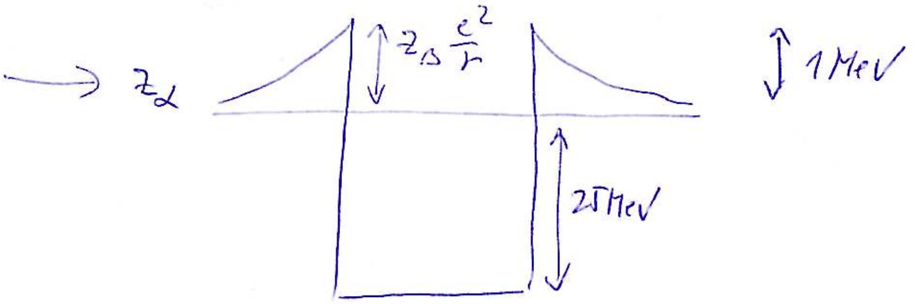
gamovův peak

reakce pomalé → přesto ⊕ + ⊕ reagují



tempo reakcí na jednotku hmotnosti:

$$r_{\alpha\beta} \propto n_\alpha n_\beta \langle \sigma v \rangle,$$

$$\text{kde} \quad \langle \sigma v \rangle = \int \sigma v \frac{dn}{n}$$

$\frac{dn}{n}$ → poměrný počet částic v intervalu $[E, E+dE]$

tok částic α $(n_\alpha v)$ na částice β s účinným průřezem interakce σ

$\frac{dn}{n}$ — z rozdělení, před. používám: Maxwell–Boltzmann

$$\frac{dn}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} E^{1/2} dE$$

potom $\underline{r_{\alpha\beta}} \propto \int \sigma v \, e^{-E/kT} E^{1/2} dE \propto \left| E = \frac{1}{2} m v^2 \right|$

$$\propto \int \sigma E^{1/2} e^{-E/kT} E^{1/2} dE \doteq \underline{\int \sigma E e^{-E/kT} dE}$$

účinný průřez → odhadneme z de Broglieho vlnové délky a korigujeme na tunelový jev

de Broglie $\lambda \cancel{= \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu}} \neq \lambda_p = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$

$\sigma \propto \lambda_p^2$ krát pravd. tunelového jevu, $\propto \exp\left(\frac{E_c}{E}\right)$,

$$\text{kde} \quad E_c = \frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{\lambda_p}$$

pak $\sigma \cancel{\propto} \sim \lambda_p^2 e^{-\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{\lambda_p E}} \sim \frac{h^2}{2mE} e^{-\frac{Z_\alpha Z_\beta e^2}{h} \frac{\sqrt{2mE}}{E}} \sim$

$$\sim \frac{h^2}{2mE}\, e^{-\frac{Z_\alpha Z_B}{h}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{E}}} \propto \frac{1}{E}\, e^{-\frac{b}{E^{1/2}}}$$

$$b = + \frac{Z_\alpha Z_B e^2 \sqrt{2m}}{\hbar}$$

pak reakční tempo:

$$r \propto \int \cancel{E}\, e^{-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}}}\, dE$$

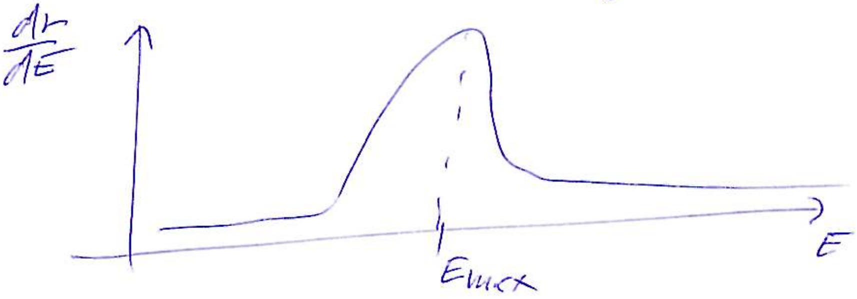
$\frac{dr}{dE}$ – fce „efektivity" reakcí v závislosti na energii

maximum této fce.

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{dr}{dE}\right) = 0 = e^{\left(-\frac{E_{max}}{kT} - \frac{b}{E_{max}^{1/2}}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{kT} + \frac{1}{2} b\, E_{max}^{-3/2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{kTb} = E_{max}^{-3/2} \Rightarrow \underline{E_{max} \propto \left(\frac{bkT}{2}\right)^{2/3}}$$

Gamowův peak



odtud → peak je velmi úzký, ostatní energie příliš nepřispívají → ~~integrál nahradíme hodnotou integrandu v maximu~~ integrand approximovat gaussiánem ~~a počítat konstantní šířku píku~~

~~r ∝~~ pak

$$r \propto \boxed{\frac{1}{T^{2/3}}}\, e^{-\frac{a}{T^{1/3}}}, \quad a = \frac{3(b/2)^{2/3}}{k^{1/3}}$$

↑ ! $\frac{1}{T^{3/2}}$ z M-B rozdělení + faktor z integrace

Odhady v rovnic vnitřní struktury

teplota v centru: rce hydrostatické rovnováhy
+ stavová rce

$$\boxed{\langle \rho \rangle} \propto \frac{M_\odot}{R_\odot^3}$$

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{0 - P_c}{R_\odot - 0} \sim - \frac{G M_\odot \langle \rho \rangle}{(R_\odot - 0)^2} \sim - \frac{G M_\odot^2}{R_\odot^5}$$

$$\Rightarrow P_c \sim \frac{\mathcal{R} \langle \rho \rangle T_c}{\mu} \sim \frac{\mathcal{R} M T_c}{\mu R_\odot^3}$$

$$\Rightarrow T_c = \frac{\boxed{P_c} \mu R_\odot^5}{\mathcal{R} M_\odot} \approx \frac{G M_\odot^2}{R_\odot^4} \frac{\mu R_\odot^3}{\mathcal{R} M_\odot} \sim \frac{G M_\odot \mu}{\mathcal{R} R_\odot} \sim$$

$$= 1{,}4 \times 10^7 K$$

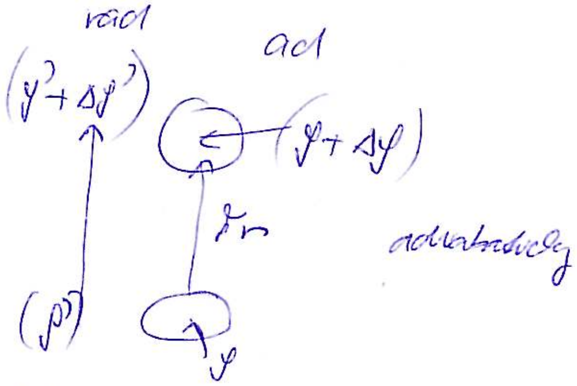
pro $\mu = 0{,}6$

konvekce

Mixing-length theory

– transport energie konvekcí

pohybová rce pro bublinu



$$\rho \frac{d^2 \delta r}{dt^2} = - g \Delta\rho =$$

$$= - g \left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{ad} - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{rad} \right] \delta r =$$

$$\cancel{= - g \rho \left[\left(\frac{d \ln \rho}{dr}\right)_{ad} - \left(\frac{d \ln \rho}{dr}\right)_{ad} \right] \delta r}$$

$$\rho = \frac{\mu P}{RT} \; ; \; \frac{d\mu}{dr} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dr} = \frac{\mu}{RT}\frac{dp}{dr} - \frac{\mu p}{R}\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dr} =$$

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{ad} - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{rad} = \cancel{\frac{\mu}{RT}\frac{dp}{dr}} - \left(\frac{\mu p}{R}\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dr}\right)_{ad} - \left[\cancel{\frac{\mu}{RT}\frac{dp}{dr}} - \left(\frac{\mu p}{R}\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dr}\right)_{rad}\right] =$$

$$= - \frac{\mu P}{RT^2} \left[\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} - \left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} \right] =$$

$$= - \frac{\mu p}{RT^2} \left[\left(\frac{dT}{d\ln p}\right)_{ad} \frac{d \ln p}{dr} - \left(\frac{dT}{d \ln p}\right)_{rad} \frac{d \ln p}{dr} \right] =$$

$$= - \frac{\mu p}{RT^2} \underbrace{\boxed{\frac{d \ln p}{dr}}}_{= -\frac{1}{H_p}} T \left[\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{ad} - \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{rad} \right] =$$

$$\overset{7}{=} + \overset{\rho}{\boxed{\frac{\mu p}{RT}}} \frac{1}{H_p} \left[\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{ad} - \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{rad} \right]$$

$$\rho \frac{d^2 \delta r}{dt^2} = - g \rho \frac{1}{H_p} \left[\underbrace{\boxed{\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{ad}}}_{\nabla} - \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{rad} \right]$$

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} = - \frac{g}{H_p} (\nabla_{ad} - \nabla) \delta r = - N^2 \delta r$$

$$N^2 = \frac{g}{H_p} (\nabla_{ad} - \nabla)$$ Brunt-Väisälä

pro $N^2<0$ → rostoucí řešení → konv. nestabilita

pro $N^2>0$ → oscilující řešení

$\delta r \sim \sin(Nt)$ ⇒ g-mody oscilací

$$\frac{d^2\delta r}{dt^2} = -\frac{g}{H_p}(\nabla_{ad}-\nabla)\,\delta r \qquad \Big/ \cdot 2\frac{d\delta r}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2 = +\frac{g}{H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,\frac{d\delta r^2}{dt} \qquad \Big/ \int dt$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2 = \frac{g}{H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,\delta r^2$$

zavedeme „mixing-length" → element cestuje bez porušení vzdálenost l, pak splyne s okolím

l tak, aby $\delta r = l/2$

zavedeme střední konvektivní rychlost

$$\frac{d\delta r}{dt} = \bar{v}$$

$$\Rightarrow \bar{v}^2 = \frac{g}{4H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,l^2$$

