorování.

Poruchu cestovního času známe díky porovnání s modelem, ke kterému chceme hledat vylepšení, a ve kterém jsou zároveň počítána citlivostní jádra. Existují dvě hlavní metody, jak z této rovnice odvodit parametry $\delta q^\beta(\mathbf{r}', z)$, které nás zajímají.

RLS (Regularised Least-Squares) Metoda RLS spočívá ve fitování parametrů $\delta q^\beta(\mathbf{r}', z)$ v rovnici (171). Cílem je **minimalizovat rozdíl** pozorovaných a modelem spočtených **cestovních časů** za současného potlačení nepřirozených řešení (tzv. regularizace). Celkem se hledá minimum χ^2 vůči δq^α ve tvaru

$$\chi^2 = \sum_a \frac{1}{\sigma_a^2} \left[\delta\tau^a - \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) \right]^2 + \mu L(\delta q^\alpha), \quad (172)$$

kde L je regularizační operátor, kterým můžeme potlačovat nefyzikální vlastnosti řešení (obvyklá volba je například Laplaceův operátor, který potlačuje nespojitosti) a μ je uživatelem na základě zkušenosti volený parametr, který zvyšuje nebo snižuje význam regularizace. **Výsledkem inverze je porucha** δq^α . Výhodou této metody je malá časová náročnost inverze. Metoda ale není dostatečně robustní a má malou citlivost mimo povrchové vrstvy.

SOLA (Subtractive Optimally Localised Averaging) Metoda SOLA je zejména pro větší datové sady časově náročnější než RLS, avšak jejím výsledkem jsou lépe lokalizovaná a snadněji interpretovatelná průměrovací jádra a nižší míra systematických chyb, způsobená špatnou lokalizací průměrovacích jader okolo zkoumané oblasti. SOLA hledá **přibližné** řešení rovnice (171) v bodě (\mathbf{r}_0, z_0) ve tvaru korelace neznámých váhových funkcí w a porušeného cestovního času. Za $\delta\tau^a$ dosadíme z rovnice (171):

$$\delta q_{\text{inv}}^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) = \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) \delta\tau^a(\mathbf{r}_i) \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \delta q_{\text{inv}}^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, z) \right] \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) \\ &+ \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (174)$$

Člen $[\cdot]$ označíme $\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0)$ a nazveme ho **průměrovací jádro**. Popisuje citlivost inverze a příspěvky z jednotlivých δq^β do výsledného $\delta q_{\text{inv}}^\alpha$ jako funkci polohy (obdobu korelační matice). V ideálním případě je průměrovací jádro úměrné delta funkci. Rovnici (174) ještě rozdělíme na člen $\beta = \alpha$ a členy $\beta \neq \alpha$:

$$\delta q_{\text{inv}}^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) + \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \quad (175)$$

$$\begin{aligned} \delta q_{\text{inv}}^\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) \delta q^\alpha(\mathbf{r}', z) + \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta \neq \alpha} \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) \delta q^\beta(\mathbf{r}', z) \\ &+ \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (176)$$

Funkce w se odvozují z minimalizace χ^2 ve tvaru:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \mathcal{T}(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \mu \sum_{i, j, a, b} w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0) \Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j, z_0) \\ &+ \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \epsilon \sum_{a, i} [w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0)]^2 + \sum_{\beta} \lambda^\beta \left[\int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\beta^\alpha \right] \end{aligned} \quad (177)$$

V této rovnici je $\mathcal{T}(\mathbf{r}', z, z_0)$ uživatelem **volená funkce** (cílová funkce), která je **lokalizovaná kolem vyšetřovaného místa**, jinde je nulová (nejčastěji gausián), μ, ν a ϵ jsou (podobně jako u RLS) volené kompromisní parametry, které potlačují nefyzikální řešení (typicky se napočítá celá řada modelů pro různé hodnoty μ, ν a ϵ z nichž se následně vybere nejlepší kombinace) a $\Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \text{cov}[n^a(\mathbf{r}_i), n^b(\mathbf{r}_j)]$ je šumová kovarianční

matice. Do rovnice (177) se navíc přidávají normalizační podmínky $\forall \beta : \int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) = \delta_\beta^\alpha$ připojené pomocí Lagrangeových multiplikátorů λ^β .

