

3 Rovnice vedení tepla

Ač by se vedení tepla v asteroidech mohlo zdát pouhou kuriozitou, jde o základní problém ve fyzice malých těles. Anizotropie tepelného vyzařování s povrchu asteroidu je příčinou *disipace* (nebo i růstu) mechanické energie; zatímco samotné gravitační působení by bylo konzervativní. Trajektorie proto nejsou přibližně eliptické, nýbrž přibližně spirálové, což se zřetelně projevuje na struktuře celého hlavního pásu asteroidů i počtu blízkozemních objektů.

3.1 Fourierovský rozvoj zářivého toku

Předtím, než budeme analyticky řešit rovnici vedení tepla uvnitř, se musíme zabývat jednou okrajovou záležitostí — ozářením. Pro určité místo na rovníku rotujícího asteroidu je tok dán periodickou funkcí ($P = 2\pi/\omega$):

$$\mathcal{F}(t) = (1 - A)\Phi \Xi(\cos \omega t), \quad (66)$$

kde $\Xi(x) \equiv xH(x)$, $H(x) = 0$ pro $x < 0$ a $H(x) = 1$ pro $x \geq 0$ je Heavisidova skoková funkce; $\Phi = L/(4\pi r^2)$ zářivý tok od Slunce v dané vzdálenosti r a A Bondovo albedo. Neboť je po částech spojitě diferencovatelná, lze počítat jí příslušnou Fourierovu řadu:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n e^{in\omega t}, \quad (67)$$

jejíž koeficienty:

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{P} \int_0^P \mathcal{F}(t) e^{in\omega t} dt. \quad (68)$$

Konkrétně člen \mathcal{F}_0 :

$$\frac{1}{P} \int_0^P \Xi(\cos \omega t) dt = \frac{2}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} \cos \omega t dt = \frac{2}{P} \left[\frac{\sin \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{P}{4}} = \frac{1}{\pi}$$

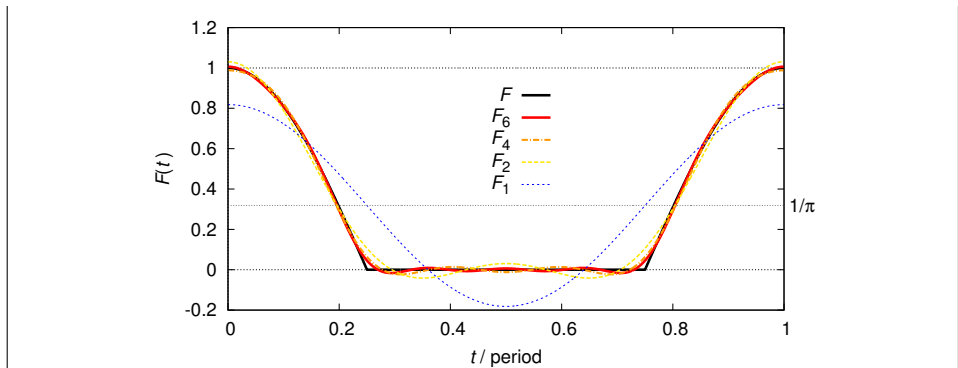
a člen $\mathcal{F}_{\pm 1}$:

$$\frac{2}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{P} \int_0^{\frac{P}{4}} (\cos 2\omega t + 1) dt = \frac{2}{P} \left[\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} + t \right]_0^{\frac{P}{4}} = \frac{1}{4},$$

atd.

Do 6. řádu ($\mathcal{F}_{\pm 6}$) pak vypadá řada následovně (viz obr. 21):

$$\mathcal{F}(t) \doteq (1 - A)\Phi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t + \frac{2}{35\pi} \cos 6\omega t \right). \quad (69)$$



Obr. 21 — Zářivý tok $\mathcal{F}(t)$ od Slunce na rovníku rotujícího asteroidu a jeho postupná aproximace několika členy fourierovské řady, \mathcal{F}_0 až \mathcal{F}_6 . Hodnoty vynesené v grafu jsou v jednotkách $(1 - A)\Phi$, kde A označuje Bondovo albedo a Φ tok záření (ve W m^{-2}) v dané vzdálenosti od Slunce.

3.2 Analytické jednorozměrné řešení

Existují-li (alespoň přibližná) analytická řešení, lze pomocí nich ověřovat správnost (obdobně zjednodušených) numerických řešení. Proto se budeme zprvu zabývat rovnicí vedení tepla v nejjednodušším jednorozměrném případě. Neznamená to pochopitelně, že celý asteroid je jednorozměrný, nýbrž si představujeme sloupec materiálu s Neumannovou okrajovou podmínkou na povrchu a Dirichletovou v hloubce:

$$\rho C \partial_t u - \partial_x K \partial_x u = 0, \quad (70)$$

$$K \partial_x u + \epsilon \sigma u^4 = \mathcal{F}(t) \quad \text{pro } x = 0, \quad (71)$$

$$u = \text{konst.} \quad \text{pro } x \rightarrow -\infty, \quad (72)$$

kde $u(x, t)$ označuje teplotu, jakožto neznámou funkci souřadnice a času, ρ hustotu, C měrnou tepelnou kapacitu, K tepelnou vodivost, ϵ infračervenou emisivitu, σ Stefanovu–Boltzmannovu konstantu a $\mathcal{F}(t)$ zářivý tok dle (66). Jakékoliv laterální vedení tepla zanedbáváme.