---

tok energie $F_c = \rho v^2 \cdot v \sim \rho\left[\frac{g}{4H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,l^2\right]^{3/2}$

hluboko v KZ: $\nabla > \nabla_{ad}$, ale málo $\frac{\nabla-\nabla_{ad}}{\nabla} \ll 1$

⇒ rychlost malá, dost času, rovnováha, ~~naplnění~~

→ efektivní konvekce

pod povrchem $\frac{d\rho}{dr}$ ostrý pokles ⇒ rychlost velká

$\nabla \gg \nabla_{ad}$ → rychlost ↗ rychlost zvuku

→ superadiabatická zóna

definujeme $\boxed{l = \alpha H_p}$, $\alpha \sim 1$

↑ volný parametr modelu

Konvekce se zářivými ztrátami

element vyzařuje během vzestupu

$\nabla' \neq \nabla_{ad}$; $\bar{v}^2 = \frac{g}{4H_p}(\nabla - \nabla')l^2$

teplotní změna ve vzestupném elementu

$$\Delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr}\right)' - \underbrace{\frac{dT}{dr}}_{\text{okolí}}\right]\delta r$$

↑ vůči okolí

↑ teplotní gradient v rámci bubliny (není adiabatický, protože vyzařuje do okolí)

položíme $\alpha = l/H_p$

tok energie konvekcí aproximujeme

$$F_c = \underbrace{\Delta T \rho c_p}_{\substack{\text{energie} \\ = \text{teplo}}} \underbrace{\bar{v}}_{\text{rychlost}}$$

← kalorimetrická rovnice

$$(**)\quad \Delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr}\right)' - \frac{dT}{dr}\right]\delta r = (\nabla - \nabla')\frac{T\delta r}{H_p}$$

$$\nabla' = -H_p \frac{d\ln T}{dr}$$

$$\delta r = l/2, \quad l = \alpha H_p \Rightarrow \delta r = \frac{\alpha H_p}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta T = (\nabla - \nabla')\frac{T\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow F_c = \alpha \rho c_p T v \frac{(\nabla - \nabla')}{2}$$

ztráta vyzařováním → z rovnice vnitřní struktury
→ rce tepelné rovnováhy

$$(*)\quad F_R' = -\frac{16\sigma T^3}{3\varkappa\rho}\frac{\Delta T}{d} = \frac{\delta\alpha\sigma T^4}{3\varkappa\rho d}(\nabla' - \nabla)$$

$d \rightarrow$ vzdálenost na níž $\Delta T \rightarrow 0$

$\sim$ rozměr bubliny

celkový přenos konvekcí → adiabatický + korekce od adiabatického

$$F_c = F_c^{ad} + F_c' = \underbrace{\alpha \rho c_p v T(\nabla - \nabla_{ad})/2 + \alpha \rho c_p v T(\nabla_{ad} - \nabla')/2}_{\text{stejné jako definice ~~[illegible]~~ výše}}$$

o tolik je přenos méně efektivní, než za předpokladu adiabatičnosti

v rámci bubliny rovnováha

$$F_R' = F_c' \quad \text{(díky konvektivní deficit se vyzáří)}$$

čili
$$\boxed{\frac{\delta \sigma T^4}{3\varkappa \rho d}(\nabla' - \nabla) = \rho c_p v (\nabla_{ad} - \nabla')}$$

$$v = \left[\frac{g}{4H_p}(\nabla - \nabla')\ell^2\right]^{1/2}$$

rovnováha toku energie

$$F_R + F_c = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

$$\boxed{\frac{16\sigma T^4}{3\varkappa \rho H_p}\nabla + \alpha \rho c_p T \ell \sqrt{\frac{g}{4H_p}}\frac{(\nabla - \nabla')^{3/2}}{2} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}}$$

$$\frac{\Delta T}{d} = \nabla \frac{Td}{H_p} \cdot \frac{1}{d} = \frac{T\nabla}{H_p}$$ (analogie * s použitím **

dvě rovnice pro ∇ a ∇', ∇_{ad} známe

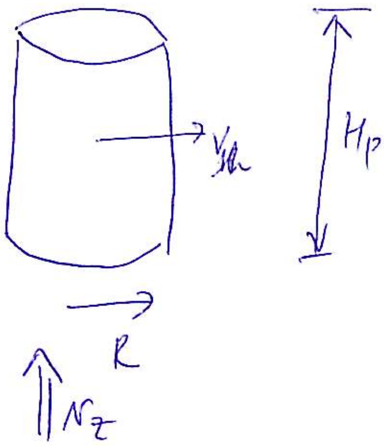
Pozn: Ledouxův parametr konvektivní stability

$$A^* = \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln p}{d\ln r} - \frac{d\ln \rho}{d\ln r}$$

pro $A^* < 0$ → konvektivní nestabilita

Slunce: $\frac{dT}{dr}$ prudší ve vnějších vrstvách ⇒ vzniká konvekce, aby se udržel tok tepla ($\sim T^3$)

konvektivní škály



rce kontinuity:

$$\pi R^2 v_z \rho \sim 2\pi R H_p \rho v_h$$

$$\Rightarrow R \sim 2 H_p \frac{v_h}{v_z}$$

odhady pro rychlosti:

balance zářivých ztrát a toku enthalpie

$$H = U + pV$$

$$\sigma T_{eff}^4 \sim \rho v_z H$$

pro plazma: $H = \frac{5}{2} kT + x\chi$

χ ... ionizační potenciál vodíku

x ... zastoupení (poměrné) vodíku

$$\Rightarrow v_z = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\rho H}$$

pro $x \sim 0{,}1$ a sluneční hodnoty při povrchu

$$v_z \sim 2 \text{ km/s}$$

horizontální rychlost odhadneme shora rychlostí zvuku → ve fotosféře $c_s \sim 7$ km/s

$$\Rightarrow 2R = \underbrace{4 \text{ Mm}}_{} \quad \text{pro } H_p = 300 \text{ km}$$

horní limit na velikost buněk konvekce na termální škále hloubková závislost

$$R \sim 2H_p \frac{N_w}{N_z} = 2H_p \frac{c_s}{N_z} = 2H_p \frac{c_s}{\frac{\sigma T_g^4}{\rho(5/2\, kT + X\chi)}} =$$

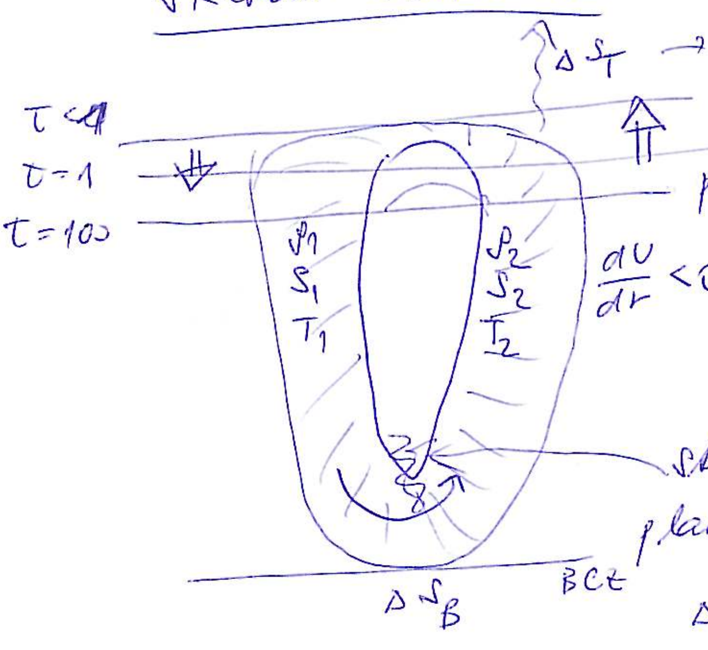
$$= 2H_p \frac{c_s (5/2\, kT + X\chi)\rho}{\sigma T_{eff}^4}$$

$$\frac{\partial H_p}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial c_s}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} < 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial R}{\partial r} < 0}}$$

s výškou velikost konvektivních struktur klesá, neboli s hloubkou roste

Sketch konvekce



ΔS_T → ztráta entropie zářením

pro $T_2 < T_{ion}$ → rekombinace, prudké zchlazení materiálu fotony

stlačování a mixování → S_2 roste

platí $\rho_1 > \rho_2$, $S_1 < S_2$, $T_1 < T_2$

$\Delta S_T >> \Delta S_B$

pohyb řízen od povrchu, kde jsou fluktuace entropie největší (větší než u dna konvektivní zóny)

většinu práce vykonají klesající proudy

---

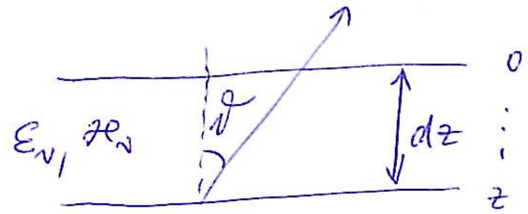
do 20Mm → nárůst teploty z 4300 K na 143 000 K
hustoty o 5,5 řádu
tlaku o 7 řádů

ke dnu KZ – srovnatelný počet řádů v hustotě v tlaku jádro

atmosféra

→ model = popis změn teploty, tlaku, hustoty, ... s výškou

→ RTE → jak se mění intenzita s výškou



$\mu = \cos\vartheta$

RTE: $$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = -\varkappa_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu \quad /:\varkappa_\nu$$

$$\mu \frac{dI_\nu}{\varkappa_\nu dz} = -I_\nu + \frac{\varepsilon_\nu}{\varkappa_\nu} \quad , \quad \frac{\varepsilon_\nu}{\varkappa_\nu} = S_\nu$$

$$d\tau_\nu \doteq \varkappa_\nu dz$$

tedy: $$\underline{\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu}$$

formální řešení pro polonekonečnou atmosféru

$$I_\nu(0,\mu) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu)\, e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}\, d\tau_\nu$$

obecné řešení pro integraci od τ_1 do τ_2

$$I_\nu = \frac{1}{\mu} I(\tau_1)\, e^{-\frac{(\tau_2-\tau_1)}{\mu}} + \frac{1}{\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau')\, e^{-\frac{(\tau_2-\tau')}{\mu}}\, d\tau'$$

uvažujeme lineární aproximaci

$$S_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(0) + b\,\tau_\nu$$

takže $$I_\nu(0,\mu) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu} \boxed{S_\nu(0)}\, e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}\, d\tau_\nu + $$

$$+\, b \int_0^\infty \tau_\nu \frac{1}{\mu}\, e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}\, d\tau_\nu =$$

