Helioseismologie !

f-mód : seismický poloměr $\odot$

$$\omega^2 = g k_h = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2}\,\frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot}$$

$$\Rightarrow R_\odot = \left[\frac{\sqrt{l(l+1)}\;GM_\odot}{\omega^2}\right]^{1/3}$$

měříme $\omega = \omega(l)$, $R_\odot$ tedy fitem z této závislosti

$R_{seism} \sim 695{,}68$ Mm

$R_{opt} \sim 695{,}99$ Mm

0,3 Mm nejspíš kvůli nepřesnému modelu podpovrchové konvekce – ovlivňuje disperzní relaci

Duvallův zákon

rezonanční podmínka pro p-mody

$$\int_{r_t}^{R_\odot} k_r\,dr = \pi(n+\alpha) = \int_{r_t}^{R_\odot}\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]^{1/2} dr \quad \Big/ \cdot \frac{1}{\omega}$$

$$\int_{r_t}^{R_\odot}\left(\frac{r^2}{c^2} - \frac{l(l+1)}{\omega^2}\right)\frac{dr}{r} = \frac{\pi(n+\alpha)}{\omega}$$

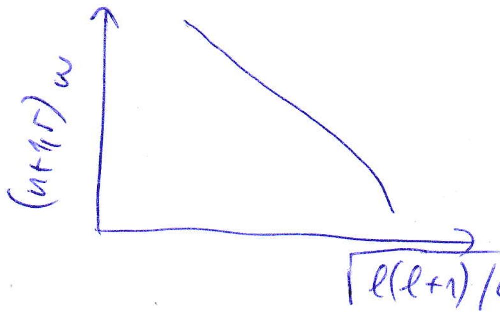
závisí na $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}$ $\qquad \frac{c(r_t)}{r_t} = \frac{\omega}{\sqrt{l(l+1)}}$

$\Rightarrow$ integrand nalevo je funkcí $\frac{\omega}{\sqrt{l(l+1)}}$

$$F\left[\frac{l(l+1)}{\omega}\right] = \frac{\pi(n+\alpha)}{\omega}$$

→ 2-D disperzní relace pro $\omega = \omega(n, l)$ kolabuje na 1-D relaci mezi poměry $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\omega}$ a $\frac{n+\alpha}{\omega}$

→ Duvallův zákon



pro $l \sim 0 - 250$

Inverzní úlohy

→ podstatou najít korekce slunečnímu modelu, které minimalizují diference mezi vypozorovanými a modelovými frekvencemi

$$c \to c + \delta c \quad \leftarrow \text{perturbace v rychlosti zvuku}$$

vyvolá

$$\omega \to \omega + \delta\omega \quad \leftarrow \text{perturbace ve frekvenci}$$

$$\int_{r_t}^{R} \left[\frac{(\omega+\delta\omega)^2}{(c+\delta c)^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right]^{1/2} dr = \pi(n+\alpha)$$

$$l(l+1) \equiv L^2$$

rozvoj podle $\frac{\delta\omega}{\omega}$, podobně podle $\frac{\delta c}{c}$, potažmo stejné by mělo vyjít

$$\delta\omega: \left[\left(\frac{\omega+\delta\omega}{c}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{\delta\omega}{\omega}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left| (1+x)^2 \sim 1+2x \right.$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+\frac{2\delta\omega}{\omega}\right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\delta\omega\,\omega}{c^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left[1 + \frac{\frac{2\delta\omega\,\omega}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right]^{1/2} = \left| \sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2} \right| =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}}_{A} + \frac{\frac{\delta\omega\,\omega}{c^2}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}}} = A + \frac{\frac{\delta\omega\,\omega}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}} =$$

$$= A + \frac{\delta\omega}{c} \frac{1}{\left(1 - \frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}$$

$$\delta c: \left[\left(\frac{\omega}{c+\delta c}\right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\left(1+\frac{\delta c}{c}\right)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{1+\frac{2\delta c}{c}} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left| \frac{1}{1+x} \sim 1-x \right| =$$

$$= \left[\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{2\delta c}{c}\right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} - \frac{2\delta c\,\omega^2}{c^3} \right]^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 - \frac{\frac{2\delta c\,\omega^2}{c^3}}{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{c^2}} \right)^{1/2} = \left| \sqrt{1-x} \sim 1 - \frac{x}{2} \right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2}} - \frac{\delta c}{c}\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{1}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}} = A - \frac{\delta c}{c}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}$$

porovnat

$$\int_{r_t}^{R_\odot}\left[\cancel{A} + \frac{\delta\omega}{c}\,\frac{1}{\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{1/2}}\right]dr = \int_{r_t}^{R_\odot}\left[\cancel{A} - \frac{\delta c}{c}\,\frac{\omega}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}\right]dr$$

$$\int_{r_t}^{R_\odot}\frac{\delta\omega}{c}\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{-1/2}dr = -\int_{r_t}^{R_\odot}\frac{\delta c}{c}\,\frac{\omega}{c}\left(1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}\right)^{-1/2}dr$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega}\underbrace{\int_{r_t}^{R_\odot}\frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}\,dr}_{T\text{ ... neporušený travel-time}} = -\int_{r_t}^{R_\odot}\frac{\delta c}{c}\,\frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}\,dr$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\underbrace{\frac{1}{T}\int_{r_t}^{R_\odot}\frac{\delta c}{c}\underbrace{\frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}\,dr}_{\text{kernel } K_{\delta c}}}_{\text{průměrná sound-speed perturbace podél paprsku}}$$

je to travel-time?

trasa paprsku: ~~standardní~~ ~~rovnice~~

$$\vec{v}_g = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$$

radiální: $\frac{dr}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_r}$

úhlová: $r\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_h}$

disperzní relace $\omega^2 = c^2(k_r^2+k_h^2) + \omega_c^2$, $\omega_c^2 \ll \omega^2$

pak: ~~$dt = dr$~~

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_r} = \frac{\partial}{\partial k_r}\left(c\sqrt{k_r^2+k_h^2}\right) = c\,\frac{1}{2\sqrt{k_r^2+k_h^2}}\cdot 2k_r =$$

$$= \frac{c^2k_r}{\omega}$$

$$\Rightarrow dt = dr\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{1}{k_r} = dr\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{L^2}{r^2}}} = dr\,\frac{\omega}{c^2}\,\frac{1}{\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{\omega^2 r^2}}} =$$

$$= \frac{dr}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}$$

$$T = \int_{r_t}^{R_0} dt = \int_{r_t}^{R_0} \frac{1}{c}\,\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}$$

