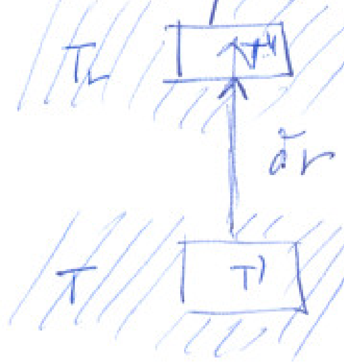
Konvekce

→ podmínka vzniku:



hustoty a tlak se vyrovnají s okolím

$T \to T'$, $T' - T = \Delta T > 0$

$$T'' = T' + \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \delta R = T + \Delta T + \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \delta r$$

teplota prostředí v konečném místě:

$$T_r = T + \left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} \delta R$$

1. $T'' = T_r$ → element splyne s okolím
2. $T'' < T_r$ → element klesne zpět, rovnováha zářivá
3. $T'' > T_r$ → element pokračuje → konvekce

tedy $\Delta T + \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} \delta R > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} \delta r$

$$\hookrightarrow \boxed{-\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} > -\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}}$$

podmínka vzniku konvektivní rovnováhy

rovnice zářivé rovnováhy

↳ 1. věta termodynamická:

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho$$

počítáme diferenciály, předpokládáme $dq_w = 0$

↓ silnější podmínka

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP$$

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP$$

dosadit do $TdS = \dots$

$$dS = \left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{T} + \left(\frac{\partial U}{\partial P} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{T}$$

S ... úplný diferenciál $\Rightarrow$ záměnnost 2. derivací

$$\frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial P} - \frac{P}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T\right]$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T - \frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = \frac{T}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$$

$-\delta$

zavedeme $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$

$$\Rightarrow TdS = dQ = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{P}{\rho T}\frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{P\delta}{\rho T}\right)_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP$$

$$c_P = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P - \frac{P}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P - \frac{P\delta}{\rho T}$$

$$TdS = dQ = c_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP$$

expanze adiabatická $\Rightarrow dS = 0 \Rightarrow \boxed{c_P dT = \frac{\delta}{\rho} dP}$

$$dT = \frac{\delta}{\rho c_P} dP \quad \text{a tedy} \quad \left(\frac{dT}{dR}\right)_{ad} = \boxed{\frac{\delta}{c_P \rho}\frac{dP}{dR}}$$

s pomocí rovnic vnitřní struktury:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} = -\frac{3\varkappa\rho L}{16\pi r^2 acT^3}$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \frac{\delta G m}{c_p r^2}$$

zavedeme $\nabla = \frac{d\ln T}{d\ln P} = \frac{P}{T}\frac{dT}{dP} = \frac{P}{T}\frac{dT}{dr}\frac{dr}{dP}$

$\Rightarrow \nabla_{rad} > \nabla_{ad}$ ... nová podmínka rovnováhy

$$\nabla_{rad} = \frac{3\varkappa PL}{16\pi ac G m T^4}$$

$$\boxed{pV^{\gamma} = \text{konst}}$$

$$\nabla_{ad} = \frac{\delta P}{c_p \rho T}$$

$\frac{c_p}{c_V} = \gamma$; $c_p = c_V + \mathcal{R}$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_p - \mathcal{R}}$$

$$c_p = \frac{\gamma\mathcal{R}}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\mathcal{R}$$

↳ ~~přenos energie~~ zářivá rovnováha:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G m T\rho}{r^2 P}\nabla \longrightarrow \nabla = \nabla_{rad}$$ v zářivé vrstvě

$\nabla = \nabla_{ad}$ v konvektivní oblasti

pokud i chemické změny:

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} + \nabla_{\mu}$$

$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)_{ad} = 0 \dashrightarrow$ adiabatický děj nemění chemické složení

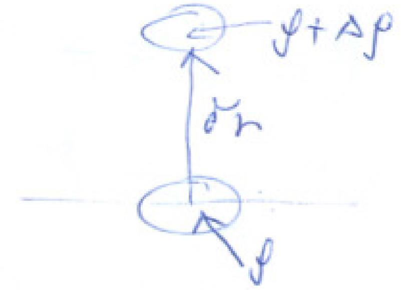
$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)_{rad} < 0 \Rightarrow$ změna chem. složení stabilizuje, protože

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} < \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} + \frac{T}{\mu}\underbrace{\left(\frac{d\mu}{dr}\right)_{rad}}_{<0} - \cancel{\frac{T}{\mu}\left(\frac{d\mu}{dr}\right)_{ad}}$$

Mixing-length theory

- transport energie konvekcí.

pohybová rovnice:



$$\rho \frac{d^2\delta r}{dt^2} = -g\,\Delta\rho =$$

$$= -g\left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{ad} - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{rad}\right]\delta r =$$

$$= -g\rho\left[\left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)_{ad} - \left(\frac{d\ln\rho}{dr}\right)_{rad}\right]\delta r =$$

$$= \left|\ \rho = \frac{\mu P}{\mathcal{R}T};\ \frac{d\mu}{dr} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dr} = \frac{\mu}{\mathcal{R}T}\frac{dP}{dr} - \frac{\mu P}{\mathcal{R}}\frac{1}{T^2}\left(\frac{dT}{dr}\right) = \right.$$

člen stejný ⇒ vypadne

$$= -\frac{\mu P}{\mathcal{R}T^2}\left(\frac{dT}{d\ln P}\right)\frac{d\ln P}{dr} = -\frac{\mu P}{\mathcal{R}T}\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)\frac{d\ln P}{dr} =$$

$$= -\rho\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)\frac{d\ln P}{dr}\ \Bigg| =$$

$$= -g\rho\left[\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)_{ad} - \frac{d\ln T}{d\ln P}\right]\frac{1}{H_p}\delta r$$

$$H_p = -\frac{d\ln P}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\delta r}{dt^2} = -\frac{g}{H_p}(\nabla_{ad} - \nabla)\,\delta r = -N^2\delta r$$