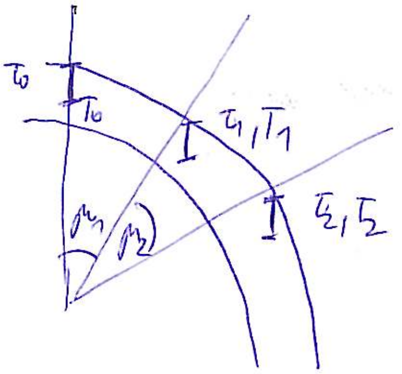
$$= \left| \int_0^\infty e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1 \; ; \; \int_0^\infty x e^{-x}dx = \left[e^{-x}(-x-1)\right]_0^\infty = 1 \right|$$

$$= S_\nu(0) + b\mu$$

tedy intenzita se směrem μ je rovna zdrojové funkci v optické hloubce $\tau_\nu = \mu$

formálně: $I_\nu(0,\mu) = S_\nu(\tau_\nu)$ pro $\tau_\nu = \mu$

→ Eddingtonův - Barbierův vztah



$\tau_0 = \tau_1 = \tau_2$ (?)

$\delta r_0 > \delta r_1 > \delta r_2$

pro $T_0 > T_1 > T_2$

→ okrajové ztemnění

→ fotosféra přibližně v LTE ⇒ $S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T)$

⇒ $I_\nu(0,\mu) = B_\nu(T)$

↳ z pozorování na disku (pod různými μ) provádíme skenování průběhu teploty v atmosféře

dále: $d\tau_\nu = -\varkappa_\nu \, dz$ | diferencujeme v T

$$\frac{d\tau_\nu}{dT} = -\varkappa_\nu \frac{dz}{dT}$$

Eddington - Barbier:

$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(T)$ ⇒ $\frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}\frac{d\tau_\nu}{dT} = \frac{dB}{dT}$

⇒ $\boxed{\frac{d\tau_\nu}{dT}} = \frac{dB}{dT}\left(\frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}\right)^{-1}$

||

$I_\nu(0,\mu) = B_\nu(T)$ | $\frac{d}{d\mu}$

$\frac{dI_\nu}{d\mu} = \frac{dB}{dT}\frac{dT}{d\mu}$ ⇒ $\boxed{\frac{dB}{dT}} = \frac{dI_\nu}{d\mu}\left(\frac{dT}{d\mu}\right)^{-1}$

pokračujeme: $\frac{d\tau_\nu}{dT} = \underbrace{\left(\frac{dI_\nu}{d\mu}\right)\left(\frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}\right)^{-1}}_{} \left(\frac{dT}{d\mu}\right)^{-1}$

=1, protože $I_\nu(\mu) = S_\nu(\tau_\nu)$, tedy formální diferenciace $\frac{dI_\nu}{d\mu} = \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}$

⇒ $-\varkappa_\nu \boxed{\frac{dz}{dT}} = \left(\frac{dT}{\boxed{d\mu}}\right)^{-1}$

sken teploty podle úhlu

sken teploty podle hloubky

podobně: $d\tau_\nu = -\varkappa_\nu\, dz$

$$\frac{d\tau_\nu}{dT} = -\varkappa_\nu \left(\frac{dz}{dT}\right)_z$$ předchozího

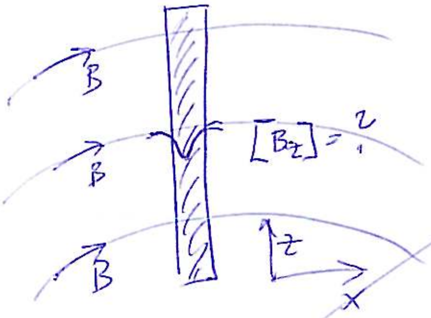
$\varkappa_\nu$ = konst přes atmosféru pro dané ν

$$\boxed{\frac{d\tau_\nu}{dT} = +\varkappa_\nu \frac{1}{\varkappa_\nu}\left(\frac{dT}{d\mu}\right)^{-1} = \left(\frac{dT}{d\mu}\right)^{-1}}$$

$$\varkappa_\nu \frac{dz}{dT} = \left(\frac{dT}{d\mu}\right)^{-1}$$

↳ lze určit závislost abs. koeficientu na frekvenci

Rovnováha v protuberanci



$$-\frac{dp}{dz} - \rho g + (j\times B)_z = 0$$

↑ zanedbatelné

hydrostatická rovnováha

pro $T \sim 10^4$ K → výšková škála ~ 300 km

↳ konflikt s pozorovanými výškami

↳ integrujeme přes plochu (ve směru x)

$$g\int \rho\, dx = \int (j\times B)_z\, dx \quad \cancel{\approx \frac{1}{\mu}\int B_x \frac{\partial B_z}{\partial x}\, dx} \longrightarrow (*)$$

↑ $j = \frac{1}{\mu}\nabla\times B$

↑ plocha je tenká, takže zůstává jen derivace podle x

$$j = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ & \times & \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z},\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

pro $B = (B_x, B_y, B_z)$; $B_y \equiv 0$, $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$

$$j = \left(0, \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}, 0\right)$$

pak $(j \times B)_z = \frac{1}{\mu}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}\right]_z = \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right) \end{pmatrix}_z =$

$$= -\frac{1}{\mu} B_x \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)$$

vrstva je tenká, tedy B_x spojité přes vrstvu

$$\sim \frac{\partial B_z}{\partial x} \gg \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$[B_z] = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial B_z}{\partial x} dx$$

pak vskutečnosti

(*) $g \int \rho \, dx \approx -\frac{1}{\mu} \int B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} dx \sim \frac{1}{\mu} B_x [B_z]$

B_x: spojité, tedy z integrálu ven

$[B_z]$: skok v B_z přes plochu

pro prominenci $v[\cancel{X}] = 5000$ km, $\rho = 10^{-10}$ kg/m^3, $B_x = 10^{-3}$ T

$$\Rightarrow \underline{[B_z] \sim 2 \times 10^{-4} \, T}$$

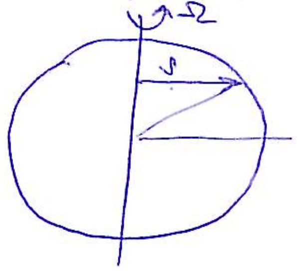
velmi malá změna, nelze měřit

Rotace Slunce

- diferenciální
- rovník o 30% rychlejší než póly
- zářivá zóna rotuje ~ rigidně, rychleji než póly, ale pomaleji než rovník

Efekty rotace na vnitřní strukturu

↳ rce hydrostatické rovnováhy musí být modifikována → započtení odstředivé síly



$$\nabla p = -\rho g + \rho \Omega^2 \vec{s} =$$

$$= -\rho \nabla \Phi + \rho \Omega^2 \vec{s} =$$

$$= -\rho \underbrace{\nabla \Psi} \qquad (1)$$

modifikovaný "potenciál", zahrnuje i vliv odstředivé síly

pro Ω konst. na válcích ⇒ má potenciál = konzervativní

$$\Omega^2 s = -\nabla V, \quad V = -\int_0^s \Omega^2 s \, ds$$

pak $\nabla \Phi \parallel \nabla V$ ⇒ izoplochy Ψ jsou totožné s plochami konstantního tlaku → závisí jen na Ψ

pro μ = konst ⇒ T také pouze funkcí Ψ,

$p = R \rho \, T/\mu$ ← vždy T/μ konstantní na ekvipotenciálních plochách

dále: $\nabla p = -\rho \nabla \Psi \quad / \nabla \times$

$$\underbrace{\nabla \times \nabla p}_{\doteq 0} = -\nabla \times (\rho \nabla \Psi) =$$

$$= -(\nabla \rho) \times (\nabla \Psi) - \underbrace{\rho (\nabla \times \nabla \Psi)}_{\doteq 0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = (\nabla \rho) \times (\nabla \Psi)$$

tedy i hustota je konstantní na ekvipotenciálních plochách

Rovnici kontinuity nahradit poissonovou

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho$$

$$\Delta \psi = \Delta \Phi + \Delta V = 4\pi G \rho - 2\Omega^2 \qquad (2)$$

Rovnice přenosu záření

$$L_R = - \frac{16\sigma T^3}{3\varkappa \rho} \nabla T = - \frac{16\sigma T^3}{3\varkappa\rho} \frac{dT}{d\psi} \nabla \psi$$

$$\Rightarrow L_R = f(\psi) \nabla \psi \qquad (3)$$

$$\text{pro } f(\psi) = - \frac{16\sigma T^3}{3\varkappa\rho} \frac{dT}{d\psi}$$

Rovnice energetické rovnováhy

$\nabla \cdot L_R = \rho \epsilon$ místně

$$\nabla \cdot L = \frac{df}{d\psi} (\nabla\psi)^2 + f(\psi) \Delta \psi =$$

$$= \frac{df}{d\psi} \underbrace{(\nabla\psi)^2}_{(g_{eff})^2} + \underbrace{f(\psi) \left[4\pi G\rho - 2\Omega^2\right]}_{\text{konst. na ekvipot.}} = \underbrace{\rho\epsilon}_{\text{konst. na ekvipotenciálách}}$$

není (!) konstantní na ekvipotenciále (g_{eff} větší u pólů)

⇒ pro rigidně konzervativně rotující hvězdu nelze rovnici energetické rovnováhy splnit

→ von Zeipelův paradox (1924)

→ tato odchylka od předpokladů → dodatečný transport energie od (teplejších) pólů ke (chladnějšímu) rovníku

→ meridionální cirkulace

charakteristický čas

$$\tau_{circ} \sim \frac{GM^2}{LR} \frac{1}{\xi} \sim \frac{\tau_{KH}}{\xi}$$

$\xi = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_c}$ … popisuje důležitost rotace $\xi = \frac{f_{centrifug}}{f_{grav}}$

pro ☉, $\tau_{circ} \sim 10^{12}$ let !

von Zeipelův paradox – interpretace: teplo přicházející není vyrovnáno teplem odcházejícím ⇒ element se buď ohřívá nebo ochlazuje vůči okolí. Vzplývavé síly vedou k cirkulaci v meridionální rovině.