C.B.D.

rovnice pro paprsek: $\boxed{r\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{\partial\omega}{\partial k_\vartheta}\Big/\frac{\partial\omega}{\partial k_r} = \frac{k_\vartheta}{k_r} = \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{L^2}{r^2}}}}$

popisuje trajektorii vlny v paprskové aproximaci

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{T}\int_{r_t}^{R_0}\frac{\delta c}{c}\,K_c(l,\omega)\,dr$$

lze invertovat analyticky
Abelova integrální rovnice
→ inverse rychlosti zvuku
(asymptotická)

$\boxed{\text{alternativně:}}$

tvar vlny $\quad \tau^{\omega} = \int_{r_t}^{R_0}\frac{1}{c}\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{L^2c^2}{r^2\omega^2}}}$; $c = c(q_k)$

$q_k = \{p, \rho, \vec{v}, \gamma, \dots\}$

ω ... kombinace l, ω

měříme tvar vlny s pozorovaným fitem dosazovaným

$\phi(t,\omega)$ ... měření

$F_\omega(t,\omega)$ ... filtr

$\psi(t,\omega) = F_a(t,\omega)\, \delta(t,\omega)$ je filtrovaná kostra

cross - covariance:

$$C(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \frac{h_t}{T-|t|} \sum_{t'} \psi(\vec{x}_1, t')\, \psi(\vec{x}_2, t'+t) =$$

$$= \int_0^T dt'\, \psi(\vec{x}_1, t')\, \psi(\vec{x}_2, t'+t)$$

T ... doba pozorování

$$-\frac{T}{2} \leq t' \leq \frac{T}{2}$$

potom se určí τ_a^0 ... pozorovaný travel time, kdy je $C(x_1, x_2, t)$ maximální

pak $\chi = \frac{1}{2} \sum_a \underbrace{(\tau_a - \tau_a^0)^2}_{\delta\tau}$ ... misfit mezi pozorováním a modelem → minimalizujeme

$$\delta\chi = \sum_a (\tau_a - \tau_a^a) \underbrace{\frac{\partial \tau_a}{\partial q_\alpha}}_{K_\alpha^a(\vec{x}, q_\alpha)} \delta q_\alpha$$

$K_\alpha^a(\vec{x}, q_\alpha)$ ... je kernel Fréchetova derivace

$\boxed{\text{Obecně,}}$

formálně $\omega^2 \vec{q}_\alpha = \mathcal{L}(\vec{q}_\alpha)$ $\vec{q}_\alpha$ ... vektor parametrů

↳ frekvence závisí na perturbacích v pozadí

↳ vlastní problém

násobit q_α^* a integrovat přes ⊙

$$\omega^2 \int_\odot q_\alpha^* \cdot q_\alpha \, d^3r = \int_\odot q_\alpha^* \cdot \mathcal{L}(q_\alpha)\, d^3r$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\int_\odot q_\alpha^* \cdot \mathcal{L}(q_\alpha)\, d^3r}{\int_\odot q_\alpha^* \cdot q_\alpha \, d^3r}$$

slunečí parametry jsou v $\mathcal{L}$ (vč. vnitřní struktury), frekvence jsou vlastní čísla $\vec{q}_\alpha$

porovnáme-li model → změní se frekvence

malá porucha: $\mathcal{L}(q_\alpha) = \mathcal{L}_0(q_\alpha) + \mathcal{L}_1(q_\alpha)$

pak $$\omega^2 + \delta\omega^2 = \frac{\int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \cdot \mathcal{L}(q_\alpha)}{\int_\odot q_\alpha^* \cdot q_\alpha\, d^3r} =$$

$$= \frac{\int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \cdot \mathcal{L}_0(q_\alpha)}{\int_\odot q_\alpha^* \cdot q_\alpha\, d^3r} + \frac{\int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \cdot \mathcal{L}_1(q_\alpha)}{\int_\odot q_\alpha^* \cdot q_\alpha\, d^3r}$$

$$\Rightarrow \delta\omega^2 = \frac{\int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \mathcal{L}_1(q_\alpha)}{\int_\odot q_\alpha^* \cdot q_\alpha\, d^3r}$$

I ... mode mass $\quad I = \int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \cdot q_\alpha$

$$2\omega_0\,\delta\omega = \frac{\int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \cdot \mathcal{L}_1(q_\alpha)}{I} \qquad \Big/ : 2\omega_0^2$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\int_\odot d^3r\, q_\alpha^* \mathcal{L}_1(q_\alpha)}{2\omega_0^2 I}$$

$\mathcal{L}_1$ je třeba explicitně formulovat → štěpení v proměnných

$$\Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega} = \int_\odot d^3r \Big[\underbrace{K_\rho}\, \frac{\delta\rho}{\rho} + \underbrace{K_{c^2}}\, \frac{\delta c^2}{c^2} + \underbrace{K_{\vec{v}}} \cdot \delta\vec{v} + \dots\Big]$$

citlivostní jádra

ovlivnostní jádra

$\boxed{\text{Jak počítat jádra}}$?

formálně:

dva páry proměnných: např. $\vec{X} = \left(\frac{\delta\rho}{\rho}, \frac{\delta\gamma}{\gamma}\right)$, $\vec{Y} = \left(\frac{\delta w}{w}, \frac{\delta Y}{Y}\right)$