Vzhledem k charakteru (69) zkusíme nalézt *ustálené*¹⁷ řešení ve tvaru Fourierovy řady:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x) e^{in\omega t}. \quad (73)$$

Je-li $K = \text{konst.}$, zavedeme tepelnou difuzivitu $\chi \equiv \frac{K}{\rho C}$. Dosadíme-li řadu do (70), obdržíme:

$$\sum_n u_n in\omega e^{in\omega t} - \chi \sum_n \partial_{xx} u_n e^{in\omega t} = 0,$$

¹⁷ Samozřejmě se tím připravujeme o možnost popisovat přechodové stavy, jež nejsou periodické, např. postupný ohřev z nějaké konstantní teploty.

čili pro každé n musí platit:

$$\partial_{xx}u_n = \frac{in\omega}{\chi}u_n. \quad (74)$$

Obecná řešení se evidentně liší pro $n = 0$, $n > 0$ a $n < 0$. Neboť víme, že $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, $\sqrt{-i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$, vycházejí:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= a_0 + b_0x, \\ u_n(x) &= a_n e^{-(1+i)\beta_n x} + b_n e^{(1+i)\beta_n x}, \\ u_{-n}(x) &= a_{-n} e^{-(1-i)\beta_n x} + b_{-n} e^{(1-i)\beta_n x}, \end{aligned}$$

kde jsme kromě integračních konstant a_n , b_n byli nuceni pro zkrácení zápisu zavést $\beta_n \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \frac{|n|\omega}{\chi}}$; shodou okolností je $1/\beta_n$ hloubka proniku tepelné vlny. Neboť nás vesměs zajímají řešení nedivergující, je $b_n = 0$, a tedy $u_0 = \text{konst.}$

Zatím neznámá a_n určíme jako obvykle z konkrétní okrajové podmínky (71). Povrchová teplota je zřejmé:

$$u(0, t) = \sum_n a_n e^{in\omega t}$$

a její derivace:

$$\partial_x u(0, t) = - \sum_{n>0} a_n (1+i)\beta_n e^{in\omega t} - \sum_{n>0} a_{-n} (1-i)\beta_n e^{-in\omega t}.$$

Abychom nemuseli umocňovat do nekonečna, budeme předpokládat (a později ověřovat) malé změny teploty $u_n \ll u_0$, což by umožnilo provést linearizaci:

$$u^4 = \left(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t} \right)^4 \doteq u_0^4 + 4u_0^3 \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t}.$$

Po dosazení do (71):

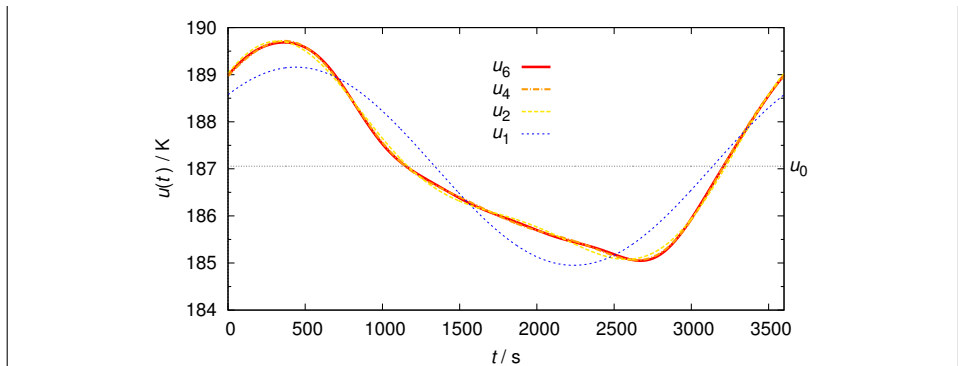
$$\begin{aligned} & -K \sum_{n>0} a_n (1+i)\beta_n e^{in\omega t} - K \sum_{n>0} a_{-n} (1-i)\beta_n e^{-in\omega t} + \\ & + \epsilon\sigma u_0^4 + 4\epsilon\sigma u_0^3 \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\omega t} = \sum_n \mathcal{F}_n e^{in\omega t} \end{aligned}$$

vidíme, že se musejí rovnat koeficienty u všech $e^{in\omega t}$, odkud:

$$u_0 = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{F}_0}{\epsilon\sigma}}, \quad (75)$$

$$a_n = \frac{\mathcal{F}_n}{4\epsilon\sigma u_0^3 + K(1+i)\beta_n}, \quad (76)$$

$$a_{-n} = \frac{\mathcal{F}_{-n}}{4\epsilon\sigma u_0^3 + K(1-i)\beta_n}. \quad (77)$$



Obr. 22 — Povrchová teplota $u(0, t)$ daného místa na asteroidu, získaná řešením jednorozměrné rovnice vedení tepla, respektive její postupné aproximace několika fourierovskými členy u_0 až u_6 . Volené parametry jsou: rotační perioda $P = 1$ h, vzdálenost od Slunce $r = 2,5$ au, Bondovo albedo $A = 0,1$, infračervená emisivita $\epsilon = 0,9$, hustota $\rho = 2\,500$ kg m $^{-3}$, měrná tepelná kapacita $C = 480$ J kg $^{-1}$ a tepelná vodivost $K = 1$ W m $^{-1}$ K $^{-1}$.