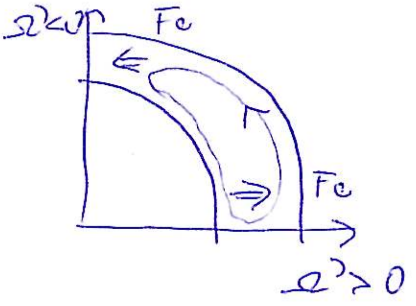
→ není stabilní, musí se měnit, nebo musí být energie vyzářena v nelokální formě (z hlediska rozložení)

Dále (Baker & Kippenhahn 1959) → cirkulace se ustaví pro všechny typy rotace, Roxburgh (1966) → ustaví se pro všechny konzervativní zákony

↳ lze najít stabilní řešení, když ale rotace v cirkulaci bude nekonzervativní → odstředivá síla nemá potenciál

pozn.

pro ☉ není globální cirkulace důležitá – vzniká jiná forma cirkulace → turbulentní pumping



$\underline{\Omega' = \Omega - \Omega_{mean}}$

$F_C \sim -\Omega \times v$ diferenciální rotace

Mechanismus diferenciální rotace

→ zachování úhlového momentu v konvektivní zóně

$\mathcal{L} = r \times p = \text{konst.}$

$\vec{v}$ superpozice rotace $\langle v_\varphi \rangle$ a meridionální cirkulace $\vec{v}_m = (\langle v_r \rangle, \langle v_\vartheta \rangle)$ a konvektivní $\vec{w}$

$\langle\,;\rangle$ … průměr přes φ (délku)

$$v = \langle v \rangle + w \quad \Big| \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \qquad (2)$$

azimutální složka   pro $v = \langle v\rangle + w$

$$\langle v_\varphi\rangle = v_{\varphi rot} = \underbrace{r\sin\vartheta}_{s}\,\Omega = s\Omega$$

(1) $\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_\varphi\langle\nabla\cdot v\rangle_\varphi = 0$ $/\cdot s\rho$

(2) $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\langle(\rho v)\rangle_\varphi = 0$ $/\cdot s\rho$

$\frac{\partial\rho}{\partial t} \to 0 \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot(\rho v) = 0$ z rce kontinuity

(1) $s\rho\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + s\rho(\vec v\cdot\nabla)_\varphi v_\varphi = 0$

$$(\rho v\cdot\nabla)v = \nabla\cdot(\rho\vec v\vec v) - \underbrace{(\nabla\cdot\rho v)}_{=0}v = \nabla\cdot(\rho\vec v\vec v)$$

$= 0$ → anelasticita

$$v = \overset{\vec v_{rot}}{\begin{pmatrix}0\\0\\v_{\varphi rot}\end{pmatrix}} + \overset{\vec v_m}{\begin{pmatrix}v_r\\v_\vartheta\\0\end{pmatrix}} + \overset{\vec u}{\begin{pmatrix}w_r\\w_\vartheta\\w_\varphi\end{pmatrix}}$$

rotace   cirkulace   konvekce

$$\frac{\partial}{\partial t}(s\rho v_\varphi) + \nabla\cdot\left(s\rho\langle\vec v v_\varphi\rangle_\varphi\right) = 0$$

$$\langle\vec v v_\varphi\rangle_\varphi = \langle(\vec v_{rot} + \vec v_m + \vec w)(v_{rot} + w_\varphi)\rangle_\varphi =$$

$$= \langle\vec v_{rot}v_{rot} + v_{rot}\vec v_m + v_{rot}\vec w + \vec v_{rot}u_\varphi + \vec v_m w_\varphi + \vec w w_\varphi\rangle_\varphi =$$

$$= \underbrace{v_{rot}^2\frac{\vec v_{rot}}{v_{rot}}} + v_\varphi\vec v_m + \underbrace{v_{rot}\langle\vec u\rangle_\varphi + \vec v_{rot}\langle u_\varphi\rangle_\varphi + \vec v_m\langle w_\varphi\rangle_\varphi}_{=0} + \langle\vec u u_\varphi\rangle_\varphi$$

↳ nezajímavé vzhledem k $\nabla\cdot$ $(\nabla\cdot\vec a = 0)$

tedy $\frac{\partial}{\partial t}(s\rho v_\varphi) + \nabla\cdot\left(\underbrace{\vec v_{rot}v_{rot}}_{=0} + \rho s v_\varphi\vec v_m + \rho s\langle\vec w u_\varphi\rangle_\varphi\right) =$

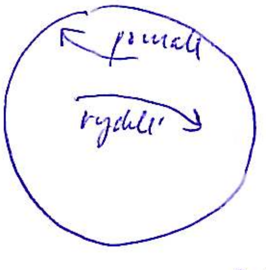
pro $v_\varphi = s\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\rho s^2\Omega}_{=\mathcal{L} = \text{konst.}}\Big) + \nabla\cdot\left(\rho s^2\Omega\vec v_m + \rho s\langle\vec u u_\varphi\rangle_\varphi\right) = 0$$

→ změny $\mathcal{L}$ buď meridionální cirkulací nebo konvekcí

pro $\mathcal{L}$ = konst rovnováha

⇒



pro u_φ ↗ ⇒ v_m ↘

⇒ urychlování rovníku

pro u_φ ↘ → v_m ↗

→ zpomalování pólů

→ problém: $\frac{\partial y}{\partial t}$ a $\nabla \cdot \rho$ nelze zanedbat, protože to řídí konvekci

$\langle u_\varphi \vec{u} \rangle$ … Reynoldsův tenzor

$Q_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$ obecně

teorie středního pole

→ rozdělení Q_{ij} do difuzní a nedifuzní části

difuzní: ohlazuje turbulence na velkých škálách

def: $(Q_{r\varphi}, Q_{\vartheta\varphi}) = -\nu_t \, s \nabla \Omega$ ← $s = r \sin\vartheta$ aby členy zmizely na pólu

↳ turbulentní difuzivita

pro $\vec{v}_m = 0$ → uniformní rotace

zavedeme anizotropní viskozitu – jiné modely

$$(*) \quad \begin{aligned} Q_{r\varphi} &= -\nu_t \, r \sin\vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \underbrace{\Lambda_r \sin\vartheta \, \boxed{\Omega}}_{\text{nedifuzní část, }\Lambda\text{-efekt}} \\ Q_{\vartheta\varphi} &= -\hat{s}\nu_t \sin\vartheta \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} + \Lambda_h \cos\vartheta \, \boxed{\Omega} \end{aligned}$$

proporcionální Ω, protože existují kvůli Ω

meridionální cirkulace vyrovnává pokles diferenciální rotace difúzí

pro $Q_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$ ⇒ Λ_r postačí být fcí r, ale

Λ_h musí být fcí alespoň $\sin^2\vartheta$

odhady: $\nu_t \sim l w$, l a w z mixing-length

možná transport by měl být jiný v radiálním a horizontálním směru ⇒ ν_t nahradit tenzorem $\nu_t \to \nu_{ij} = \nu_t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}$

s bezrozměrný parametr popisující anizotropickou viskozitu

pak pro definici složek Reynoldsova tenzoru

$\Lambda_r = 2\nu_t(\hat{s}-1)$, $\Lambda_H = 0$ (speciální případ)

úvaha: mějme $\Lambda_H = 0$ a $v_m = 0$. Pak (výpočtem)

$\Omega = \Omega(r)$, nekonzervativní, tedy nevyrovnává ∇p

$\Rightarrow$ nutné v_m $\Rightarrow$ předpoklad v_m je špatný

$\Rightarrow$ musí být v_m vyrovnávající pozorované $\frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta}$

↳ esence modelů s anizotropickou viskozitou

tedy $\Lambda_H \neq 0$ $\rightarrow$ diferenciální rotaci udržuje nejen v_m, ale i horizontální nedifuzivní komponenta

↳ pak v principu meridionální cirkulace není potřeba

<u>odhady</u> – v_φ turbulentní rychlost elementu

horizontální Coriolisovo zrychlení: $2\Omega v_\varphi \cos\vartheta$

během korelačního času τ_c vede k rychlosti

$$v_\vartheta = 2\,Co_c\, v_\varphi \cos\vartheta$$

$$\underbrace{Co_c \simeq \mathrm{Min}(Co, 1)}_{} * \qquad Co = \Omega\tau_c$$

podobně v meridionálním směru

$$\left.\begin{aligned} \langle v_\vartheta v_\varphi\rangle &= 2\,Co_c\left(\langle v_\varphi^2\rangle + \langle v_\vartheta^2\rangle\right) \\ \langle v_r v_\varphi\rangle &= 2\,Co_c\left(\langle v_\varphi^2\rangle + \langle v_r^2\rangle\right)\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

<u>případy:</u> a) pomalá rotace: $Co \ll 1$

$$\langle v_r^2\rangle > \langle v_\varphi^2\rangle \sim \langle v_\vartheta^2\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} \sim 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial r} < 0$$

buď jsou stejné, nebo jsou stejné po dobu Coriolisova čísla

b) rychlá rotace

1. $\langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_r^2 \rangle / \sin^2\vartheta \sim \langle v_\vartheta^2 \rangle / \cos^2\vartheta$