$w = \frac{p}{\rho}$

linearizované strukturní rovnice (hydrostatická rovnováha, stavová rovnice)

$$A\vec{X} = \vec{Y}$$

pokud $\vec{K}_X$ a $\vec{K}_Y$ kernely pro X a Y

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} \vec{K}_X \cdot \vec{X}\, d^3r \equiv \langle \vec{K}_X \cdot \vec{X} \rangle$$

podobně $\frac{\delta\omega}{\omega} = \langle \vec{K}_Y \cdot \vec{Y} \rangle$ a aplikujeme rce vnitřní stavby

$$\langle \vec{K}_Y \cdot \vec{Y} \rangle = \langle K_Y \cdot A \vec{X} \rangle = \langle A^* \vec{K}_Y \cdot \vec{X} \rangle$$

A^* ... sdružená matice

to se rovná $\langle \vec{K}_X \cdot \vec{X} \rangle$

$$\langle A^* \vec{K}_Y \cdot \vec{Y} \rangle = \langle \vec{K}_X \cdot \vec{X} \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{A^* \vec{K}_Y = \vec{K}_X}$$

rovnice pro jádra jsou sdružené rovnice stavby

<u>podobně pro time-distance:</u>

forward:

$$\delta\tau^a(r) = \int_{\odot} d^2r'dz \sum_{\beta=1}^{P} K_\beta^a(r'-r, z)\, \delta q_\beta(r', z) + n^a(r)$$

kovarianční matice šumu: $\Lambda_{ab}(r_i - r_j) = \mathrm{Cov}[n^a(r_i)\, n^b(r_j)]$

$$\mathrm{Tr}[\Lambda_{ab}] = \sigma_a^2$$

inverze: $\boxed{\text{RLS}}$ (regularised least squares)

$$\chi^2 = \sum_a \frac{1}{\sigma_a^2}\left[\delta\tau^a - \int_{\odot} d^2r\,dz \sum_\beta K_\beta^a\, \delta q_\beta\right]^2 + \mu L(q_\alpha)$$

regularizační operátor

(např. $L = |q_\alpha|^2$

nebo $L = \left(\frac{\partial^2 q_\alpha}{\partial z^2}\right)^2$ ...

minimalizujeme: $\frac{\partial \chi^2}{\partial q_\alpha}$ ... soustava rovnic

$\boxed{OLA}$ ... optimally localised averaging

hledáme řešení: dosadíme

$$\delta q_\alpha^{inv}(r_0, z_0) = \sum_i \sum_a w_a^\alpha (r_i - r_0, z_0)\, \delta\tau^a(r_i)$$

$$= \int_\odot d^2 r' dz \sum_\beta \Big[\sum_{i,a} w_a^\alpha (r_i - r_0; z_0)\, K_\beta^a(r' - r_i; z)\Big]\, \delta q_\beta(r', z)$$

$$+ \sum_{i,a} w_a^\alpha (r_i - r_0; z_0)\, n^a(r_i)$$

definujeme: $\mathcal{K}_\beta^\alpha (r, z; z_0) = \sum_i \sum_a w_a^\alpha (r_i; z_0)\, K_\beta^a (r - r_i, z)$

$\hookrightarrow$ průměrovací jádro $\qquad \forall \beta \in P$

pak

$$\delta q_\alpha^{inv}(r_i; z_0) = \int_\odot d^2 r' dz\, \mathcal{K}_\alpha^\alpha (r' - r_0; z; z_0)\, \delta q_\alpha (r', z) +$$

$$+ \int_\odot d^2 r' dz \sum_{\beta, \beta \neq \alpha} \mathcal{K}_\beta^\alpha (r' - r_0, z; z_0)\, \delta q_\beta (r', z) +$$

$$+ \sum_{i,a} w_a^\alpha (r_i - r_0; z_0)\, n^a(r_i)$$

předepíšeme penalizační funkci:

$$\mathcal{K}_\alpha (w^\alpha, \mu) = \int_\odot d^2 r\, dz \sum_\beta \left[\mathcal{K}_\beta^\alpha - \mathcal{T}_\beta^\alpha\right]^2 + \mu \sum_{i,j,a,b} \underset{(r_i)}{w_a^\alpha}\, \underset{(r_i - r_j)}{\Lambda_{ab}}\, \underset{(r_j)}{w_b^\alpha}$$

řešení: $\dfrac{\partial \mathcal{K}_\alpha}{\partial w^\alpha} \overset{!}{=} 0$

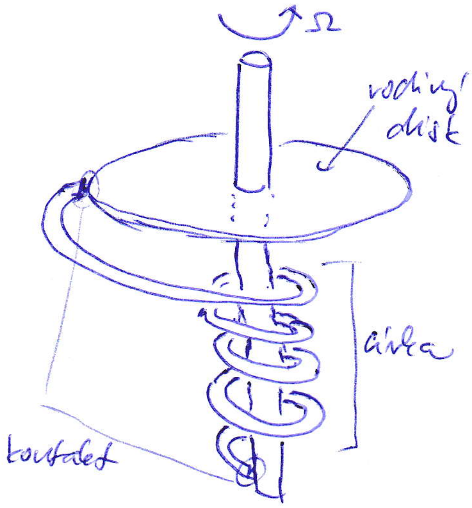
RMS šumu!

lze dokázat, že: $\sigma_\alpha^2 = \sum_{a,b,i,j} w_a^\alpha (r_i)\, \Lambda_{ab} (r_i - r_j)\, w_b^\alpha (r_j)$

+ constraint $\int_\odot d^2 r\, dz\, \mathcal{K}_\beta^\alpha = \delta_{\beta\alpha}$

$\hookrightarrow$ připojit pomocí Lagrangeových multiplikátorů

Homopolární dynamo



uvažujme teče proud $I(t)$

může $I(t)$ být rostoucí?

mg. pole buzené proudem tok $\Phi = MI$

M... indukčnost drátu a disku

rotace $=$ vznik $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\frac{\Omega}{2\pi}}\Phi = \frac{\Omega}{2\pi} M I$$

pro proud $L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} = \frac{\Omega}{2\pi} M I$