Výsledná funkce $u(0, t)$ je zobrazena na obr. 22. Zřetelný je fázový posun oproti $\mathcal{F}(t)$. Pohledem na něj zároveň ověříme náš předpoklad $u_n \ll u_0$; o.k.

3.3 Metoda konečných diferencí (FDM)

Když podmínky pro linearizaci nejsou splněny, uchýlíme se k řešení numerickému. Navíc lze studovat i stavy přechodové. Všechny derivace (operátory) proto převedeme na konečné diference, což je obzvláště snadné, když je geometrie jednoduchá (jednorozměrná).

Explicitní schéma. Převedme nejprve 1. derivaci podle času:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t},$$

kde jsme zavedli horní indexy n a $n - 1$, odpovídající času novému ($t + \Delta t$) a starému (t). Vyjádření 2. derivace podle souřadnice je prostým rozdílem prvních:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} - \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2},$$

kde jsme zavedli dolní indexy $j + 1$, j a $j - 1$ pro tři sousedící body. Při dosazování do (70) se musíme především rozhodnout, v jakém čase vyčíslíme prostorové derivace! Pokud ve starém:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \chi \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0,$$

tak nám to umožňuje explicitně vyjádřit nové teploty:

$$u_j^n = u_j^{n-1} + \frac{\chi \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}) \quad \text{pro } j = 1..M - 1.$$

Toto numerické schéma se nazývá explicitní dopředný Euler, často angl. forward time centered space nebo zkr. FTCS.

Je sice nejjednodušší, ale před jeho použitím musíme zkontrolovat splnění *von Neumannova kritéria*:

$$\frac{2\chi\Delta t}{\Delta x^2} < 1,$$

bez kterého není zaručena stabilita, resp. je zaručena nestabilita. Je však třeba důsledně rozlišovat — stabilita v žádném případě není konvergence k neznámému řešení! Tu musíme jako vždy ověřovat např. sledováním změn $u(x, t)$ při dalším zmenšování kroku časového Δt i prostorového Δx .

Na povrchu $j = 0$ ani v hloubce $j = M$ nelze vyčíslovat druhou derivaci, neboť nemáme třetí bod. Právě proto potřebujeme (diskretizované) okrajové podmínky (71) a (72). Konkrétně je:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} \simeq \frac{u_0 - u_1}{\Delta x},$$

čili:

$$K \frac{u_0^n - u_1^n}{\Delta x} + \epsilon \sigma (u_0^n)^4 = \mathcal{F}(t),$$

což představuje polynom 4. stupně pro u_0^n (u_1^n již známe):

$$\epsilon \sigma (u_0^n)^4 + \frac{K}{\Delta x} u_0^n - \frac{K}{\Delta x} u_1^n - \mathcal{F}(t) = 0;$$

řeší se numericky (např. Laguerrovou metodou).

Okrajová podmínka v (konečné) hloubce $x_M \gg \beta$ je o dost jednodušší:

$$u_M = u_{\text{eq}},$$

ale rovnovážnou teplotu musíme volit obezřetně, abychom si nevynutili řešení nesmyslné.

Implicitní schéma. Použijeme-li namísto starých teplot nové:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \chi \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

jedná se o poněkud jiný problém:

$$-\overbrace{\frac{\chi\Delta t}{\Delta x^2}}^a u_{j+1}^n + \left(1 + \frac{2\chi\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n - \frac{\chi\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n = u_j^{n-1} \quad \text{pro } j = 1 \dots M-1,$$

neboli:

$$u_j^n A_{ij} = B_i,$$

kde matice je tridiagonální řádká:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a & 1+2a & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a & 1+2a & -a \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

a pravá strana:

$$B = \begin{pmatrix} u_0^n \\ u_1^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n-1} \\ u_M^n \end{pmatrix}. \quad (79)$$

V každém kroku tedy musíme invertovat matici (společně s neustále se měnící pravou stranou)! Takové schéma se nazývá implicitní zpětný Euler, angl. backward time centered space, zkr. BTCS.

Aby matice nezůstala singulární, je naprosto nezbytné v B_i dosadit za u_0^n , u_M^n z okrajových podmínek:

$$\epsilon\sigma(u_0^n)^4 + \frac{K}{\Delta x}u_0^n - \frac{K}{\Delta x}u_1^{n-1} - \mathcal{F}(t) = 0, \quad (80)$$

$$u_M = u_{\text{eq}}, \quad (81)$$

kde jsme si pomohli „faulem“, neboť jsme použili starou hodnotu podpovrchové teploty u_1^{n-1} namísto nové u_1^n , kterou zatím nikdo nezná; „za trest“ provedeme několik iterací.¹⁸

Hybridní schéma. Jako výhodná se ukazuje být kombinace schémat explicitního a implicitního, parametrizovaná parametrem θ :

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} - \theta\chi \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - (1-\theta)\chi \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x^2} = 0,$$