$\Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} < 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial r}\Big|_{eq}$ malé $, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial r}_{pólu} < 0$

$\rightarrow$ konvektivní trubice

2. $\langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_r^2 \rangle > \langle v_\vartheta^2 \rangle / \cos^2\vartheta$

$\rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial r} \sim 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} < 0$

$\rightarrow$ banánové buňky

Pro ☉ : banánové buňky v KZ

$\frac{\partial\Omega}{\partial r} < 0$ pod povrchem (kde $Co < 1$)

(*) + (**)

$\langle v_r v_\varphi \rangle = Q_{r\varphi} = 2 Co_L \left(\langle v_\varphi^2 \rangle + \langle v_r^2 \rangle \right) \sin\vartheta = -\nu_t \, r \sin\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial r}$

$\langle v_\vartheta v_\varphi \rangle = Q_{\vartheta\varphi} = 2 Co_L \left(\langle v_\varphi^2 \rangle + \langle v_\vartheta^2 \rangle \right) = -\nu_t \, \hat{s} \sin\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}$

a) : $Co \ll 1, \quad \langle v_r^2 \rangle > \langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_\vartheta^2 \rangle$

$2 \, Co_L \langle v_r^2 \rangle = -\nu_t \, r \frac{\partial\Omega}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial r} < 0$

$0 \sim -\nu_t \, \hat{s} \sin\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} \Rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta} \sim 0$

b 1) $Co \sim 1, \quad \langle v_\varphi^2 \rangle \sim \langle v_r^2 \rangle / \sin^2\vartheta \sim \langle v_\vartheta^2 \rangle / \cos^2\vartheta$

$2 \, Co_L \left[\langle v_r^2 \rangle \left(1 + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \right) \right] \approx -\nu_t \, r \sin\vartheta \frac{\partial\Omega}{\partial r}$

$\vartheta = 0$: $0 \sim 0 \rightarrow$ z důvodu ~~[illegible]~~ spojitosti $\frac{\partial\Omega}{\partial r} \sim 0$

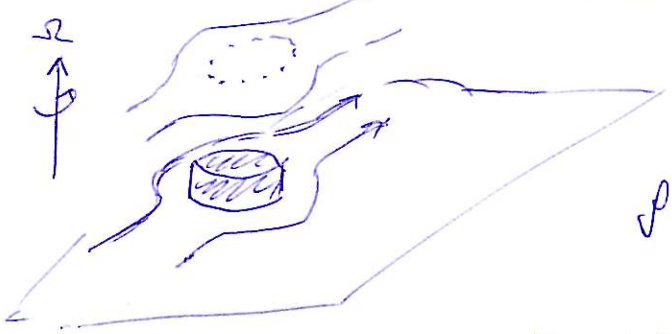
$\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $4 Co_L \langle v_r^2 \rangle \sim -\nu_t \, r \frac{\partial\Omega}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial\Omega}{\partial r} < 0$

⋮

Taylorův - Proudmanův teorém

- pokud se pevné těleso pomalu pohybuje tekutinou, která se otáčí s vysokou rychlostí Ω, pak bude rychlost tekutiny kolem tohoto tělesa taková, že bude konstantní podél libovolné přímky rovnoběžné s osou rotace.

Ω musí být větší než $v_{\text{tělesa}}$, aby $F_{\text{cor}} \gg F_{\text{centrifug}}$



Navier - Stokes:

$$\rho (w \cdot \nabla) w = F - \nabla p$$

$$F = -2\rho \, \Omega \times w + \nabla \Phi$$

po zanedbání menších členů a nekompresibilní tekutina (ρ = konst)

$$2\rho \, \Omega \times w = -\nabla p \quad / \cdot \nabla \times$$

$$2\rho \, \underline{\nabla \times (\Omega \times w)} = -\nabla \times \nabla p = 0$$

~~$\underbrace{\Omega \, \nabla \cdot w}_{= 0 \text{ z rce kontinuity}} + (\nabla \cdot \Omega) w = 0$~~

$$\nabla \times (\Omega \times w) = \nabla \times (\Omega_c \times w) + \nabla \times (\Omega \times w_c) =$$

$$= \underbrace{\Omega_c \, \nabla \cdot w}_{=0 \text{ z rce kont.}} - (\Omega_c \cdot \nabla) w + \underbrace{(w_c \cdot \nabla) \Omega}_{=0,\ \Omega = \text{konst.}} - \underbrace{w_c (\nabla \cdot \Omega)}_{=0 \text{ předpoklad } \nabla \cdot \Omega = 0}$$

$$\Rightarrow (\Omega \cdot \nabla) w = 0 \Leftarrow \text{Taylor - Proudman}$$

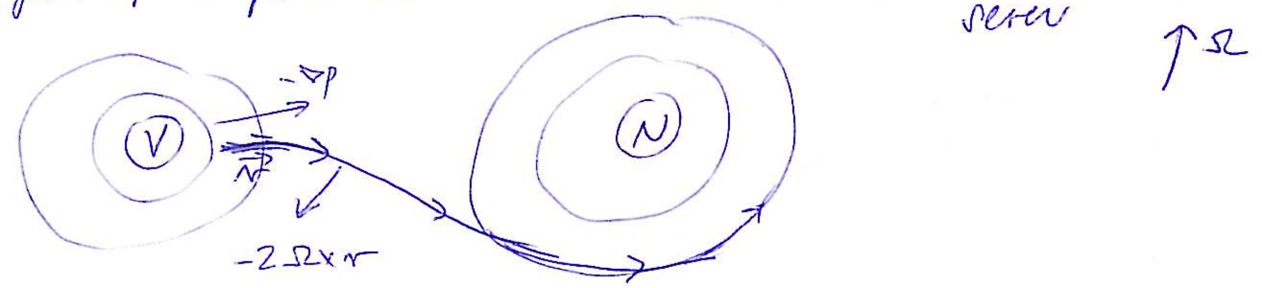
v komponentách: $\Omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

pro kartézský systém, kdy $\Omega_x = \Omega_y = 0$, $\Omega_z \neq 0$

$$\underline{\frac{\partial w}{\partial z} \overset{!}{=} 0}$$

→ geostrofické proudění - rovnováha Coriolisovy síly a gradientu tlaku

→ tepelný vítr - část geostrofického proudění, která splňuje Taylor - Proudman stále geostrofické proudění



Torzní oscilace

geostrofický tok ?

(*) $\frac{\partial p}{\partial x} = -2\rho v_x \Omega \sin\vartheta$

aktivní pásy – systém s nižším tlakem?

$\frac{\delta p}{p} \sim \int_0^d \frac{\delta T}{T}\frac{dz}{H_p} \sim \frac{n\,\delta T}{T}$ n... počet H_p mezi 0 až d

aby $\delta p<0$, pak musí $\delta T<0$, ale to je (únik tepla v elementech)

pokud L příčný rozměr perturbace teploty

(**) $\frac{\delta p}{p} = -2 \sin\vartheta \frac{v\,\Omega L}{c_s^2}$ pro $c_s = 10^4$ m/s

$v = 5$ m/s

$L \sim 3\times10^8$ m

$\frac{\delta p}{p} \sim -5\times10^{-5}$

konvektivní oblast → stratifikace

→ „pseudopolytropní model" → polytropa s lineární teplotou

$T = T_0\,\xi$, $\xi = 1 + \frac{z}{z_0}$, $z=0$ fotosféra

pak $\rho = \rho_0\,\xi^2$

$p = p_0\,\xi^3$ v rovnováze $p_0 = z_0\rho_0\, g/3$

$\frac{d\ln T}{d\ln p} = \nabla = 1/3$

superadiabatický gradient: $\delta \equiv \nabla - \nabla_{ad} = \delta_0\,\xi^{-2}$

$\delta_0 \sim 0{,}25$

dohromady: (integrace $\quad \delta = \frac{d\ln T}{d\ln p}$

$$\frac{\Delta T}{T} = \int \delta \, d\ln p = \frac{3}{2} \delta_0 \xi^{-2}$$

tedy $\frac{\delta T}{T} = \underbrace{\epsilon}_{\left(\frac{\delta T}{T}\right)_0} \xi^{-2}$

Máme $\delta \ln p = \int_d^0 \frac{\delta T}{T} \frac{dz}{H_p} = \frac{\epsilon z_0}{2H_0} \xi^2$

H_0 ... povrchová

$(*) \rightarrow \cancel{v = -\frac{\partial p}{\rho} \frac{c_s^2}{2\sin\vartheta\,\partial x}}$

$$v_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\rho\Omega\sin\vartheta} = -\frac{p}{2\rho\Omega\sin\vartheta} \frac{\partial \ln p}{\partial x} =$$

$$\left| \frac{\partial \ln p}{\partial x} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = p \cdot \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right|$$

$$= -\frac{p}{2\rho\Omega\sin\vartheta} \frac{\delta \ln p}{\partial x} = v_g \frac{\xi^3}{\xi^2} \xi^{-2} = \underline{v_g \xi^{-1}}$$

$$\underline{v_g = \frac{\epsilon z_0}{2H_0} \frac{c_{s_0}^2}{2\Omega L \sin\vartheta}}$$

určit $\epsilon = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_0$

pro 10% kontrast: $v \sim 5$ m/s pro $z \sim 10$ Mm

pro $z_0 = 0$, $v \sim 100$ m/s

tj.

musí se započítat tření

$v_g = 250$ m/s

$v_{x0} = v_{y0} = \frac{v_g}{\lambda} \sin(ky)$ pro $\lambda = 40$

$\underline{v_{x0} = v_{y0} = 6 \text{ m/s}}$

turbulující charakter toku aktivních oblastí

↳ není to řešení odspodu, protože termální balance skrze konvektivní zónu $\tau \sim 10^5$ let