řešení $I(t) = I_0 \, e^{\gamma t}$

$$\gamma = \frac{1}{L}\left(\frac{M}{2\pi}\Omega - R\right)$$

L... indukčnost cívky

nárůst pro $\gamma > 0$

$$\rightarrow \Omega > \frac{2\pi R}{M}$$

$\Rightarrow$ rychlá rotace $=$ generace proudu

Mean-field dynamo

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla\times(v\times B) + \eta\,\Delta B = \nabla\times\left[v\times B - \eta\,\nabla\times B\right]$$

definujeme: $B = \langle B\rangle + b \leftarrow$ fluktuace

↳ střední

$$v = \langle v\rangle + w \qquad \langle w\rangle = 0$$

dosadit: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle B\rangle + b\right) = \nabla\times\left[(\langle v\rangle + w)\times(\langle B\rangle + b) - \eta\,\nabla\times(\langle B\rangle + b)\right]$

střední část: (středováním ↑)

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle B\rangle = \nabla\times\left[\langle v\rangle\times\langle B\rangle + \langle w\times b\rangle - \eta\,\nabla\times\langle B\rangle\right]$$

fluktuující: (= původní − střední)

$$\frac{\partial}{\partial t} b = \nabla \times \left[\langle v \rangle \times b + w \times \langle B \rangle + w \times b - \langle w \times b \rangle - \eta \nabla \times b \right]$$

definujeme: $\mathcal{E} = \langle w \times b \rangle$

$G = w \times b - \langle w \times b \rangle$

elektrické pole vytvořené fluktuujícími částicemi...

úvaha: b a $\langle B \rangle$ v lineární relaci

$\mathcal{E}$ a b v lineární relaci

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ a $\langle B \rangle$ by měly být lineární

tedy: $\mathcal{E} = \alpha \langle B \rangle - \beta \nabla \times \langle B \rangle + \dots$

pro izotropní turbulenci: $\alpha = \frac{1}{3} \langle w \cdot \nabla \times w \rangle \tau$

$\beta = \frac{1}{3} \langle w \cdot w \rangle \tau$

τ... korelační čas

$w \cdot \nabla \times w$... kinetická helicita

$$\Rightarrow \frac{\partial \langle B \rangle}{\partial t} = \nabla \times \Big[\underbrace{\langle v \rangle \times \langle B \rangle}_{\Omega \text{ efekt}} + \underbrace{\alpha \langle B \rangle}_{\alpha \text{ efekt}} - (\eta + \beta) \nabla \times \langle B \rangle \Big]$$

$\eta + \beta = \eta_t$ ... turbulentní vazkost

α − efekt $\rightarrow$ toroidální $\rightarrow$ poloidální

Ω − efekt $\rightarrow$ poloidální $\rightarrow$ toroidální

α: problém:

odhad: $\alpha = (\pm) l \, \Omega$ ← rot. rychlost

↳ char. délka

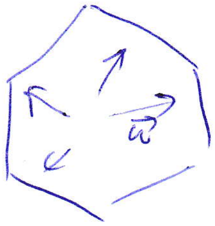
podle helicity v daném místě (vždy opačná)

numericky: $\alpha = \dfrac{\langle w \times b \rangle \cdot B_H}{B_H^2}$ externí horizontální pole (stěny)

$\alpha \in \langle \sim \mathrm{m/s}, \sim 100\,\mathrm{m/s} \rangle$

Skvrny

koncentrace toku supergranulemi:



rovnováha: rychlost rozpadu: $\sim \frac{d^2}{\eta}$ ← difuzivita

stejná jako advekce k okrajům $\frac{l}{w}$ (steady state)

d... velikost elementu, l... velikost supergranule

$$\tau = \frac{d^2}{\eta} = \frac{l}{w} \Rightarrow d^2 = \frac{\eta l}{w} = \frac{l^2}{R_m}$$

↳ mag. Reynoldsovo číslo

odhad koncentrovaného pole: celý pozaďový tok se koncentruje do elementu:

$$B_0 l^2 = B d^2$$

$$\Rightarrow B = \frac{B_0 l^2}{d^2} = \frac{B_0 l^2}{l^2/R_m} = R_m B_0$$

char. čas: $l = 30\,Mm$, $R_m = 10^4$, $B_0 \sim 0{,}1\,G$, $w \sim 300\,m/s$

$\Rightarrow d = 300\,km$, $B \sim 10^3\,G$ ← lze vytvořit skvrnu

$$\tau = \frac{l}{w} = 10^5\,s \sim 1\,den$$

proti tomu: koncentrace se zastaví vyrovnáním tlaků:

$$\frac{B^2}{2\mu} \sim \frac{\rho w^2}{2} \Rightarrow B \sim \sqrt{\mu\rho}\, w$$

pro fotosféru: $\rho = 3\times10^{-4}\,kg/m^3$

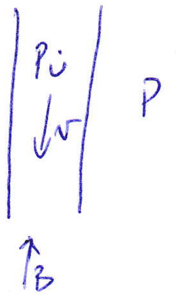
$w \sim 300\,m/s$

$$\Rightarrow \underline{B \sim 60\,G}$$

⇒ nelze vytvořit skvrnu, musí se jinak

konvektivní kolaps

- vertikální mg. trubice: adiabatické vychlazení dolů → materiál v trubce chladnější → posouvá se pohyb dolů...



rovnováha: $P = P_i + \frac{B^2}{2\mu}$

pohyb. rce: $\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_i}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{2\mu\rho}\right) = 0$$

hledáme char. chování ⇒ integrujeme podél trubice: $\int_{x_1}^{x_2} \dots dx = \langle \dots \rangle$

máme stac. tok ⇒ $\frac{\partial}{\partial t}\langle v \rangle = 0$

⇒ $\left\langle P + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{B^2}{2\mu} \right\rangle = \text{konst} = \langle P_i \rangle$

tedy $\left\langle \frac{B^2}{2\mu} \right\rangle = \langle P \rangle + \frac{1}{2}\langle \rho v^2 \rangle - \langle P_i \rangle$