První člen v rovnici (177) má význam odchylky průměrovacího jádra od cílové funkce (tzv. misfit), člen úměrný μ minimalizuje příspěvek náhodného šumu, člen úměrný ν minimalizuje tzv. cross-talk. To jsou nechtěné příspěvky do hodnoty $\delta q_{\text{inv}}^\alpha$ z hodnoty δq^β (například nechceme, aby se část rychlosti toků plazmatu přičetla k rychlosti zvuku). Poslední člen úměrný ϵ má za úkol lokalizovat váhové funkce okolo počátku souřadnic.

Hledá se minimum χ^2 vůči w_a^α a Lagrangeovým multiplikátorům λ^β . Výhodou je využití planparalelní geometrie a řešení inverze ve Fourierově prostoru. **Výsledkem inverze jsou váhové funkce.** Jejich aplikací na rovnici (173) odvodíme kýžené poruchy referenčního modelu.

Na obrázku 5 můžete vidět příklad inverze pro složku x vektoru rychlosti podpovrchových toků v hloubce 0,5 Mm. Ve ve stupni šedi zobrazeno průměrovací jádro. Červená křivka je 50 % maximální hodnoty cílové funkce, žlutá křivka je 50 % maximální hodnoty průměrovacího jádra v hloubce 0,5 Mm, a modrá respektive zelená je plus respektive minus 5 % maximální hodnoty průměrovacích jádra v hloubce 0,5 Mm. V horním řádku je zobrazen řez 3D průměrovacím jádrem v hloubce 0,5 Mm pod povrchem, ve spodním řádku naopak řez kolmo na osu symetrie. V prvním sloupci je zobrazen hlavní příspěvek do misfitu (tj. kvalita naftování průměrovacího jádra na cílovou funkci). V ostatních sloupcích vidíme příspěvek cross-talku. Cross-talk mezi v_x a všemi ostatními veličinami je zanedbatelný. V „cross-talkových“ sloupcích je cílová funkce identicky nulová, tyto hodnoty jsou tedy také součástí misfitu. Na obrázku můžete také vidět hodnoty použitých kompromisních parametrů pro tuto inverzi a chybu výsledné veličiny.

Na obrázku 6 vlevo jsou zobrazeny váhové funkce w_a^α pro vektor toků a poruchu rychlosti zvuku. První a poslední sloupec popisují všesměrovou citlivost na přítomnost vln, druhý sloupec na vlny ve směru východ-západ a třetí sloupec na vlny ve směru sever-jih. V pravé části obrázku je zobrazena mapa rychlostních polí v hloubce 0,5 Mm, v okolí rovníku a mimo aktivní oblasti. Barevná mapa koresponduje s vertikální rychlostí, šipky pak s horizontální rychlostí. Referenční šipky v levém spodním rohu odpovídá horizontální rychlosti 250 m/s. Pokud bychom vykreslili pouze oscilace vertikální rychlosti, byla by patrná silná divergence horizontálních toků ve stoupavých proudech a silná konvergence horizontálních toků v klesajících proudech. Po přidání střední hodnoty vertikální rychlosti to již tak patrné není. Stále ale platí, že divergentní horizontální toky se objevují tam, kde je vertikální rychlost vyšší a konvergentní toky tam, kde je vertikální rychlost nižší. Chyby jednotlivých inverzí jsou uvažovány při cestovních časech průměrovaných po 24 hodin.