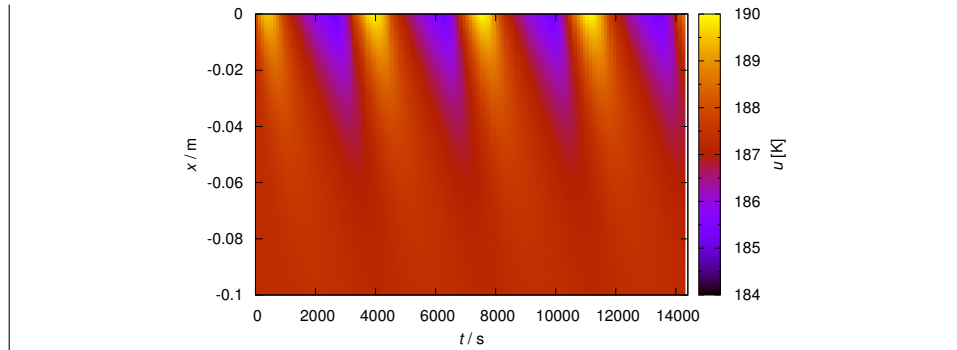
což opět vede na soustavu:

$$u_j^n A'_{ij} = B'_i.$$

¹⁸ Druhou možností by byla linearizace 4. mocniny v (80), použití u_1^n a této rovnice namísto 1. řádku matice A_{ij} , ale linearizace se musí taktéž odčinit iteracemi.

θ	schéma	přesnost	stabilita
0	explicitní dopředný Euler	$\Delta x^2, \Delta t$	von Neumannovo kritérium
1/2	implicitní Crank–Nicolson	$\Delta x^2, \Delta t^2$	stabilní
1	implicitní zpětný Euler	$\Delta x^2, \Delta t$	stabilní

Tab. 2 — Hodnoty parametru θ , určující konkrétní schéma numerické metody FDM, přesnost schématu a případná podmínka stability.



Obr. 23 — Numerické řešení rovnice vedení tepla metodou FDM, schématem BTCS, zobrazené na grafu čas t , hloubka x ; teplota u je znázorněna barevně. Počáteční podmínka byla $u(x, t = 0) = u_{\text{eq}}$, okrajová podmínka na povrchu je zářivá (odpovídá obr. 21) a v hloubce $u(x = -0,2 \text{ m}, t) = u_{\text{eq}}$. Výpočet byl proveden včetně přechodového stavu. Tepelné parametry jsou tytéž jako na obr. 22, stejně jako průběh $u(x = 0, t)$.

Výhodou hybridního schématu s $\theta = 1/2$, nazývaného Crankovo–Nicholsonovo, je kromě bezpodmínečné stability také vyšší přesnost integrace, neboť pro výpočet 2. derivací využíváme 6 bodů (viz tab. 2; Langtangen 2003).

3.4 Slabá formulace problému

Přejdeme nyní k obecnému trojrozměrnému numerickému řešení, které je možné použít v libovolné nepravidelné geometrii, tzn. i pro celý šišatý asteroid. Rovnici vedení tepla si nejprve zapíšeme pomocí operátoru:

$$\mathcal{L} \equiv \rho C \partial_t - \nabla \cdot K \nabla, \quad (82)$$

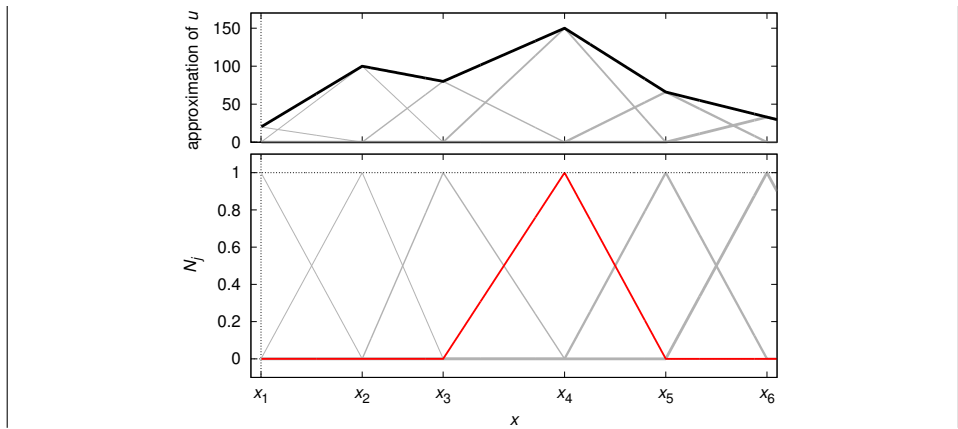
abychom její zápis maximálně zjednodušili:

$$\mathcal{L}(u) = 0; \quad (83)$$

okrajovou podmínku už máme jen jednu:

$$K \partial_n u + \epsilon \sigma u^4 = (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) \text{ na } \Gamma, \quad (84)$$

příčemž tentokrát je hranice domény v podstatě libovolná uzavřená, prozatím konvexní, takže v argumentu zářivého toku vystupuje směr ke Slunci $\mathbf{s}(t)$ a normály $\mathbf{n}(\mathbf{r})$.



Obr. 24 — Dole nejjednodušší jednorozměrné lineární báze funkce $N_j(x)$; zvýrazněná je pro $j = 4$. Nahoře je odpovídající funkce \hat{u} pro případ, kdyby koeficienty byly číselně rovny: $u_1 = 20$, $u_2 = 100$, $u_3 = 80$, $u_4 = 150$, $u_5 = 66$, $u_6 = 33$. Ve dvou rozměrech by $N_j(x, y)$ měly podobu čtyřbokých jehlanů. Ve třech rozměrech bychom $N_j(\mathbf{r})$ kreslit nechtěli.