Brunt-Väisälä

$$N^2 = \frac{g}{H_p}(\nabla_{ad} - \nabla)$$

pro $N^2 < 0$ → rostoucí řešení → konvektivní nestabilita

$N^2 > 0$ → oscilující řešení → konvektivní stabilita

$$\delta r \sim \sin(Nt)$$

↳ $\boxed{\text{g-mody}}$

převod:

$$\frac{d^2\delta r}{dt^2} = -\frac{g}{H_p}(\nabla_{ad}-\nabla)\,\delta r \quad \Big| \cdot \frac{2\,d\delta r}{dt}$$

$$(\dot{x}^2)^{\cdot} = 2\dot{x}\ddot{x}$$

$$\dot{x^2} = 2\dot{x}x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2 = \frac{g}{H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\frac{d\delta r^2}{dt} \quad \Big| \int dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{d\delta r}{dt}\right)^2 = \frac{g}{H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,\delta r^2}$$

zavedeme „mixing-length" → element cestuje bez porušení na vzdálenost l ; $\overline{\delta r} = l/2$

$$\frac{d\delta r}{dt} = \bar{v} \quad \dots \text{ konvektivní rychlost}$$

$$\Rightarrow \bar{v}^2 = \frac{g}{4H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,l^2$$

tok energie konvekcí:

$$F_c = \underbrace{\rho v^3}_{\rho v^2 \cdot v} = \rho\left[\frac{g}{4H_p}(\nabla-\nabla_{ad})\,l^2\right]^{3/2}$$

v KZ — $\nabla > \nabla_{ad}$, ale jen málo, takže dost na přenos toku energie → rychlosti ale malé → <u>efektivní konvekce</u>

pod povrchem → $\frac{d\rho}{dr}$ ostrý pokles → rychlosti větší, $\nabla \gg \nabla_{ad}$ → rychlosti ~ rychlosti zvuku → „<u>superadiabatická zóna</u>"

$\boxed{l = \alpha H_p}$ definice ; $\alpha \sim 1$

konvekce se zářivými ztrátami

během vzestupu element vyzařuje

$\Rightarrow \quad \nabla' \neq \nabla_{ad}$

$\Rightarrow \quad \bar{v}^2 = \frac{g}{4H_p} (\nabla - \nabla') \ell^2$

teplotní změna vzestupujícího elementu:

$$\Delta T = \Big[\underbrace{\left(\frac{dT}{dr}\right)'}_{\substack{\text{skutečná změna teploty v buňce} \\ \text{během vzestupu}}} - \frac{dT}{dr} \Big] \delta r$$

použijeme $\alpha = \frac{\ell}{H_p}$

tok konvekcí: $F_c = \underbrace{\Delta T \underbrace{\rho c_p}}_{\text{energie}} \underbrace{\bar{v}}_{\text{rychlost}}$ *

$$\Delta T = \Big[\left(\frac{dT}{dr}\right)' - \frac{dT}{dr} \Big] \delta r = (\nabla - \nabla') \frac{T \delta r}{H_p}$$

$$\nabla' = - H_p \frac{d \ln T}{dr}$$

~~δr~~ $\delta r = \frac{\ell}{2}$ předpoklad: $\alpha = \frac{\ell}{H_p}$

$\rightarrow \quad \Delta T = (\nabla - \nabla') \frac{T \alpha}{2}$

$\Rightarrow \quad F_c = \alpha \underbrace{\rho c_p}_{\text{heat capacity}} v T (\nabla - \nabla')/2$

ztráty vyzařováním:

$$F_R' = - \frac{16 \sigma T^3}{3 \kappa \rho} \frac{\Delta T}{d} = \frac{\ell \alpha \sigma T^4}{3 \kappa \rho d} (\nabla' - \nabla)$$

d ... vzdálenost, na níž $\Delta T \to 0$

$\sim$ rozměr buňky

$\Rightarrow$ přenos energie do části adiabatické a odchylky od adiabatické:

$$F_c = F_c^{ad} + F_c' = \alpha \rho c_p v T(\nabla - \nabla_{ad})/2 + \underbrace{\alpha \rho c_p v T(\nabla_{ad} - \nabla')/2}$$

o kolik je přenos méně efektivní než za přesně ad. podmínek

rovnováha: $F_R' = F_c'$

$$\Rightarrow \frac{16\sigma T^4}{3\kappa\rho d}(\nabla' - \nabla) = \rho c_p v (\nabla_{ad} - \nabla')$$

$$v = \left[\frac{g}{4H_p}(\nabla - \nabla_{ad}) l^2\right]^{1/2}$$

rovnováha toku energie:

$$F_R + F_c = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{16\sigma T^4}{3\kappa\rho H_p}\nabla + \alpha \rho c_p T l \sqrt{\frac{g}{4H}}(\nabla - \nabla')^{3/2} = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$$

dvě rovnice pro výpočet ∇ a ∇'

Pozn.: často se zavádí parametr konvektivní stability: (Ledouxův)

$$A^* \equiv \frac{1}{\gamma}\frac{d\ln P}{d\ln r} - \frac{d\ln\rho}{d\ln r}$$

$$A^* < 0 \rightarrow \text{konvektivní nestabilita}$$

Slunce – $\frac{dT}{dr}$ prudší ve vnějších vrstvách Slunce $\rightarrow$ aby se udržel tok tepla $(\sim T^3)$

$\rightarrow$ vznik konvekce