Minimalizace funkcionalu χ^2 pro veličinu δq^α

V reálném prostoru

$$\begin{aligned} \chi^{2,\alpha} &= \int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \mathcal{T}(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \mu \sum_{i,j,a,b} w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0) \Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j, z_0) \\ &+ \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \epsilon \sum_{a,i} [w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0)]^2 + \sum_{\beta} \lambda^\beta \left[\int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\beta^\alpha \right] \\ &= \chi_1^{2,\alpha} + \chi_2^{2,\alpha} + \chi_3^{2,\alpha} + \chi_4^{2,\alpha} + \chi_5^{2,\alpha} \end{aligned}$$

Minimalizace vůči λ^γ

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \chi^{2,\alpha}}{\partial \lambda^\gamma} = \frac{\partial \chi_5^{2,\alpha}}{\partial \lambda^\gamma} = \sum_{\beta} \frac{\partial \lambda^\beta}{\partial \lambda^\gamma} \left[\int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\beta^\alpha \right] = \sum_{\beta} \delta_\gamma^\beta \left[\int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\beta^\alpha \right] = \\ &= \int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\gamma^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\gamma^\alpha = \int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) K_\gamma^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, z) - \delta_\gamma^\alpha = \\ &= \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) \int_{\odot} d^2 \mathbf{r}' dz K_\gamma^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, z) - \delta_\gamma^\alpha = \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) C_\gamma^a - \delta_\gamma^\alpha \end{aligned}$$

Celkem

$$\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) C_\gamma^a = \delta_\gamma^\alpha \quad (178)$$

Minimalizace vŕči $w_c^\alpha(\mathbf{r}_d)$

$$\begin{aligned}\chi_1^{2,\alpha} &= \int_{\odot} d^3\mathbf{x} [\mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{x}) \mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{x}) - \mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{x}) \tau(\mathbf{x}) - \tau(\mathbf{x}) \mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}) \tau(\mathbf{x})] = \\ &= \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) K_\alpha^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) + \tau(\mathbf{x}) \tau(\mathbf{x}) \right] \\ &- \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \tau(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}) \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi_1^{2,\alpha}}{\partial w_c^\alpha(\mathbf{r}_d)} &= \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) K_\alpha^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right] + \\ &+ \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \sum_j \sum_b \delta_b^c \delta_j^d(\mathbf{r}_j) K_\alpha^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right] \\ &- \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \tau(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}) \sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \right] = \\ &= \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) K_\alpha^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right] \\ &+ \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) \right] \\ &- \int_{\odot} d^3\mathbf{x} [K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) \tau(\mathbf{x}) + \tau(\mathbf{x}) K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d)] = \\ &= 2 \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) \right] - 2 \int_{\odot} d^3\mathbf{x} K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d) \tau(\mathbf{x}) = \\ &= 2 \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \int_{\odot} d^3\mathbf{x} K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) - 2t_\alpha^c(\mathbf{r}_d)\end{aligned}$$

$$\chi_2^{2,\alpha} = \mu \sum_{i,j} \sum_{a,b} w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi_2^{2,\alpha}}{\partial w_c^\alpha(\mathbf{r}_d)} &= \mu \left[\sum_{i,j} \sum_{a,b} \delta_a^c \delta_i^d \Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) + \sum_{i,j} \sum_{a,b} w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \Lambda^{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \delta_b^c \delta_j^d \right] = \\ &= \mu \left[\sum_j \sum_b \Lambda^{cb}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) + \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \Lambda^{ac}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_d) \right] = \\ &= 2\mu \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \Lambda^{ac}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_d) \Leftarrow \Lambda^{ac}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_d) = \Lambda^{ca}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_i)\end{aligned}$$

$$\chi_3^{2,\alpha} = \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3\mathbf{x} [\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{x}) \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{x})] = \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3\mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) K_\alpha^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi_3^{2,\alpha}}{\partial w_c^\alpha(\mathbf{r}_d)} &= \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d(\mathbf{r}_i) K_\beta^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) K_\beta^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right] + \\
&+ \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\beta^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) \sum_j \sum_b \delta_b^c \delta_j^d(\mathbf{r}_j) K_\beta^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right] = \\
&= \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \left[K_\beta^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) K_\beta^b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, z) \right] \\
&+ \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\beta^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\beta^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) \right] \\
&= 2\nu \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} K_\beta^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\beta^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z)
\end{aligned}$$

$$\chi_4^{2,\alpha} = \epsilon \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi_4^{2,\alpha}}{\partial w_c^\alpha(\mathbf{r}_d)} &= \epsilon \left[\sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d \sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) + \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \sum_j \sum_b \delta_b^c \delta_j^d \right] = \\
&= \epsilon \left[\sum_j \sum_b w_b^\alpha(\mathbf{r}_j) + \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \right] \iff \sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d = 1 \\
&= 2\epsilon \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i)
\end{aligned}$$