Slabá formulace problému spočívá v nahrazení (neznámé) funkce $u(\mathbf{r})$ za její přibližný rozvoj:

$$u \doteq \hat{u} = \sum_{j=1}^M u_j N_j, \quad (85)$$

kde u_j jsou neznámé číselné koeficienty a $N_j(\mathbf{r})$ známé *báze funkce* (též „konečné prvky“). Nejjednodušší funkce jsou obyčejné střeovitě, které jsou nenulové jen mezi několika nejbližšími body sítě; schematicky jednorozměrně (obr. 24):

$$N_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{pro } x \in (x_{j-1}, x_j), \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} & \text{pro } x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (86)$$

Samozřejmě lze volit též funkce kvadratické, kubické, harmonické, pokrývající celou oblast Ω , vlastní funkce operátoru \mathcal{L} , jsou-li známy, různé speciální atd. Volba vhodné báze se podobá umění.

Právě provedená diskretizace v prostoru převádí problém spojitý (hledání $u(\mathbf{r}, t)$) na diskrétní konečný (hledání u_j). Pak ale nemůže všude přesně platit (83)! Obecně je tedy:

$$\mathcal{L}(\hat{u}) \neq 0,$$

s čímž nelze být spokojen.

3.5 Metoda konečných prvků (FEM)

V metodě konečných prvků se s tím smíříme. Avšak požadujeme, aby součet *reziduí* byl nula. Nelze ovšem napsat bez rozmyslu:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) d\Omega = 0,$$

protože to bychom mohli mít v levé části domény Ω kladné odchylky a v pravé záporné. Ba co hůř, s jednou rovnicí pro M neznámých u_j nenaděláme nic. Proto musíme splnění podmínky požadovat mnohokrát, vždy v omezené části Ω , kterou si vymezení pomocí *testovací funkce* (váhy) $W_i(\mathbf{r})$:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_i d\Omega = 0 \quad \text{pro } i = 1 \dots M. \quad (87)$$

Zvolíme-li jednoduše $W_i \equiv N_i$, hovoříme o tradiční *Galerkinově metodě*:

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) N_i d\Omega = 0 \quad \text{opět pro } i = 1 \dots M. \quad (88)$$

Rozepsáním \mathcal{L} pro náš problém pak obdržíme:

$$\int_{\Omega} \rho C \partial_t \hat{u} N_i d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega = 0.$$

Protože divergence všeho (součinu):

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \partial_n \hat{u} N_i) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_i d\Omega$$

a protože zároveň platí Gaussova věta:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \partial_n \hat{u} N_i) d\Omega = \int_{\Gamma} K \partial_n \hat{u} N_i d\Gamma, \quad (89)$$

plyne odtud *Greenovo lemma*:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u}) N_i d\Omega = - \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_i d\Omega + \int_{\Gamma} K \partial_n \hat{u} N_i d\Gamma, \quad (90)$$

kteří se využívá pro elegantní dosazení za $K \partial_n \hat{u} = -\epsilon \sigma \hat{u}^4 + (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$ z okrajové podmínky (84), čímž ji automaticky splňujeme a nemusíme se jí dále zabývat.

Musíme ještě provést diskretizaci v čase:

$$\partial_t \hat{u} \simeq \frac{\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (91)$$

kde jsme opět horními indexy n a $n - 1$ označili hodnoty nové a staré.

Aby výsledná soustava rovnic byla a zůstala lineární, aproximujeme novou teplotu jako:

$$\hat{u}^4 \simeq (\hat{u}^{n-1})^3 \hat{u}^n; \quad (92)$$

případnou nelinearitu budeme řešit *ex post* iteracemi.

Shrneme-li naše dosavadní snažení:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u}^n N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u}^{n-1} N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \hat{u}^n \cdot \nabla N_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \epsilon \sigma (\hat{u}^{n-1})^3 \hat{u}^n N_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma = 0 \quad \text{pro } i = 1 \dots M; \end{aligned} \quad (93)$$

kde to jen šlo, použili jsme nové hodnoty \hat{u}^n , jak je obvyklé v implicitních metodách. Evidentně jde o soustavu M lineárních rovnic pro M neznámých u_j , kterou zbývá vyřešit.

Kdybychom to vyjádřili otrocky:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \sum_j u_j^n N_j N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \sum_j u_j^{n-1} N_j N_i d\Omega + \int_{\Omega} K \nabla \sum_j u_j^n N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \epsilon \sigma \left(\sum_j u_j^{n-1} N_j \right)^3 \sum_j u_j^n N_j N_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (1 - A) \Phi \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

a přeuspořádali:

$$\begin{aligned} & \sum_j u_j^n \left[\frac{\rho C}{\Delta t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + K \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\Omega + \epsilon \sigma \int_{\Gamma} \left(\sum_j u_j^{n-1} N_j \right)^3 N_j N_i d\Gamma \right] = \\ & = \sum_j u_j^{n-1} \frac{\rho C}{\Delta t} \int_{\Omega} N_j N_i d\Omega + (1 - A) \Phi \int_{\Gamma} \Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) N_i d\Gamma, \end{aligned}$$

už by bylo nad slunce jasné, že jde o soustavu typu:

$$u_j^n A_{ij} = B_i,$$

kde prvky matice jsou buď integrály, které lze pro danou síť bodů předpočítat předem (1. a 2. člen), nebo jednoduché integrály známých funkcí (3. člen). Totéž platí pro pravou stranu. Při jemné diskretizaci (velkém M) je matice A_{ij} nebezpečně velká a její inverze obtížná, nicméně bývá řídká.

