

0.1 Hydrodynamika protoplanetárního disku

Majíc určitou představu, že ve vesmíru existují hvězdy a okolo nich plynoprachové disky (Brož a Šolc 2013), zkonstruujeme zde poměrně úplný fyzikální model tohoto disku. Budeme přitom postupovat „opačně než kolega Komenský“, čili od složitějšího k jednoduchému. Sepíšeme nejprve všechny relevantní rovnice, abychom je viděli v celé kráse, a teprve poté budeme diskutovat jednoduché situace.

Disk si budeme představovat jako *spojité prostředí*, což je velmi významné, nicméně obvyklé zjednodušení plynu, respektive plazmatu (obsahujícího ionty, elektrony i neutrální atomy a molekuly). Umožní nám to pro fyzikální veličiny používat diferencovatelné spojité funkce.

0.1.1 Magnetohydrodynamika s přenosem záření, Eulerův popis

Pro popis zvolíme Eulerův formalismus, tzn. statického pozorovatele, který sleduje proudění plynu okolo. Fyzikální zákony, které nám popisují vývoj hustoty ρ disku, rychlosti \mathbf{v} atd. od nějakého — zatím neznámého — počátečního stavu, je následující. Rovnice kontinuity (neboli zákon zachování hmoty, např. v jednotkách $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-1}$):¹

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{derivace } f(\mathbf{r}, t)} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}_{\text{zředění}} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

Navierova–Stokesova rovnice pro tekutiny (též pohybová, m s^{-2}):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \underbrace{\nabla \Phi}_{\text{gravitace}} + \frac{1}{\rho} \underbrace{\frac{1}{\mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}_{\text{Lorentz}} + \frac{1}{\rho} \underbrace{[\nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v} + \nabla (\mu_2 + \frac{1}{3} \mu_1) \nabla \cdot \mathbf{v}]}_{\text{viskozita}}, \quad (2)$$

rovnice tepelné rovnováhy (1. věta termodynamická, $\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla U}_{\text{konvekce}} = - \underbrace{U \nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{zředění}} - \underbrace{P \nabla \cdot \mathbf{v}}_{\text{práce}} - \underbrace{\kappa_{\text{P}} \rho \frac{\sigma}{4} T^4}_{\text{emise}} + \underbrace{\kappa_{\text{P}} \rho c E_{\text{rad}}}_{\text{absorpce}} - \underbrace{\nabla \cdot F_{\star} \hat{r}}_{\text{ozáření}} + \underbrace{\nabla \cdot K \nabla T}_{\text{difuze}}, \quad (3)$$

¹ pro připomenutí, operátor gradientu jest $\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, divergence $\nabla \cdot$ (tj. skalární součin), rotace $\nabla \times$ (vektorový součin); mějme na paměti jejich české významy: stoupání, rozbíhavost a stáčení, jež mohou pochopení rovnic napomoci

rovnice přenosu záření ($\text{J m}^{-3} \text{s}^{-1}$):²

$$\frac{\partial E_{\text{rad}}}{\partial t} = \overbrace{\nabla \cdot \frac{c\lambda_{\text{lim}}}{\kappa_{\text{R}}\rho} \nabla E_{\text{rad}}}^{\text{difuze}} + \overbrace{\kappa_{\text{P}}\rho \frac{\sigma}{4} T^4}^{\text{emise}} - \overbrace{\kappa_{\text{P}}\rho c E_{\text{rad}}}^{\text{absorpce}}, \quad (4)$$

indukční rovnice (T s^{-1}):³

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \overbrace{\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}^{\text{advekce}} + \overbrace{\nabla \cdot \eta_{\text{mag}} \nabla \mathbf{B}}^{\text{difuze}}, \quad (5)$$