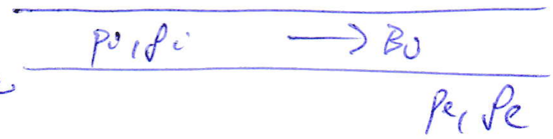
→ mg. pole roste vnějším tlakem nebo tokem podél trubice

detailněji: kolaps nastává pro pole >0,1 T

Magnetická vzplývavost

→ horizontální trubice v KZ bez pohybu

$p_e = p_i + \frac{B^2}{2\mu}$ rovnováha



$p = \frac{RT\rho}{\mu}$, $\mu = 1$

→ $RT(\rho_e - \rho_i) = \frac{B_i^2}{2\mu}$; $\rho_i < \rho_e$ … vzplývání silou $(\rho_e - \rho_i)g$

pokud je vzplývavá síla větší než tenze trubice →
→ vzplýval

Lorentzova síla: $f_L = j \times B = \frac{(\nabla \times B) \times B}{\mu} = \underbrace{\frac{(B \cdot \nabla) B}{\mu}}_{\text{tenze}} - \underbrace{\nabla \frac{B^2}{2\mu}}_{\text{grad tlaku}}$

$$\frac{(B\cdot\nabla)B}{\mu} \sim \frac{B_i^2}{\mu l}$$ ... l – char. velikost perturbace,

nestabilita: $$(\rho_e - \rho_i)\, g > \frac{B_i^2}{\mu l}$$ ↑ z rovnováhy tlaků

$$\Rightarrow$$

$$\cancel{(\rho_e-\rho_i)}\, g > \frac{2RT\,\cancel{(\rho_e-\rho_i)}}{l}$$

$$\Rightarrow l > \frac{2RT}{g} = 2H_p$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g = p\,\frac{1}{p}\frac{dp}{dr} = p\,\frac{d\ln p}{dr} = -\frac{p}{H_p}$$

$$\frac{p}{\rho} = RT \Rightarrow \frac{p}{\rho g} = \frac{RT}{g} = H_p$$

tedy pokud perturbace dost velká → trubice nestabilní a vyplývá

čas vynořování: $\tau \sim \frac{d}{c_A}$, d ... hloubka

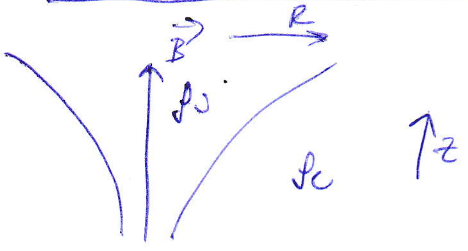
pro 10 kG trubici na dně KZ

($\rho = 200\ \mathrm{kg/m^3}$, $d = 200\ \mathrm{Mm}$)

$\tau \sim 2$ měsíce (c_A klesá k povrchu, takže delší, τ spíš rok)

pokud $\tau > \tau_{rot}$ ~ ovlivnění Coriolisovou silou, deflekce k vyšším šířkám

$\boxed{\text{MHS model skvrny}}$



$B = B(R)$

$\max(B) = B_i = B(R=0)$

$B(R \to \infty) = 0$

$\rho_i = \rho_i(z)$

$\rho_e = \rho_e(z)$

v klouboe rovnováha: $p(R,z) + B^2(R)/2\mu = p_e(z)$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(z)\, g$$

pro $R \to \infty$: $\frac{dp_e}{dz} = -\rho_e(z)\, g$

pro $R = 0$: $p_i(z) + \frac{B_i^2}{2\mu} = p_e(z)$

$$\frac{dp_i}{dz} = -\rho_i(z)\, g$$

diferencujeme: $\frac{dp_i}{dz} = \frac{dp_e}{dz}$ protože na $B=0$ je B_i konst

$\rightarrow \rho_i = \rho_e$

dále: $p_i < p_e$, pro $p = \frac{\rho \mathcal{R} T}{\mu}$, $\mu \equiv 1$

$$p_i + \frac{B_i^2}{2\mu} = p_e$$

$$\frac{p_i}{p_e} + \frac{B_i^2}{2\mu p_e} = 1 \quad \text{dosadíme stavovou rci}$$

$$\frac{T_i(z)}{T_e(z)} = 1 - \frac{B_i^2}{2\mu\, p_e(z)}$$

v ...ubice obvykle $\frac{B_i^2}{2\mu} \geq p_e(z)$ (obecné R)

diferencujeme:

$$\frac{2 B_i(R)}{2\mu} \frac{dB_i(R)}{dz} > \frac{dp_e}{dz}$$

pro $\frac{dp_e}{dz} < 0 \Rightarrow \frac{dB_i(R)}{dz} < 0$

trubice s výškou diverguje, protože $\Phi = \int B_i\, dS = \text{konst}$

~~$\Phi = \int B_i(R)\, dR = \text{konst}$~~

~~$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 = \int \frac{\partial R}{\partial t}$~~

protože $p_i + \frac{B_i^2}{2\mu} = p_e$

$$\frac{dp_i}{dz} = \frac{dp_e}{dz} - \overbrace{\frac{2B_i}{2\mu}\frac{dB_i}{dz}}^{\text{kladné}}$$

$\Rightarrow \frac{dp_i}{dz} > \frac{dp_e}{dz}$ ale pro $\frac{dp_i}{dz} < 0$ a $\frac{dp_e}{dz} < 0$ | $\Rightarrow$ menší hustota v trubici se výškou (celkem) př. kompletní dissipace skvrny v koróně:

$B \sim 1000\,G = 0{,}1\,T$

$V \sim (10 \times 10 \times 10)\,Mm^3 = 10^{18}\,m^3$

$\rightarrow E_m = \frac{B^2}{2\mu} V = \frac{0{,}01}{2\mu} 10^{18}\,J \sim 4 \times 10^{21}\,J$

tedy o mnoho řádů méně, než se pozoruje

$\Rightarrow$ klidová dissipace není zdrojem erupcí.

$\boxed{\text{Časové škály:}}$

neexplozivní – Jouleovým teplem:

$$t_j = \frac{B^2/2\mu}{j^2/\sigma} = \left| j = \frac{1}{\mu} \nabla \times B \sim \frac{1}{\mu}\frac{B}{L} \right| =$$

$$= \frac{B^2/2\mu}{B^2/\mu^2 L^2 \sigma} = \underline{\underline{\frac{\mu L^2 \sigma}{2}}}$$

srovnatelné

pro srovnání: difúze pole

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta B \Rightarrow \frac{B}{t_{dif}} \sim \frac{1}{\mu\sigma}\frac{B}{L^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_{dif} \sim \mu\sigma L^2}}$$

difuzivita $\eta = \frac{1}{\mu\sigma} \rightarrow t_{dif} \sim \frac{L^2}{\eta}$

chromosféra, $\eta \sim 10^7\,\frac{cm^2}{s}$

koróna: $\eta \sim 3 \times 10^3\,cm^2/s$

pomalé!