3.6 Implementace v programu FreeFem++

Prakticky lze pro řešení použít program FreeFem++ (Hecht 2012), který dovoluje symbolický zápis integrálů ve stejné podobě jako rovnice (104):

```

real C = 680; // specific heat capacity [J/kg/K]
real K = 2.5; // thermal conductivity [W/m/K]
real rho = 2500; // bulk density [kg/m^3]
real epsil = 1.0; // infrared emissivity []
real sigma = 5.66962e-8; // Stefan-Boltzmann constant [W/m^2/K-4]
real A = 0.0; // Bond albedo []
real S0 = 1371.; // solar constant [W/m^2]
real r = 2.5; // distance [AU]
real Phi = S0/r^2; // solar flux [W/m^2]

real sx, sy, sz; // Sun direction []
real phi; // corresponding longitude [rad]
real theta = pi/2.; // co-latitude [rad], 0 deg ... north pole
real P = 7200.; // rotation period [s]
real t; // time [s]
real dt = 72.0; // time step [s]
real tstop = 100.*P; // time to stop [s]
int iterations = 3; // number of iterations

real chi = K/(rho*C); // thermal diffusivity [m^2 s^-1]
cout << "chi = " << chi << " m^2 s^-1" << endl;
func u0 = ((1.-A)*Phi/(4*epsil*sigma))^(1./4.); // equilibrium temperature [K]
cout << "u0 = " << u0 << " K" << endl;

load "msh3";
mesh3 Th = readmesh3("file.1.msh"); // read the mesh produced by tetgen
mesh3 Thirr; // a copy of the mesh (for shadowing)

fespace Vh(Th, P1); // the space of (linear) finite elements
Vh u, uold, v, b; // definitions of functions on this space

problem HDE(u,v) // the PDE definition, weak formulation
= int3d(Th) (rho*C/dt * u*v) // linear term
- int3d(Th) (rho*C/dt * uold*v) // from time discretization, implicit Euler
+ int3d(Th) (K * (dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) + dz(u)*dz(v))) // bilinear part
+ int2d(Th) (b * u*v) // Neumann BC
- int2d(Thirr,1) ( ((sx*N.x + sy*N.y + sz*N.z) > 0) * // zero on night side
(1-A)*Phi * (sx*N.x + sy*N.y + sz*N.z) * v); // simple irradiation

include "savedat.edp";
include "shadowxm.edp";

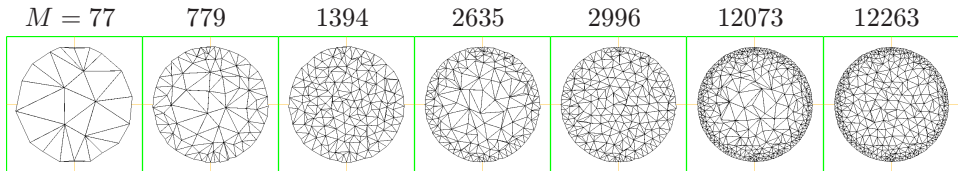
u = uold = u0; // initial condition
for (t=dt; t <= tstop; t+=dt) { // cycle in time
  phi = t/P*2*pi; // change solar unitvector
  sx = cos(phi)*sin(theta);
  sy = sin(phi)*sin(theta);
  sz = cos(theta);
  shadowxm(sx, sy, sz); // determine non-shadowed facets (Thirr)

  for (int k=0; k < iterations; k++) { // iterations due to non-linearity of BC
    b = epsilon*sigma * u^3; // semi-linearization of the u^4 term
    HDE; // solution of the PDE
  }
  uold = u; // time step
  savedat("output.dat", t, sx, sy, sz); // data output
}

```

Jediným rozdílem je drobná změna notace \hat{u} na \mathbf{u} , N_i na \mathbf{v} . Navíc je zde naznačeno volání výpočtu stínění pro nekonvexní tvary, kde nestačí použít jen skalární součin $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}$.

Triangulace. Důležitá otázka: „Jak zkonstruovat síť?“ Tzn. nejen seznam bodů, ale i jejich spojnic, podle nichž se vyčíslují básové funkce N_j . Závísí na ní nejen přesnost numerického řešení, ale i samotná možnost inverze matice A_{ij} , protože nevhodná síť může vést k singularitě. Často užívanou metodou je *Delaunayho triangulace*. V k -rozměrném prostoru zajišťuje, že pro každý útvar s $k + 1$ body (trojúhelník, čtyřstěn) jemu opsaná kružnice neobsahuje žádný další vrchol. Prakticky je možné triangulaci provést programem TetGen (Si 2006; viz obr. 25).



Obr. 25 — Různé diskretizace v prostoru, tzn. síť čtyřstěnná vytvořená programem TetGen (Si 2006), které byly použity pro numerické řešení rovnice vedení tepla ve sférickém tělese. Číslo M označuje počet vrcholů sítě.