Poissonova rovnice ($\text{J kg}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$\nabla^2 \Phi_{\text{disk}} = 4\pi G\rho, \quad \Phi = -\frac{GM_{\star}}{r} + \Phi_{\text{planet}} + \Phi_{\text{disk}}, \quad (6)$$

stavová rovnice pro ideální plyn (Pa):

$$P = (\Gamma - 1)U = \frac{\rho}{\mu m_{\text{H}}} kT, \quad (7)$$

rovnice pro tok záření od hvězdy (včetně zeslabování opacitou prachu a plynu; $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$):

$$F_{\star} = \int_{\omega} \int_{\nu} B_{\nu}(T_{\star}) \left(\frac{R_{\star}}{r} \right)^2 e^{-\tau_{\nu}} d\nu d\omega, \quad \tau_{\nu} = \int_{R_{\star}}^r \kappa_{\nu} \rho dr. \quad (8)$$

Značení veličin je standardní: t čas, \mathbf{r} polohový vektor, ρ hustota, \mathbf{v} rychlost, U vnitřní energie plynu (na jednotku objemu), E_{rad} hustota energie záření, \mathbf{B} magnetické pole, Φ gravitační potenciál, P tlak, T termodynamická teplota, F_{\star} zářivý tok (od hvězdy), μ_1 dynamická (první) viskozita, μ_2 dynamická objemová viskozita, κ_{P} Planckova opacita, κ_{R} Rosselandova opacita, σ Stefanova–Boltzmannova konstanta, c rychlost světla, K tepelná vodivost, λ_{lim} limiter toku, η_{mag} magnetická difuzivita (nepřímo úměrná vodivosti σ' a magnetické permeabilitě μ_{vac}), G gravitační konstanta, Γ adiabatický index, μ střední molekulová hmotnost plynu, m_{H} hmotnost atomu vodíku, k Boltzmannova konstanta, B_{ν} Planckova funkce (pro intenzitu), ν frekvence, ω prostorový úhel, T_{\star} efektivní teplota hvězdy, R_{\star} její poloměr, τ_{ν} optická tloušťka.

² v difuzní aproximaci omezené tokem záření

³ zahrnující Maxwellovy rovnice a Ohmův zákon pro kvazineutrální plazma

Jedná se o soustavu 10 nelineárních parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu (plus 3 algebraických), jež obsahují 13 neznámých funkcí (skalárních): $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $U(\mathbf{r}, t)$, $E_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$, $P(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$, $F_{\star}(\mathbf{r}, t)$; které jsou závislé na 4 nezávislých veličinách: \mathbf{r} , t . Dále zde máme volné parametry: M_{\star} , R_{\star} , T_{\star} , M_{planet} , μ_1 , μ_2 , η_{mag} , μ , Γ ; a dané funkce (složité, ale dané): $\kappa_{\text{P}}(\rho, T)$, $\kappa_{\text{R}}(\rho, T)$, $\kappa_{\nu}(\rho, T)$, $\lambda_{\text{lim}}(E_{\text{rad}}, \nabla E_{\text{rad}})$, $\tau_{\nu}(\mathbf{r}, \kappa_{\nu}, \rho)$.

K jednotlivým rovnicím si dovolíme několik „praktických“ poznámek. Rovnici (1) je možno rozumět intuitivně: mějme vlevo hustotu velkou a vpravo nulovou. Pokud vektory rychlosti směřují zleva doprava, budeme mít za chvíli vpravo nějakou látku (a vlevo nic, respektive to, co bylo vlevo od leva). Kladná rozbíhavost rychlostí $\nabla \cdot \mathbf{v}$ by přitom odpovídala růstu (elementárního) objemu dV , čili zředění a poklesu hustoty ρ .

V rovnici (2) vystupuje na pravé straně zejména gradient tlaku ∇P , neboli makroskopický projev elektromagnetických sil mezi mikroskopickými částicemi plynu. Představme si například, že vlevo máme vyšší tlak, vpravo nižší, tudíž na ploše rozhraní jsou dvě různě velké tlakové síly opačného směru, které způsobují zrychlení $-\frac{1}{\rho}\nabla P$.