---

dynamický jev (advekce)

dynamický čas: $t_d \sim \frac{L}{v}$

srovnáme:

$$t_j = \frac{L^2}{\eta} = \frac{Lv}{\eta}\underbrace{\frac{L}{v}}_{t_d} = R_M t_d$$

magnetické Reynoldsovo číslo, popisuje sílu advekce mg. pole vůči difúzi

pro $R_M \gg 1$ je $t_j \gg t_d$

$\Rightarrow$ v dynamickém procesu nehraje difúze roli

pokud $v = c_A \sim 10^6$ m/s

$$t_j = \frac{L^2}{\eta} = \frac{L c_A}{\eta}\frac{L}{c_A} = N_L \frac{L}{c_A} = N_L t_A$$

Alfvénův čas

N_L vysoké $\rightarrow$ plazma vysoce vodivé

N_L nízký $\rightarrow$ rezistivní plazma

Lundquistovo číslo

příklad: charakteristický čas neexplozivní disipace dynamickým procesem s alfvénovskou rychlostí

$$t_j = \frac{L N_L}{c_A}$$

v koróně: $L \sim 10^7$ m, $c_A \sim 10^6$ m/s, $\eta \sim 10^3$ cm²/s, $N_L \sim 10^{14}$, $\frac{L}{c_A} \sim 10$ s

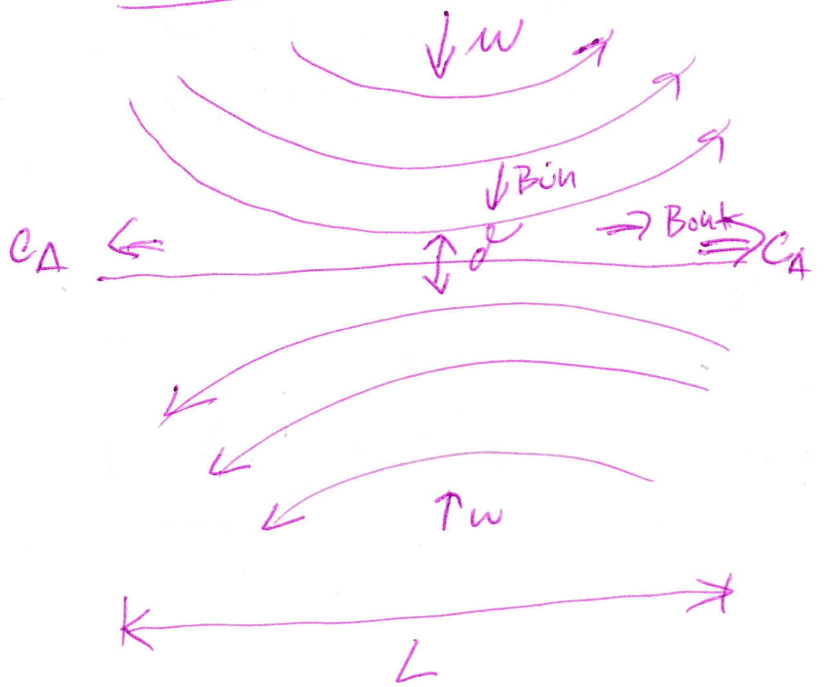
$\Rightarrow$ $\underline{t_j \sim 10^{15}\ \text{s}}$

pomalu

=B=

Explozivní disipace

$\boxed{\text{Sweet – Parker}}$ model:



antiparalelní pole tlačená k sobě v délce L

plazma vytlačována mezi antiparalelními poli alfvénovou rychlostí.

∇B roste do vytvoření steady-state

v δ proudová vrstva: $j = \frac{1}{\mu}\nabla\times B \sim \frac{B}{\mu\delta}$

energetická rovnice: $\dot{U} = \eta j^2 = \eta\frac{B^2}{\mu^2\delta^2}$

v bodě u osy vzniká přetlak (termální škála $t_{th} = L/c_A$), který je balancován tlakem mg. pole (tato termální energie by odebrána mg. poli)

$$U \sim \dot{U} t_{th} \Rightarrow \frac{B^2}{2\mu} = \eta\frac{B^2}{\mu^2\delta^2}\frac{L}{c_A}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2\eta L}{\mu c_A}} \propto \sqrt{\frac{\eta L}{c_A}}$$

rce kontinuity:

$$\rho w L = \rho\delta c_A$$

$$\rightarrow w = \frac{\delta}{L}c_A = \frac{\sqrt{\frac{\eta L}{c_A}}}{L}c_A = \sqrt{\frac{\eta \cancel{L} c_A^{\cancel{2}}}{\cancel{c_A} L^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{\eta c_A}{L}}$$

použijeme Lundquistovo číslo

$$N_L = \frac{L c_A}{\eta}$$

$$w = \sqrt{\frac{\eta c_A}{L}} = \sqrt{\frac{\eta}{L c_A} \cdot c_A^2} = \frac{c_A}{\sqrt{N_L}} \leftarrow \text{rychlost rekonexe}$$

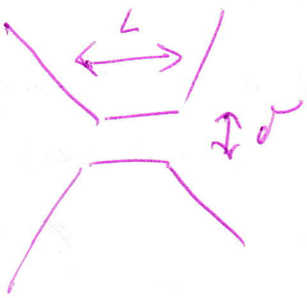
⇒ charakteristický čas

$$t_S = \frac{L}{w} = \frac{L\sqrt{N_L}}{c_A}$$

pro korónu z příkladu: $t_S \sim 10^8$ s moc $\boxed{*}$

$\boxed{\text{Petschekův model}}$

$t_S \sim L$ ⇒ zkrácením L lze zvětšit rychlost



po výpočtu:

$$t_P \sim \frac{L \ln N_L}{c_A}$$

pro korónu: $\underline{t_P \sim 300\,\text{s}}$

tedy disipace v tenkých vrstvách (proudových vrstvách)