$\boxed{\text{Oscilace}}$

$\boxed{\text{výkonové spektrum}}$

→ rychlost, intenzita, ... → v kartézských souřadnicích rozklad do Fourierových komponent

$$a(k_x,k_y,\omega) = \iiint dx\,dy\,dt\;\; v(x,y,t)\; e^{i(k_x x + k_y y + \omega t)}$$

$$(k_x, k_y) = \vec{k}_h \quad , \; |k| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

power-spektrum P: $\quad P(k_x,k_y,\omega) = a^* a$

na kouli: rozklad do sférických harmonik:

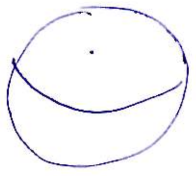
$$v = v(\vartheta,\varphi,t)$$

$$a(l,m,\omega) = \iiint v(\vartheta,\varphi,t)\; \underbrace{Y_l^m(\vartheta,\varphi)}_{\text{sférická harmonika}}\; e^{i\omega t}\; d\vartheta\, d\varphi\, dt$$

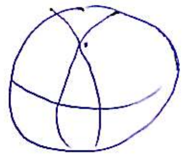
power spektrum: $\quad P(l,m,\omega) = a^* a$

v sférické symetrii $\quad P \neq P(m) \quad$ ← rotace symetrii narušuje

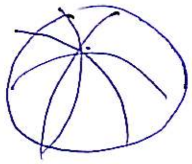
$$k_h = \frac{l(l+1)}{R}$$



$l=1,\ m=0$



$l=3,\ m=2$



$l=4,\ m=4$

Měření: teorémy DFT

signál měřen po dobu T $\Rightarrow \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ rozlišení

tedy nejmenší měřitelná frekvence

nejvyšší frekvence: Nyquistova, $\omega_{Ny} = \frac{\pi}{\Delta t}$, Δt vzorkování

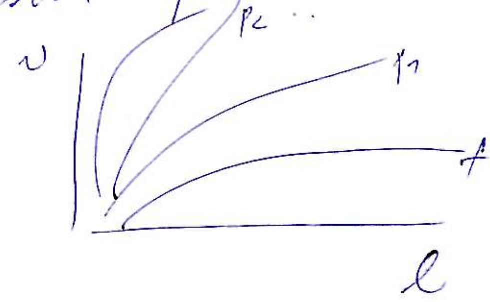
frekvence vyšší se vzorkují do nižších: aliasing

celkově ~~$\Delta\omega$~~ $\quad \Delta\omega = 2\pi/T \le \omega \le \pi/\Delta t$ s krokem $\Delta\omega$

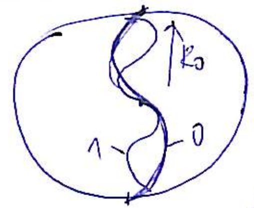
podobně pro prostorové frekvence

problém: pozorujeme na polokouli, na ní nejsou Y_l^m ortogonální ⇒ aliasing, falešné mody

klasické vyjádření oscilací: l–ν (k–ω) diagram



Základní mod



$\lambda \sim R_\odot$; $\lambda = 4R_\odot$

putující rychlost zvuku: $c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$

$\bar{p}$ → z rovnic vnitřní stavby

$$\bar{\rho} = \frac{3}{4\pi}\frac{M_\odot}{R_\odot^3}$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi\rho r^2} \; ; \qquad \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

hrubá diskretizace:

$$\frac{R_\odot - 0}{M_\odot - 0} = \frac{1}{4\pi\bar{\rho} R_\odot^2} \; ; \qquad \frac{0 - \bar{p}}{M_\odot - 0} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4}$$

$$\bar{p} = \frac{G}{4\pi R_\odot^2}\left(\frac{M_\odot}{R_\odot}\right)^2$$

$$c_s = \left(\gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\right)^{1/2} = \left[\gamma \frac{\frac{G}{4\pi R_\odot^3}\frac{M_\odot^2}{R_\odot^3}}{\frac{3}{4\pi}\frac{M_\odot}{R_\odot^3}}\right]^{1/2} = \left[\gamma \frac{G}{3}\frac{M_\odot}{R_\odot}\right]^{1/2}$$

oscilace: tam a zpět

$$\tau = \frac{\lambda}{c_s} = \frac{4R_\odot}{c_s} = \left[\frac{16R_\odot^2}{\gamma \frac{G}{3}\frac{M_\odot}{R_\odot}}\right]^{1/2} = \left[\frac{16}{3\gamma G}\frac{R_\odot^3}{M_\odot}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{16}{3\gamma G}\frac{3}{4\pi}\frac{4\pi}{3}\frac{R_\odot^3}{M_\odot}\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{4}{G\gamma\pi}\frac{1}{\bar{\rho}}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma\pi}}\left[G\bar{\rho}\right]^{-1/2}$$

pro ⊙:

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$

$\bar{\rho} = 1{,}409 \times 10^3\ kg/m^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = 47\ \text{min}}}$$

Lineární adiabatické oscilace nerotujícího Slunce

předpoklady: lineární, $\bar{v}/c_s \ll 1$

adiabatické: $\frac{dS}{dt} = 0$

sféricky symetrické pozadí

magnetismus a Reynoldsův tensor zanedbatelné

rovnice: kontinuity: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$

pohybová: $\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p - \rho g$

$\hookrightarrow g = \nabla \Phi$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v$$

adiabata: $p V^\gamma = \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{konst}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = \frac{dp}{dt}\frac{1}{\rho^\gamma} + p\frac{d}{dt}\frac{1}{\rho^\gamma} = \left(\frac{dp}{dt} - p\gamma\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)\frac{1}{\rho^\gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} - \underbrace{\left(\frac{p\gamma}{\rho}\right)}_{c^2}\frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} - c^2\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Poissonova: $\Delta \Phi = 4\pi G \rho$

porucha malá vůči pozadí: $v_0 = 0,\ \rho_0 = \rho_0(r),\ p_0 = p_0(r)$

$\vec{\xi}(t)$ … výchylka

$$\vec{v} = \cancel{\frac{d\xi}{dt}} \approx \overrightarrow{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$$

perturbace: p, ρ, Φ → Eulerovské → v poloze

$$\rho(r,t) = \rho_0(r) + \rho'(r,t)$$

Lagrangeovské → na částici

$$\delta\rho\,(\cancel{r} + \xi) = \rho_0(r) + \delta\rho(r,t)$$

Lagrange vs. Euler

radiální pozice

$$\delta\rho = \rho' + (\xi \cdot \nabla\rho_0) = \rho' + (\xi \cdot e_r)\frac{d\rho_0}{dr} =$$

$$= \rho_0 + \underbrace{\xi_r}_{\text{radiální výchylka}}\frac{d\rho_0}{dr}$$

linearizujeme: $\rho = \rho_0 + \rho'$, $v = v_0 + v'$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0 , \quad \rho' v' \to 0, \quad \nabla\cdot v_0 = 0 , \quad v_0 = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v_0)}_{=0 \to \text{řešení pro pozadí}} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v') = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v') = 0 \quad , \quad v' = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot(\rho_0 \xi) - \nabla\cdot\left(\xi \frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot(\rho_0 \xi) = \nabla\cdot\left(\xi \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}\right) = -\nabla\cdot\left[\xi\nabla\cdot\left(\rho_0 \overset{v_0}{\cancel{\frac{\partial \xi}{\partial t}}}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_0 v_0) = 0$$ integrujeme:

$$\rho' + \nabla\cdot(\rho_0 \xi) = \underbrace{-\int \nabla\cdot\left[\xi\,\nabla\cdot(\rho_0 v_0)\right]dt}_{=0}$$

celkové linearizované rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned} &\rho' + \nabla\cdot(\rho_0\xi) = 0 && (1)\\ &\rho_0\frac{\partial v'}{\partial t} = -\nabla p' - g\, e_r\, \rho' + \rho_0 \nabla\Phi' && (2)\\ &p' + \xi_r\frac{dP_0}{dr} = c_0^2\left(\rho' + \xi_r\frac{d\rho_0}{dr}\right) && (3)\\ &\Delta\Phi' = 4\pi G\rho' && (4)\end{aligned}}$$

+ Cowlingova aproximace vliv místní, nepůsobí poruchu gravitačního potenciálu , $\Phi' \equiv 0$

+ přepis do sférické geometrie (r, ϑ, φ)

$$\vec{\xi} = \xi_r \vec{e_r} + \underbrace{\vec{\xi_h}}$$

zde lze předpokládat symetrii (stratifikace je radiální)

$$\nabla\cdot\vec{\xi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\xi_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,\xi_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\xi_\varphi}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\xi_r) + \frac{1}{r}\nabla_h\vec{\xi_h}$$

(1) $\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 0$

$$\rho' + \nabla_r \cdot (\rho_0 \vec{\xi}_r) + \nabla_h \cdot (\rho_0 \vec{\xi}_h) = 0 \qquad \rho_0 \neq \rho_0(h)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho \xi_r) + \frac{\rho_0}{r}\nabla_h \cdot \vec{\xi}_h$$

(2) $\rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t} = -\nabla p' - g e_r \rho' + 0$ ↑ Coriolis

$$\boxed{v'} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla p' - g e_r \rho'$$ (radiální a horizontální část)

$$\rho_0 \left[\underline{\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2}} + \underline{\frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2}}\right] = -\underline{\nabla_r p'} - \underline{\frac{1}{r}\nabla_h p'} - \underline{g e_r \rho'}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\nabla_r p' - g e_r \rho'$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r}\nabla_h p'$$

Hledáme vlnové řešení, kdy $\xi_r \sim e^{i\omega t}$, $\xi_h \sim e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow -\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial p'}{\partial r} - g\rho'$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{1}{r}\nabla_h p'$$