$$\chi_5^{2,\alpha} = \sum_\beta \lambda^\beta \left[\int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \delta_\beta^\alpha \right] = 2 \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta \left[\int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, z) - \delta_\beta^\alpha \right]$$

$$\frac{\partial \chi_5^{2,\alpha}}{\partial w_c^\alpha(\mathbf{r}_d)} = 2 \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} \sum_i \sum_a \delta_a^c \delta_i^d K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i, z) = 2 \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} K_\beta^c(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_d, z) = 2 \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^a$$

Celkem

$$\begin{aligned}
&2 \sum_i \sum_a \left\{ \left[\int_{\odot} d^3 \mathbf{x} K_\alpha^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\alpha^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) + \mu \Lambda^{ac}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_d) \right] w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \right\} \\
&+ 2 \sum_i \sum_a \left\{ \left[\nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^3 \mathbf{x} K_\beta^a(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i, z) K_\beta^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_d, z) + \epsilon \delta_a^c \right] w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) \right\} + 2 \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c = 2t_\alpha^c(\mathbf{r}_d) \\
&\sum_i \sum_a A_a^c(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_i) w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) + \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c = t_\alpha^c(\mathbf{r}_d)
\end{aligned}$$

Závěrem

$$\sum_i \sum_a A_a^c(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_i) w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) + \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c = t_\alpha^c(\mathbf{r}_d) \quad (179)$$

$$\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) C_\gamma^a = \delta_\gamma^\alpha \quad (180)$$

Ve Fourierově prostoru

Zejména matice A_a^c vyskytující se v rovnici (179) je značně rozsáhlá a její inverze proto prakticky není možná. Za předpokladu horizontálně invariantního pozadového modelu, kterému přísluší matice K_α^a , můžeme **řešit problem po jednotlivých vlnových číslech** ve Fourierově prostoru. To umožní řešit komplikované problémy v relativně krátkém čase za použití méně výkonných počítačů.

Fourierovu transformaci $\tilde{f}(\mathbf{k})$ funkce $f(\mathbf{r})$ definujeme jako

$$f(\mathbf{r}) = h_k^2 \sum_{\mathbf{k}} \tilde{f}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (181)$$

kde h_k je velikost mříže ve Fourierově prostoru. Poznamenejme, že pro konstantu c platí $c = \tilde{c}$.

Převod rovnice (179)

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_a A_a^c(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_i) w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) + \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c &= t_\alpha^c(\mathbf{r}_d) \implies \\ \cdot h_k^2 \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}') \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_i) + \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c &= h_k^2 \sum_{\mathbf{k}} \tilde{t}_\alpha^c(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) \\ h_k^4 \sum_a \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{A}_a^c(\mathbf{k}) \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}') \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) \sum_i \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i] + \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}^0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) &= h_k^2 \sum_{\mathbf{k}} \tilde{t}_\alpha^c(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) \end{aligned}$$

Pozn.: Platí $\sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}^0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) = 1$, $\sum_{i=1}^N \exp[i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i] = N \delta_{\mathbf{0}}^{\mathbf{k}' - \mathbf{k}} = N \delta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}'}$.

Celkem

$$h_k^4 N \sum_a \sum_{\mathbf{k}} \tilde{A}_a^c(\mathbf{k}) \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) + \sum_{\mathbf{k}} \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c \delta_{\mathbf{k}}^0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) = h_k^2 \sum_{\mathbf{k}} \tilde{t}_\alpha^c(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) \quad (182)$$

Pokud rovnici můžeme řešit člen po členu v \mathbf{k} prostoru, můžeme odstranit sumu přes \mathbf{k} a zkrátit exponenciály.