Deformace mg. pole přidává volnou energii

→ ΔB → proudové vrstvy

<u>anomální rezistivita</u> – rychlost elektronů srovnatelná s rychlostí plazmových vln

⇒ nárůst rezistivity

⇒ zkrácení disipačního času ($N_L \propto \frac{1}{\eta}$)

=D=

Energetika S-P modelu

$\delta \ll L \Rightarrow w \ll c_A$

rychlost vtoku elmag. energie → Poyntingův flux

tok na plochu:

$(E \times H)L \approx EHL = \left| \begin{matrix} E \text{ indukované} \\ \to E = w \times B \end{matrix} \right| =$

$= E\frac{B_{in}}{\mu}L = w\frac{B_{in}^2}{\mu}L$

poměr kinetické a elmag. energie na vtoku: (plošné)

$$\frac{E_{k,in}}{E_{m,in}} = \frac{\cancel{w}\frac{1}{2}\rho w^2 \cancel{L}}{\cancel{w}\frac{B_{in}^2}{\mu}\cancel{L}} = \frac{w^2}{2\frac{B_{in}^2}{\rho\mu}} = \frac{w^2}{2c_A^2} \ll 1$$

většina vtékající energie je magnetická

na výtoku: $c_A B_0 = w B_{in}$ zachování mg. toku

protože $\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow \frac{B_{out}}{\delta} \sim \frac{B_{in}}{L} \Rightarrow B_{out} \ll B_{in}$

vytékající elmag. energie $E B_{out}\delta/\mu \ll E_{m,in}$

protože $B_{out} < B_{in}$ i $\delta \ll L$

? co se stalo se zbytkem vtékající energie?

$$\frac{E_{k,out}}{E_{m,in}} = \frac{1/2\,\rho c_A^2 (c_A\delta)}{w B_i^2 L/\mu} = \frac{\frac{1}{2}c_A^2}{c_A^2} = \frac{1}{2}$$

⇒ polovina vtékající elmag energie konvertována na kinetickou energii, druhá polovina do tepla

*1

rozvaha:

$$-\nabla\cdot(E\times H) = E\cdot(\nabla\times H) - H\cdot(\nabla\times E) =$$

$$= E\cdot j - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu}\right)$$

⇒ vtok elmag. energie vede buď k elektrické energii $(E\cdot j)$ nebo změně mg. energie

pro $E = \frac{j}{\sigma} - u\times B$ (Ohmův zákon)

$$E\cdot j = \frac{j^2}{\sigma} - j\cdot(u\times B) = \frac{j^2}{\sigma} + u\cdot(j\times B) =$$

pokud $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow -\nabla\cdot(E\times H) = \underbrace{\frac{j^2}{\sigma}}_{\text{Joulovo teplo}} + \underbrace{u\cdot(j\times B)}_{\text{kinetická energie}}$$

*2

Urychlování částic stochastickým polem

v 1D

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m} E(x,t)$$

trajektorie $x = X(t)$

$$\Rightarrow \frac{d^2X}{dt^2} = \frac{q}{m} E(X(t),t)$$

slabé E-pole: rozvoj

$$x = \underbrace{x_0 + v_0 t}_{\text{z poč. podmínek}} + X^{I}(t) + X^{II}(t) + \dots$$

pro opravy: $\ddot{X}^{I} = \frac{q}{m} E(x_0 + v_0 t, t)$

E-pole je stochastické, ale má korelace

$$\langle E(x,t)\, E(x+\xi, t+\tau)\rangle = \langle E^2\rangle \underbrace{R(\xi,t)}_{\text{korelační fce}}$$

$\Rightarrow$ změna rychlosti za čas t do prvního řádu

$$\Delta \dot{X}^{I} = \dot{X}^{I}(t) - \dot{X}^{I}(0) = \frac{q}{m}\int_0^t dt'\, E(x_0 + v_0 t', t')$$

středováním:

$$\langle(\Delta \dot{X}^{I})^2\rangle = \frac{q^2}{m^2}\int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle E(x_0+v_0t',t')\,E(x_0+v_0t'',t'')\rangle =$$

$$= \frac{q^2}{m^2}\int_0^t dt' \int_0^t dt'' \langle E^2\rangle R(v\tau,\tau)$$

pro $\tau = t'' - t'$

pro $t \gg \tau$

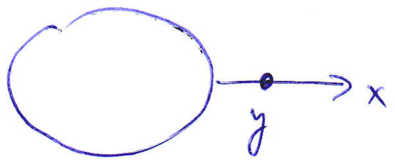
$$\left\langle \frac{(\Delta v)^2}{\Delta t}\right\rangle = \frac{q^2}{m^2}\langle E^2\rangle \int_0^t d\tau\, R(v\tau,\tau)$$

$\Rightarrow$ částice difunduje v rychlostním prostoru a získává energii i ve stochastických polích

=E=

Koróna

→ jak určit hustotu z pozorování?



$y \perp x$, $y \parallel$ l.o.s.

sféricky symetrická koróna, E_K ... emise v objemu v určitém směru

$$\rho^2 = \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \rho\, d\rho = y\, dy = \sqrt{\rho^2 - x^2}\, dy$$

pozorovaná intenzita:

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_K(\rho)\, dy = 2\int_0^{\infty} E_K(\rho)\, dy = 2\int_0^{\infty} \frac{\rho E_K(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}\, d\rho$$