Radiační síla. Známe-li již povrchovou teplotu $u(\mathbf{r}, t)$, můžeme vypočítat i příslušné dynamické působení. Element radiační síly za předpokladu Lambertova rozplylu je:

$$d\mathbf{F} = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{c} u^4 \mathbf{n} d\Gamma. \quad (94)$$

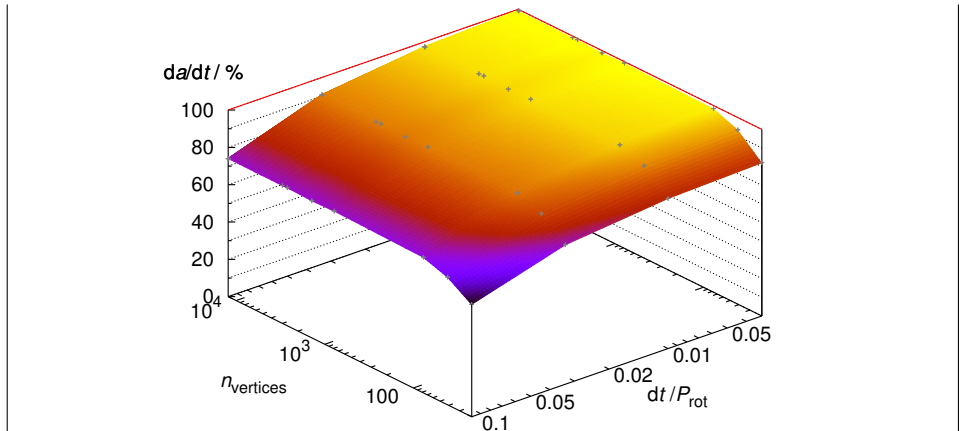
Celkové zrychlení je zřejmě $\mathbf{a} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} d\mathbf{F}$ a moment síly $\mathbf{T} = \int_{\Gamma} \mathbf{r} \times d\mathbf{F}$. Kromě toho musíme počkat na ustálení a provést středování přes periodu rotační, v horším případě i orbitální. Z historických důvodů se působení nazývají Jarkovského jev a YORP. Pro ověření přesnosti numerického výpočtu jej můžeme porovnat s analytickou teorií pro koule (Vokrouhlický 1998; obr. 26). Příklad pro nepravidelný meteoroid je na obr. 27.

3.7 Nekonvexní stínění, tepelný a rozptýlený tok

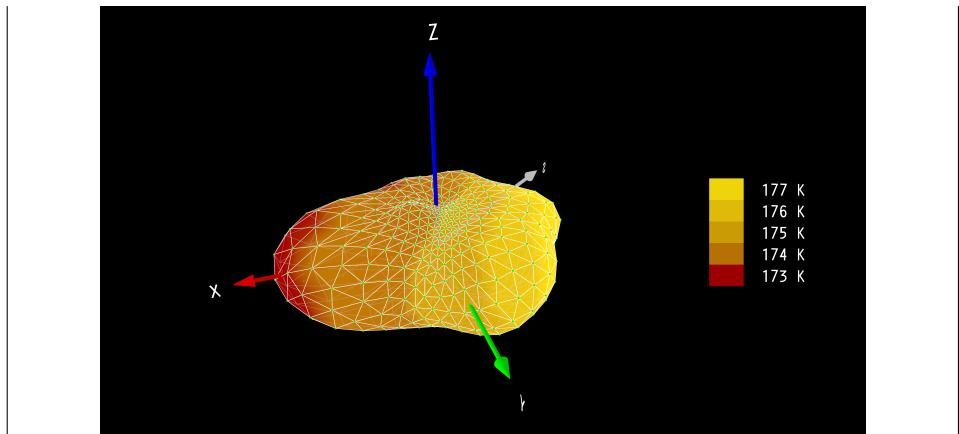
Dokonalejší modely mívají úplnější popis zářivého toku. Jednak je v zářivém toku od Slunce zohledněno stínění od jiných míst povrchu (Ševeček aj. 2015):

$$\mathcal{F} = (1 - A)\Phi\mu(\mathbf{s}, \mathbf{r})\Xi(\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}), \quad (95)$$

kde μ je funkce stínění, nabývající hodnoty 0 nebo 1. Protože je třeba pro každou plošku kontrolovat všechny plošky s $\Xi > 0$, šlo by o problém složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. Pro daný nekonvexní tvar je ale možné jí předpočítat s určitým krokem v úhlech; pro konvexní by bylo všude $\mu = 1$.



Obr. 26 — Podíl Jarkovského driftu velké poloosy $da/dt = 2T/n$ spočteného numericky a analyticky, pro různé diskretizace v prostoru (počet M vrcholů sítě) a diskretizace v čase (časový krok Δt). Předpokládali jsme zde sférické těleso, poloměr $R = 0,1$ m, rotační periodu $P_{rot} = 2$ h. Pro $M > 10^3$ a $\Delta t/P_{rot} < 0.02$ je rozdíl mezi numerickým a analytickým řešením menší než 3%. Drift je úměrný $2T/n'$ (dle ??), kde T označuje transverzální složku zrychlení \mathbf{a} a n' střední pohyb.



Obr. 27 — Rozložení teploty $u(\mathbf{r}, t)$ na povrchu meteoroidu o efektivním poloměru $R \simeq 10$ cm, spočtené metodou FEM. Osy $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ jsou fixní v tělese, zatímco vektor \mathbf{s} směřuje ke Slunci. Zohledněno je i nekonvexní stínění. Maximum teploty i vyzářování jsou posunuté oproti \mathbf{s} , což vede k nenulovému transverzálnímu zrychlení měnícímu orbitální pohyb (Jarkovského jevu). Anizotropie vyzářování také vytváří nenulový moment síly měnící rotaci tělesa (jev YORP).