(3) vsuvka: (jak odvodit) $\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \Rightarrow \delta p = c^2 \delta \rho$ $\qquad \delta \ldots$ Lagrange

$$\delta p = p' + \xi_r \frac{dp_0}{dr}$$

$$\delta \rho = \rho' + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

$$p' + \xi_r \frac{dp_0}{dr} = c_0^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}\right)$$

$$\frac{1}{c_0^2} p' + \frac{1}{c_0^2}\xi_r \frac{dp_0}{dr} = \boxed{\rho'} + \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p' + \frac{1}{c_0^2}\xi_r \frac{dp_0}{dr} - \xi_r \frac{d\rho_0}{dr}$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p' + \xi_r \left[\frac{1}{c_0^2}\frac{dp_0}{dr} - \frac{d\rho_0}{dr}\right] =$$

$$= \frac{1}{c_0} p' + \xi_r \left[\cancel{\frac{1}{c_0^2}\frac{dp_0}{dr}} \frac{\rho_0}{\gamma p_0}\frac{dp_0}{dr} - \frac{d\rho_0}{dr}\right] =$$

$$= \frac{p'}{c_0^2} + \xi_r \frac{\rho_0}{g} \underbrace{g\left[\frac{1}{\gamma p_0}\frac{dp_0}{dr} - \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}\right]}_{= N^2 \text{ Brunt-Väisälä}}$$

$$\Rightarrow \rho' = \frac{p'}{c_0^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r$$

N^2 z mixing-length

$$N^2 = \frac{g}{\rho}\left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{ad} - \frac{d\rho}{dr}\right]$$

ad. děj $pV^{\gamma} = konst \Rightarrow P\rho^{-\gamma} = konst$

diferenciál $dP\rho^{-\gamma} - \gamma P \rho^{-\gamma-1} d\rho = 0$

$$dP\rho^{-\gamma} = \gamma P \rho^{-\gamma-1} d\rho \Rightarrow \underbrace{dp = \gamma p \rho^{-1} d\rho}_{\text{platí}}$$

již bylo dřív

$$N^2 = \frac{g}{\rho}\left[\frac{\rho}{\gamma P}\frac{dP}{dr} - \frac{d\rho}{dr}\right] = g\left[\frac{dP}{\gamma p dr} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\right]$$

C.B.D.

(4) neuvažuje se

4 rovnice:
$$\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho_0\xi_r) + \frac{\rho_0}{r}\nabla_h \cdot \xi_h = 0 \quad (a)$$
$$-\omega^2\rho_0\xi_r = -\frac{\partial p'}{\partial r} - g\rho' \quad (b)$$
$$-\omega^2\rho_0\xi_h = -\frac{1}{r}\nabla_h p' \quad (c)$$
$$\rho' = \frac{p'}{c^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r \quad (d)$$

okrajové podmínky: $\xi_r(r=0) = 0$ (regularita pro $l=1$)
$\Rightarrow$ střed je stabilní

$\delta p(r=R_\odot) = 0 \Rightarrow$ nejsou externí síly

regulární řešení v pólech pro $\theta = 0, \pi$

$\hookrightarrow$ separované řešení pro radiální a úhlovou část

$$\rho'(r,\theta,\varphi) = \rho'(r)\cdot f(\theta,\varphi)$$
$$p'(r,\theta,\varphi) = p'(r)\cdot f(\theta,\varphi)$$
$$\xi_r(r,\theta,\varphi) \doteq \xi_r(r)\cdot f(\theta,\varphi)$$
$$\xi_h(r,\theta,\varphi) = \xi_h(r)\cdot\nabla_h f(\theta,\varphi)$$

(a) $\left[\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\rho_0\xi_r\right] f(\theta,\varphi) + \frac{\rho_0}{r}\xi_h\nabla_h^2 f = 0$

separace proměnných, $\nabla_h^2 f = \alpha f$, $\alpha = konst$

nenulové řešení v pólech: $\alpha = -l(l+1)$

pak $f(\theta,\varphi) = Y_l^m(\theta,\varphi) = C\,\underbrace{P_l^m(\theta)}_{\text{Legendre}}e^{im\varphi}$

$$\Rightarrow \rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho_0\xi_r\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r}\rho_0\xi_h = 0$$

(c) $$-\omega^2\rho_0\xi_h(r)\,\cancel{\nabla_h f(\vartheta,\varphi)} = -\frac{1}{r}p'(r)\,\cancel{\nabla_h f(\vartheta,\varphi)}$$

$$-\omega^2\rho_0\xi_h(r) = -\frac{1}{r}p'(r)$$

$$\boxed{\xi_h(r)} = \frac{1}{\omega^2\rho_0 r}p' \qquad (*)$$

do rovnice kontinuity (a)

$$\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho_0\xi_r\right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r}\rho_0\xi_h = 0$$

$$\rho' + \frac{2}{r}\rho_0\xi_r + \xi_r\frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0\frac{d\xi}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2}p' = 0$$

$\hookrightarrow$ z (3) $\rho' = \frac{p'}{c_0^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r$

$$\rho_0\frac{d\xi_r}{dr} + \xi_r\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{2}{r}\rho_0\xi_r + \frac{p'}{c_0^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r - \frac{\ell(\ell+1)}{\omega^2 r^2}p' = 0 \quad \Big/ :\rho_0$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} + \frac{2}{r}\xi_r + \xi_r\underbrace{\left[\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{N^2}{g}\right]} + \frac{p'}{\rho_0 c^2}\left[1 - \frac{\ell(\ell+1)c_0^2}{r^2\omega^2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr} + \frac{N^2}{g} = \cancel{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho_0}{dr}} + \frac{1}{\gamma p_0}\frac{dp_0}{dr} - \cancel{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dr}} = \frac{1}{\gamma p_0}\frac{dp_0}{dr} =$$

$$= \left|\frac{dp_0}{dr} = -g\rho_0 \quad \text{rovnováha pozadí}\right| = -\frac{1}{\gamma p_0}g\rho_0 = \left|c^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right| = -\frac{g}{c^2}$$

tedy $$\frac{d\xi_r}{dr} + \frac{2}{r}\xi_r - \frac{g}{c^2}\xi_r + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{p'}{\rho_0 c^2} = 0 \qquad ①$$

$$\boxed{\frac{d\xi_r}{dr} \gg \frac{\xi_r}{r}} \qquad \xi_r \ll r$$

lokální přístup

↓ rozměr frekvence

$$S_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+1)c^2}{r^2}$$

Lambova frekvence

(b) $$-\omega^2\rho_0\xi_r = -\frac{dp'}{dr} - g\rho'$$

$$\frac{dp'}{dr} + g\rho' - \omega^2\rho_0\xi_r = 0$$

$\uparrow$ $\rho' = \frac{p'}{c^2} + \frac{\rho_0 N^2}{g}\xi_r$ (d)

$$\Rightarrow \frac{dp'}{dr} + \frac{g}{c^2}p' + \left(N^2 - \omega^2\right)\rho_0\xi_r = 0 \qquad ②$$

Okrajové podmínky dole $\xi_r = 0$ ③

nahoře $\delta p = p' + \frac{dp_0}{dr}\xi_r = 0$ ④

$$\frac{dp_0}{dr} = -g\rho_0$$

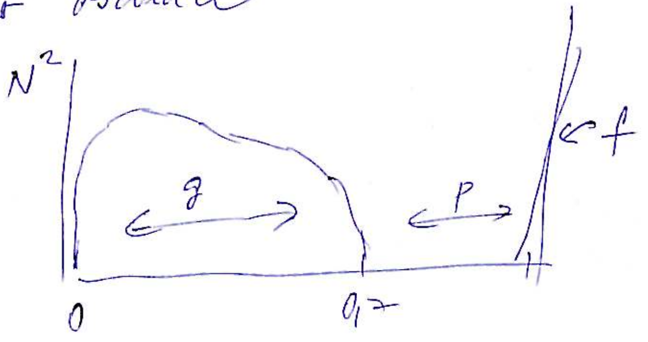
test ④ → $p' - g\rho_0 \xi_r = 0$

$$\xi_h = \frac{1}{\omega^2 \rho_0 r} p' \quad [z \text{ ©}, (*)]$$

$$\omega^2 \rho_0 r \xi_h - g\rho_0 \xi_r = 0$$

→ $\frac{\xi_h}{\xi_r} = \frac{g}{\omega^2 r}$ by mělo platit neplatí přesně, protože jsou externí síly (atmosféra)

rce ① a ② a podmínky ③ a ④ → vlastní problém pro oscilace



JWKB řešení

Jeffreys – Wentzel – Kramers – Brillouin

předpoklad – v rámci oscilace se mění ~~tla~~ hlavně hustota, ostatní stavové parametry jsou konstantní

řešení ve tvaru: $\xi_r = A\, \rho(r)^{-1/2} e^{-ik_r r}$

$$p' = B\, \rho(r)^{1/2} e^{-ik_r r}$$

$k_r = k_r(r)$, mění se pomalu

① $$\frac{d\xi_r}{dr} - \frac{g}{c^2}\xi_r + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{p'}{\rho_0 c^2} = 0$$

$$A\left[-ik_r \rho_0^{-1/2} e^{ik_r r} - \frac{1}{2}\rho_0^{-3/2} e^{ik_r r}\frac{d\rho}{dr}\right] - \frac{g}{c^2} A\rho^{-1/2} e^{ik_r r} + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{B\rho_0^{1/2}}{\rho c^2} e^{ik_r r} = 0$$

$$A\left[-ik_r \cancel{E}\rho^{-1/2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\rho^{-1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right] - \frac{g}{c^2}A\rho^{-1/2} + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{B\rho^{-1/2}}{c^2} = 0 \quad /: \rho^{-1/2}$$

$$\Big[-ik_r\cancel{E} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}}_{-H_\rho^{-1}} - \frac{g}{c^2}\Big]A + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{B}{c^2} = 0$$

$$\left[-ik_r + \frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c^2}\right]A + \frac{1}{c^2}\left[1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right]B = 0$$