E_K neznámá, tedy třeba invertovat

- lze analyticky: inverzní Abelova transformace

$$\Rightarrow E_K(\rho) = -\frac{1}{\pi}\int_{\rho}^{\infty} \frac{dI/dx}{\sqrt{x^2 - \rho^2}}\, dx$$

ansatz: intenzita v K koróně je kvůli Thomsonovu rozptylu na elektronech

$$\rightarrow E_K(\rho) = \sigma_T\, n_e \frac{1}{4\pi}\int I_\odot(\vartheta)\, d\Omega \qquad d\Omega = r\, d\vartheta\, d\varphi$$

porovnáním lze rozšířit, např. řadou:

$$n_e(\rho) = n_{e0}\left(\frac{1{,}55}{\rho^6} + \frac{2{,}99}{\rho^{16}}\right), \quad n_{e0} = 10^{14}\, m^{-3}$$

hrubý odhad pro $\rho \sim R_\odot$

$$E_K \sim \sigma_T\, n_e\, R_\odot I_\odot \;; \quad E_K(R_\odot) \sim 10^{-6} I_\odot$$

$$\rightarrow n_e \sim \frac{E_K(R_\odot)}{\sigma_T R_\odot I_\odot} \sim 4 \times 10^{13}\, m^{-3}$$

Emisní koróna

→ zejména v RTG oblasti

– brzdné záření + bound-free přechody

vezmeme: emisní čáru (m-1)-krát ionizovaného prvku X^m, v němž přechod z $j \to i$ elektronovou hladinu

$$X_j^{+m} \to X_i^{+m} + h\nu_{ij}$$

emisivita, $P_\nu = \underbrace{N_j(X^{+m})}_{\text{hustota}} \underbrace{A_{ji}}_{\text{Einsteinův koeficient}} h\nu_{ij} \underbrace{\psi_\nu}_{\text{emisní profil}}$

$$\int \psi_\nu \, d\nu \doteq 1$$

koronální aproximace, hladina j populována ze základního stavu srážkou s elektrony, depopulována do nižších zářením

potom ~~emisivita~~

$$P_{gj} = \underbrace{A_X}_{\text{relativní zastoupení X vůči vodíku}} \underbrace{G(T, \lambda_{gj})}_{\text{příspěvková funkce}} \frac{hc}{\lambda_{gj}} \underbrace{N_e^2}_{\text{elektronová hustota}}$$

q.

tok ve vzdálenosti R

$$F(\lambda_{gj}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_V P_{gj} \, dV = \frac{1}{4\pi R^2} A_X \int G(T, \lambda_{gj}) \frac{hc}{\lambda_{gj}} N_e^2 \, dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} A_X \int G(T, \lambda_{gj}) \frac{hc}{\lambda_{gj}} Q(T) \, dT$$

$$N_e^2 \, dV = \underbrace{Q(T)}_{\text{diferenciální míra emise (DEM)}} dT$$

DEM – míra množství emitujícího plazmatu jako fce teploty k PEM: v 1-D je $EM = \int N_e^2 \, dz$

$$EM = \int N_e^2 \, dz = \int N_e^2 \, \cancel{dz} \frac{dz}{dT} \, dT = \underbrace{\int N_e^2 \left(\frac{dT}{dz}\right)^{-1}}_{DEM \,=\, Q(T)} dT$$

$$N_e^2 \, dV = \underbrace{\underbrace{N_e \, dV}_{\text{počet volných elektronů}} \; \underbrace{N_e}_{\text{el. hustota}}}_{}$$

excitace do vyšší hladiny srážkami, tedy intenzita emise čáry na těchto srážkách závisí

pro oblast

$$L = 4\pi R^2 F(\lambda_{ji}) = \int N_e^2 \, P(T) \, dV = \int Q(T) \, P(T) \, dT$$

$$P(T) = A_x \, G(T, \lambda_{ji}) \frac{hc}{\lambda_{ji}}$$

↳ závisí slabě → pomalá fce T

$L \sim N_e^2$ ⇒ jas koróny větší nad aktivními oblastmi kvůli větší N_e, ne kvůli teplotě

$$\boxed{\text{Sluneční vítr}}$$

· Chapmanova statická hydrostatická koróna

→ pokus integrovat rce s vedením & rovnováhe hydrostatických sil

$$F = -\varkappa_{\parallel} \nabla T \quad , \quad \nabla \cdot F = 0$$

$$\varkappa_{\parallel} = \varkappa_0 \, T^{5/2} \leftarrow \text{Spitzer}$$

ve sférických souřadnicích:

$$\mathrm{div}\,(-\varkappa_{\parallel} \nabla T) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r^2 \varkappa_{\parallel} \frac{dT}{dr}\right) = 0$$

integrací: $r^2 \varkappa_0 T^{5/2} \frac{dT}{dr} = C$

přeuspořádání: $\frac{2}{7}\frac{d}{dr}\left(T^{7/2}\right) = \frac{C}{\varkappa_0 r^2}$

integrace: $T^{7/2} = -\frac{\tilde{C}}{\varkappa_0 r} + \tilde{D}$

$\tilde{C}$ a $\tilde{D}$ z okrajových: $T = T_0 \Leftarrow r = R_\odot$

$T \to 0 \Leftarrow r \to \infty$

$\Rightarrow \tilde{D} = 0, \quad \tilde{C} = -T_0^{7/2}\varkappa_0 R_\odot$

tedy řešení: $T = T_0 \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^{2/7}$

pro $T_0 = 10^6 \Rightarrow$ v $r = 1AU = 214 R_\odot$

$T = 10^5 K$

(méně než pozorování, ale v tabulce OK)

ale hydrostatická rovnováha

$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_\odot \rho}{r^2}, \quad p = \rho \mathcal{R} T$

$\Rightarrow$ řešení $p = p_0 \exp\left\{\frac{7GM_\odot \rho_0}{5 p_0 R_\odot}\left[\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^{5/7} - 1\right]\right\}$

p_0 & ρ_0 ... na povrchu

pro $r \to \infty$, $\rho \to \infty \Rightarrow$ není fyzikální

$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM_\odot p}{r^2 \mathcal{R} T} = -\frac{GM_\odot p r^{-2/7} R_\odot^{2/7}}{\mathcal{R} T_0 r^2} =$

$= -\frac{GM_\odot R_\odot^{2/7}}{\mathcal{R} T_0} p r^{-\frac{12}{7}}$

tedy $\ln p = -\frac{GM_\odot R_\odot^{2/7}}{\mathcal{R} T_0} r^{-5/7} + \text{konst} \Rightarrow$

tedy problém $\rightarrow$ Parkerova teorie slunečního větru