Převod rovnice (180)

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i) C_\gamma^a &= \delta_\gamma^\alpha \implies \sum_i \sum_a h_k^2 \sum_{\mathbf{k}} \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) C_\gamma^a = \delta_\gamma^\alpha \\ h_k^2 \sum_a C_\gamma^a \sum_{\mathbf{k}} \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}) \sum_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i) &= \delta_\gamma^\alpha \\ h_k^2 N \sum_a C_\gamma^a \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{0}) &= \delta_\gamma^\alpha \end{aligned} \quad (183)$$

Konečná podoba

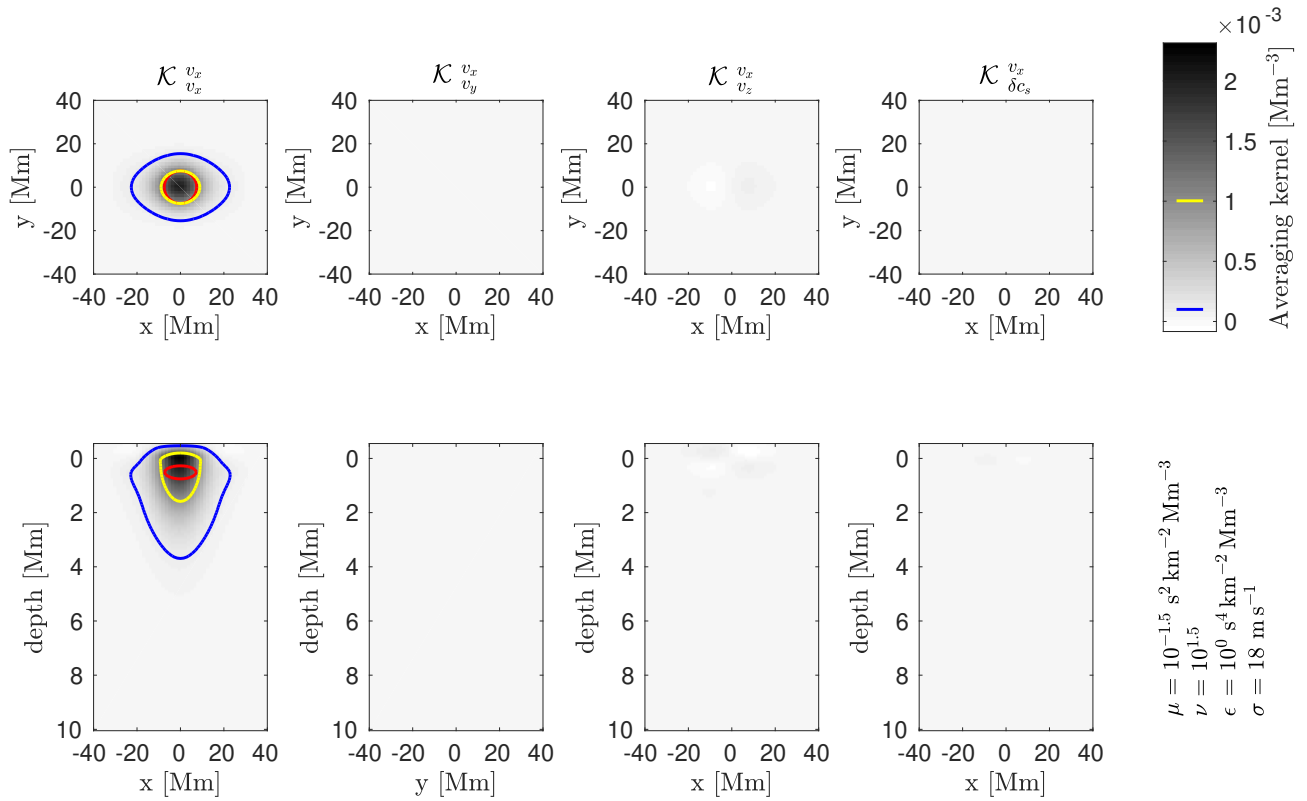
$$h_k^4 N \sum_a \tilde{A}_a^c(\mathbf{k}) \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}) + \sum_\beta \hat{\lambda}^\beta C_\beta^c \delta_{\mathbf{k}}^0 = h_k^2 \tilde{t}_\alpha^c(\mathbf{k}) \quad (184)$$

$$h_k^2 N \sum_a C_\gamma^a \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{0}) = \delta_\gamma^\alpha \quad (185)$$