② $\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{g}{c^2}p' + (N^2-\omega^2)\rho_0\xi_r = 0$

$$B\cancel{e^{-ik_r r}}\left[-ik_r\rho^{1/2} + \frac{1}{2}\rho^{-1/2}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right] + \frac{g}{c^2}B\rho^{1/2}\cancel{e^{-ik_r r}} + (N^2-\omega^2)\rho A\rho^{-1/2}\cancel{e^{-ik_r r}} = 0 \quad /: \rho^{1/2}$$

$$\left(-ik_r + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)B + \frac{g}{c^2}B + (N^2-\omega^2)A = 0$$

$$\left(-ik_r - \frac{1}{2H_\rho}\right)B + \frac{g}{c^2}B + (N^2-\omega^2)A = 0$$

čili soustava:

$$A\left[-ik_r + \frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right] + B\left[\frac{1}{c^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}\right] = 0$$

$$A\left[N^2-\omega^2\right] + B\left[-ik_r - \frac{1}{2H} + \frac{g}{c^2}\right] = 0$$

det = 0

$$\left[-ik_r + \left(\frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right)\right]\left[-ik_r - \left(\frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right)\right] - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}\right)(N^2-\omega^2) = 0$$

$$-k_r^2 - \left(\frac{1}{2H} - \frac{g}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(N^2-\omega^2) + \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}(N^2-\omega^2) = 0$$

$$k_r^2 = \frac{1}{4H^2} - \frac{2}{2H}\frac{g}{c^2} + \frac{g^2}{c^4} - \frac{N^2}{c^2} + \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}(N^2-\omega^2) =$$

$$= \frac{\omega^2 - \underset{\omega_c^2}{\boxed{\frac{c^2}{4H^2}}} - N^2 - \frac{1}{H}g + \frac{g^2}{c^2}}{c^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}(N^2-\omega^2) =$$

$$= \frac{\omega^2 - \omega_c^2 - N^2 + \left(\frac{g^2}{c^2} - \frac{g}{H}\right)}{c^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}(N^2-\omega^2) =$$

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r}\right) = g\left(\overset{1/c^2}{\boxed{\frac{\rho}{\Gamma_1 p}}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{H}\right) = g\left(\frac{1}{c^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{H}\right) =$$

$$= \left|\frac{\partial p}{\partial r} = \rho g\right| = g\left(\frac{1}{c^2}\frac{1}{\rho}\rho g - \frac{1}{H}\right) = g\left(\frac{g}{c^2} - \frac{1}{H}\right) = \boxed{\frac{g^2}{c^2} - \frac{g}{H}}$$

$$\boxed{= \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2c^2}(N^2-\omega^2) = k_r^2}$$

ω_c … akustická mezní frekvence (cut-off)

pro $k_r > 0$ … propagace vln, pro $k_r < 0$ … útlum vln rezonance: vlna má dva odrazné body: r_1, r_2

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r \, dr = \pi (n+\alpha)$$

n ... uzly

α ... fázová změna na rozhraních při odrazu (funkce pouze vlastností rozhraní)

Odhady:

1. $\omega^2 \gg N^2$ $\quad k_r^2 = \frac{\omega^2-\omega_c^2}{c^2} - \frac{S_l^2}{c^2}$

$$k_h = \frac{S_l}{c} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \quad \text{známe}$$

tedy $k_r^2 c^2 = \omega^2 - \omega_c^2 - k_h^2 c^2$

$$\omega^2 = \omega_c^2 + k_r^2 c^2 + k_h^2 c^2 \quad ; \; k^2 = k_h^2 + k_r^2$$

$$\Rightarrow \underline{\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 c^2}$$

disperzní relace pro p-mody (akustické) k_h^2

2. $\omega^2 \ll S_l^2$ $\quad \underline{k_r^2} = \frac{\cancel{\omega^2(\omega^2-\omega_c^2)c^2} + S_l^2(N^2-\omega^2)}{c^2\omega^2} = \frac{S_l^2 (N^2-\omega^2)}{c^2\omega^2} =$

$$= k_h^2\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right) = \underline{k_h^2\frac{N^2}{\omega^2} - k_h^2}$$

$$\underline{k_r^2 + k_h^2} = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} = \underline{k^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k^2} = N^2 \cos^2\theta}$$

disperzní relace pro g-mody

propagují se hlavně horizontálně

p-mody $\quad k_r^2 > 0$, v $k_r^2 = 0$ se odrážejí

pro $\omega \gg \omega_c$, $\omega \gg N^2$ rovnice pro dolní obratový bod $k_r = 0$

$$\omega^2 = c^2 \frac{S_l^2}{c^2\omega^2}\omega^2 = c^2\left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}\right]^2$$

$$\omega = \frac{c}{r}\sqrt{l(l+1)} = \frac{cL}{r}$$

$$\frac{\omega}{L} = \frac{c(r_1)}{r_1}$$

horní obratový bod. $\omega_c(r) \sim \omega$

ω_c stoupá při povrchu,

tedy $r_2 = R_\odot$

rezonance: $$\int_{r_1}^{r_2} k_r \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \omega \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}} \, dr = \pi(n+\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi(n+\alpha)}{\omega} = \int_{r_t}^{R_\odot} \left[\frac{1}{c^2} - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}\right]^{-1/2} dr$$

<u>f-mod</u> v podpovrchových vrstvách, kde $\delta p \sim 0$

$$p' = \delta p + \overset{\frac{\partial p}{\partial r}}{g\rho}\, \xi_r \quad \rightarrow \text{řešíme rovnice pro Lagr. poruchu}$$

① $$\frac{d\xi_r}{dr} + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{p'}{\rho c^2} = 0$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{\delta p}{\rho c^2} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}c^2\right]\frac{g\cancel{\rho}\,\xi_r}{\cancel{\rho}c^2} = 0$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} - \xi_r\left[-\frac{g}{c^2} + \frac{l(l+1)\cancel{c^2}\,g}{r^2\omega^2\,\cancel{c^2}}\right] + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{\delta p}{\rho c^2} = 0$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} - \xi_r\left[-\frac{g}{c^2} + \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}g\right] + \left[1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right]\frac{\delta p}{\rho e^2} = 0$$

② $$\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{g}{c^2}p' + (N^2-\omega^2)\rho\,\xi_r = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{\partial(g\rho\xi_r)}{\partial r} + (N^2-\omega^2)\rho\,\xi_r + \frac{g}{c^2}\delta p + \frac{g}{c^2}g\rho\,\xi_r = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + g\rho\frac{d\xi_r}{dr} + \xi_r\frac{\partial g\rho}{\partial r} + (N^2-\omega^2)\rho\,\xi_r + \frac{g}{c^2}\delta p + \frac{g}{c^2}g\rho\,\xi_r = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + g\rho\left[\xi_r\left(-\frac{g}{c^2} + \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}g\right) - \left(1 - \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}c^2\right)\frac{\delta p}{\rho c^2}\right] + $$
$$+ \xi_r\frac{\partial g\rho}{\partial r} + (N^2-\omega^2)\rho\,\xi_r + \frac{g}{c^2}\delta p + \frac{g^2}{c^2}\rho\,\xi_r = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} - g\rho\left(1 - \frac{l(l+1)c^2}{r^2\omega^2}\right)\frac{\delta p}{\rho c^2} + g\rho\,\xi_r\left(-\frac{g}{c^2} + \frac{l(l+1)}{r^2\omega^2}g\right) + \xi_r\frac{\partial g\rho}{\partial r} +$$
$$+ (N^2-\omega^2)\xi_r\rho + \frac{g}{c^2}\delta p + \frac{g^2}{c^2}\rho\,\xi_r = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \delta p\left(\cancel{-\frac{g}{c^2}} + \frac{l(l+1)g}{r^2\omega^2} + \cancel{\frac{g}{c^2}}\right) +$$
$$+ \xi_r\left[\cancel{-\frac{g^2\rho}{c^2}} + \frac{g^2\rho\, l(l+1)}{r^2\omega^2} + \frac{g\,\partial\rho}{\partial r} + (N^2-\omega^2)\rho + \cancel{\frac{g^2}{c^2}\rho}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{g\,l(l+1)}{\omega^2 r^2}\delta p + \xi_r\frac{g\rho}{r}\left[\frac{g\,l(l+1)}{\omega^2 r} + \underbrace{\underbrace{\frac{r}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial r} + \frac{N^2 r}{g}}}_{(*)} - \frac{\omega^2 r}{g}\right] = 0$$

pro l velké a ω velké.

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{g l(l+1)}{\omega^2 r^2}\delta p + \frac{g\rho}{r}\xi_r \underbrace{\left(\frac{g(l+1)l}{\omega^2 r} - \frac{\omega^2 r}{g}\right)}_{-f} = 0$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial r} + \frac{g l(l+1)}{\omega^2 r^2}\delta p - \frac{g\rho}{r} f \xi_r = 0$$

lze splnit pro $\delta p = 0$ (naše podmínka)

a $f = 0$

$$\Rightarrow f = 0 = \frac{g l(l+1)}{\omega^2 r} - \frac{\omega^2 r}{g} \qquad \Big/ \cdot \omega^2 r g$$

$$g^2 l(l+1) - \omega^4 r^2 = 0$$

$$\omega^2 = \boxed{\frac{g}{r}\sqrt{l(l+1)}} = k_h g \quad \text{pro } r = R_\odot$$

z rovnice ① pro $\delta p = 0$ po dosazení za ω^2

$$\frac{d\xi_r}{dr} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}\xi_r = 0$$

řešení $\xi_r \sim e^{k_h (r - R_\odot)}$

↳ pokles s hloubkou

$$(*)\ \frac{r}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{N^2 r}{g} = \frac{r}{g}\left(\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} + N^2\right)$$

$$N^2 = g\left[\frac{1}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right] = g\left[\overset{c^{-2}}{\boxed{\frac{\rho}{\partial p}}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right] =$$

$$= g\left[\frac{1}{\rho c^2}\underset{\rho g}{\boxed{\frac{\partial p}{\partial r}}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right] = \underline{g\left[\frac{g}{c^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right]}$$

$$\frac{r}{g}\left(\cancel{\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}} + \frac{g^2}{c^2} - \cancel{\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}}\right) = \frac{rg}{c^2} \leftarrow \text{konstanta, nezajímavé}$$