Další je tepelné záření přicházející od jiných míst povrchu:

$$\mathcal{F}_{\text{th}} = (1 - A_{\text{th}}) \int_{\Gamma} \epsilon' \sigma u'^4 \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (96)$$

kde $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ je funkce viditelnosti, opět nabývající hodnoty 0 nebo 1, v závislosti na tom, zda se plošky \mathbf{r} a \mathbf{r}' mohou ozařovat; pro konvexní tvar by bylo všude $\nu = 0$. Pro vyzařování předpokládáme také Lambertův kosinový zákon. Zde musíme pro každou plošku počítat integrál přes povrch, jde tedy o problém složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. Navíc zde v integrálu vystupuje hledaná funkce u , tzn. že se problém formálně stává integrodiferenciální; buď bychom se museli smířit s použitím starých teplot u^{n-1} , anebo provést iterování, abychom v okrajové podmínce měli skutečně u^n .

Konečně jde o rozptýlené záření od jiných míst povrchu:

$$\mathcal{F}_{\text{sc}} = (1 - A) \int_{\Gamma} A' \Phi \mu' \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}' \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma'. \quad (97)$$

Platí obdobná tvrzení jako v předchozím případě.

Při výpočtu radiační síly bychom pak měli zohlednit, že záření z dané plošky nemůže vždy nerušeně uniknout, ale může zapůsobit na tytéž plošky, které ji ozařují:

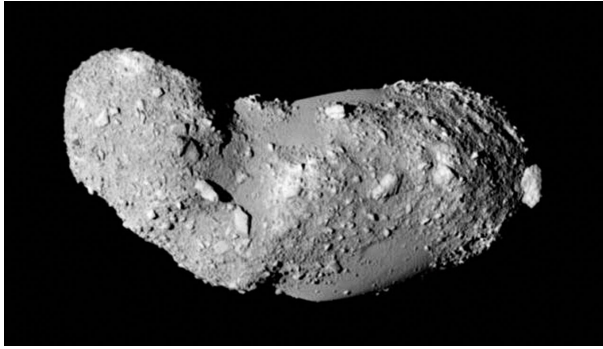
$$d\mathbf{F}' = + \frac{\epsilon \sigma}{c} u^4 \int_{\Gamma} \frac{\cos \alpha \cos \alpha'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (98)$$

i účinek rozptylování sama o sobě:

$$d\mathbf{F}_{\text{sc}} = - \frac{2}{3} \frac{A\Phi}{c} \mu(\mathbf{s}, \mathbf{n}) \mathbf{n} d\Gamma.$$

Balvany na Itokawě. Kromě celkového tvaru je u malých planetek nutné zohledňovat i vedení tepla v malých útvarech v transverzálním směru. Například planetka (25143) Itokawa má rozměr zhruba 0,5 km, ale na detailních fotografiích je poseta balvany o rozměrech řádově $1/\beta_1 \simeq 10$ cm, což je mnohem méně než rozlišení modelu tvaru.

Slunce přitom každé ráno svítí na východní stranu balvanů, teplo je vedeno skrz od východu k západu, odpoledne je západní strana navíc osvětlená Sluncem, její teplota je tedy v průměru vyšší, což vytváří značnou asymetrii tepelného vyzařování a radiační sílu $d\mathbf{F}$ ve směru východním. Moment síly \mathbf{T} od všech balvanů působí ve směru osy rotace $\vec{\omega}$ a tudíž způsobuje zrychlování dle momentové věty $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{T}$, které klidně může převažovat nad zpomalováním od celkového tvaru. Pro pozorované rozdělení velikostí balvanů ze sondy Hayabusa (Saito aj. 2010) vychází řádově $d\Omega/dt \simeq 10^{-7}$ rad d^{-2} (Ševeček aj. 2015).



Obř. 28 — Celkový snímek planety (25143) Itokawa ze sondy Hayabusa. Rozměr planety dosahuje $0,54 \times 0,31 \times 0,25$ km. Pozorovaná rotační perioda $P = 12,1$ h není konstantní, úhlové zrychlení dosahuje $d\Omega/dt = (0,35 \pm 0,04) \cdot 10^{-7}$ rad d⁻². Z dálky jsou viditelné jednotlivé velké balvany. © JAXA.

- [43] ČAPEK, D. *Thermal effects in the physics and dynamics of the small Solar System bodies*. PhD. Thesis, Charles Univ., 2007.
- [44] HECHT, F. *New development in FreeFem++*. *J. Numer. Math.*, **20**, 251, 2012.
- [45] LANGTANGEN, H. P. *Computational partial differential equations. Numerical methods and Diffpack programming*. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [46] SAITO, J. A. J. *Hayabusa AMICA V1.0*. NASA Planetary Data System 90, 2010.
- [47] SI, H. *TetGen — A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator*. 2006. (<http://tetgen.berlios.de>).
- [48] ŠEVEČEK, P. *Vliv tepelné emise topografických útvarů na rotační dynamiku planetek*. Bc. Thesis, Charles Univ., 2014.
- [49] ŠEVEČEK, P., BROŽ, M., ČAPEK, D., ĎURECH, J. *The thermal emission from boulders on (25143) Itokawa and general implications for the YORP effect*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **450**, 2104–2115, 2015.
- [50] VOKROUHLICKÝ, D. *Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory*. *Astron. Astrophys.*, **335**, 1093–1100, 1998.