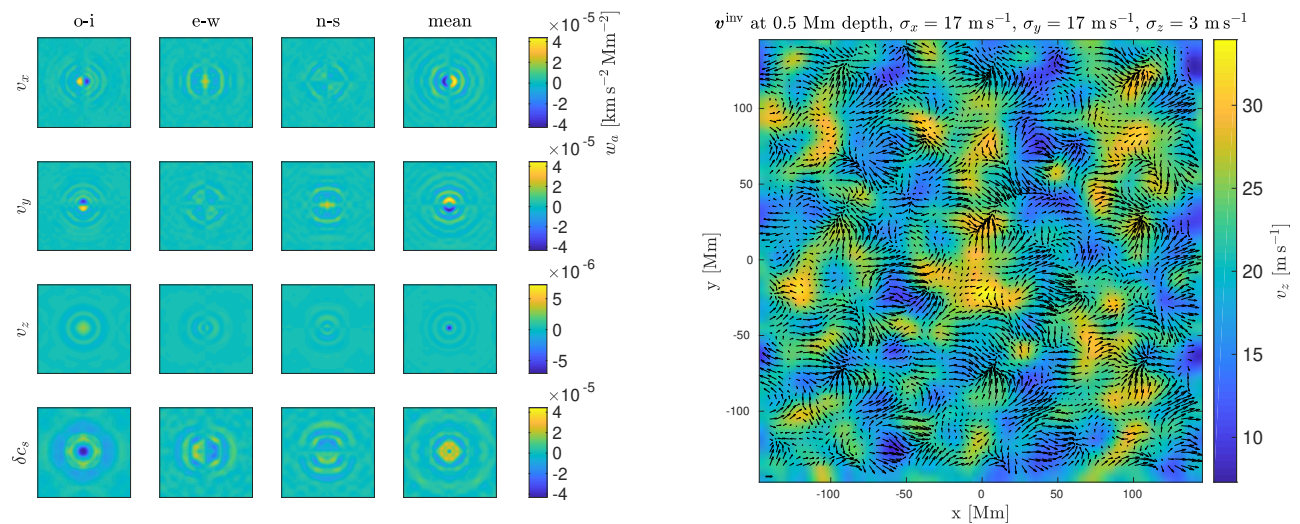
nebo zapsáno maticově

$$\mathbf{k} \neq \mathbf{0} \implies h_k^4 N \sum_a \tilde{A}_a^c(\mathbf{k}) \tilde{w}_a^\alpha(\mathbf{k}) = h_k^2 \tilde{t}_\alpha^c(\mathbf{k}) \quad (186)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} h_k^4 N \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{0}) & \mathbf{C} \\ (h_k^2 N \mathbf{C})^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_k^2 \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{0}) \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (187)$$



Obrázek 5: Příklad inverze složky x rychlosti toků v hloubce 0,5 Mm. Ve stupni šedi zobrazeno průměrovací jádro. Červená křivka je 50 % maximální hodnoty cílové funkce, žlutá křivka je 50 % maximální hodnoty průměrovacího jádra v cílové hloubce, a modrá 5 % maximální hodnoty průměrovacích jádra v cílové hloubce. V horním řádku je zobrazen řez průměrovacím jádrem v cílové hloubce, ve spodním řádku řez kolmo na osu symetrie.



Obrázek 6: **Levá část:** Příklad váhových funkcí pro jednotlivé inverze. První a poslední sloupec popisují všesměrovou citlivost na přítomnost vln, druhý sloupec na vlny ve směru východ-západ a třetí sloupec na vlny ve směru sever-jih. **Pravá část:** Mapa rychlostních polí v hloubce 0,5 Mm, v okolí rovníku a mimo aktivní oblasti. Barevná mapa koresponduje s vertikální rychlostí, šipky pak s horizontální rychlostí. Referenční šipka v levém spodním rohu odpovídá horizontální rychlosti 250 m/s. Uvedené chyby jsou za předpokladu cestovních časů průměrovaných po 24 hodin.