Lorentzův člen odpovídá klasickému vztahu $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, kde ovšem obecně $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{nábojů}} \neq \mathbf{v}_{\text{plynu}}$! V plazmatu je makroskopické elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ a hustotu proudu $\mathbf{j} = q\mathbf{v}$ lze vyjádřit z Ampérova zákona $\mu_{\text{vac}}\mathbf{j} \doteq \nabla \times \mathbf{B}$.

Viskózní člen se zde objevuje proto, že mezi vrstvami tekutiny proudícími různými rychlostmi vznikají třecí síly; síla na jednotku plochy se označuje jako *napětí* (s jednotkou Pascal). Pro obvyklé (newtonovské) tekutiny je přitom tření úměrné rozdílu rychlostí, čili $\mu_1 \nabla \mathbf{v}$. Napětí odlišná místo od místa pak vedou ke zrychlení $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v}$.

Rovnice (3) jest obdobou (1), jen zde namísto hustoty hmoty ρ vystupuje hustota energie U . Pak jsme museli dle 1. věty termodynamické ($dU = -dW + dQ$) připsat mechanickou práci vykonanou plynem ($-PdV$) a všechny zdroje tepla.

Skutečnost, že při emisi záření hraje roli opacita, se může zdát podezřelá, ale to je způsobeno skutečností, že emisní koeficient je za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy dán Kirchhoffovým zákonem, $j_{\nu} = \kappa_{\nu} B_{\nu}$.

Tok tepla je podle Fourierova zákona úměrný gradientu teploty, respektive $\mathbf{F}_{\text{heat}} = -K \nabla T$, neboť teplo teče z místa s vyšší teplotou do místa s nižší teplotou. Pokud se tok navíc rozbíhá ($\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{heat}}$ je kladná), děje se tak na úkor vnitřní energie U , proto je výsledné znaménko $+$. Toto platí obecněji pro difuzi čehokoliv, nejen tepla, ale též záření, částic, magnetického pole.

Kdybychom chtěli, lze ze (3) odvodit klasickou rovnici vedení tepla. Pro statickou pevnou látku by totiž bylo $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\rho = \text{konst.}$ (jde pak o parametr),

těž $V = \text{konst.}$ Stačilo by psát $\frac{\partial U}{\partial t} = K\nabla^2 T$ a použít jinou stavovou rovnici, $U = \rho c_V T$.

V rovnici (4) není advekce, protože záření není přenášeno plynem v podobě E_{rad} , nýbrž prostřednictvím U . Emise a absorpce jsou zde pochopitelně s opačným znaménkem než v rovnici (3), která se týká plynu.

Gravitační potenciál v rovnici (6) je zaveden tak, že zrychlení $\mathbf{a}_g = -\nabla\Phi$.

Uvědomme si, že výše uvedené rovnice jsou *velmi obecné!* S výjimkou kvantovky a relativity v sobě zahrnují (téměř) celou klasickou fyziku, popisující většinu jevů v našem okolí i ve vesmíru. Nicméně i tak musíme být obezřetní, protože některé členy jsou platné pouze ve stavu (lokální) termodynamické rovnováhy.

0.1.2 Vliv částic a dalších fyzikálních jevů

Při numerickém řešení rovnic máme vždy omezené rozlišení, což si obvykle vynucuje odlišení „malých“ pevných částic (prachu, balvanů, planetesimál, planet) od plynu (tzn. spojitého prostředí).

Občas musíme přidat další rovnice, respektive členy v rovnicích, abychom postihli „méně důležité“ fyzikální jevy, které však mohou být v dané situaci (pro vysvětlení určitého pozorování) zcela zásadní, například:

0. neinerciální členy, pokud bychom pracovali nějaké v neinerciální souřadnicové soustavě, například rotující úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$:

$$\mathbf{a}_{\text{neinerciální}} = -\overbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r})}^{\text{odstředivé}} - \overbrace{2\vec{\Omega} \times \mathbf{v}}^{\text{Coriolis}}, \quad (9)$$

kde první člen je opravdu $-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \mathbf{r}) = \vec{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \vec{\Omega}) = \mathbf{r}\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} - \vec{\Omega}\vec{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \Omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$ podle vektorové identity „bác mínus cáb“;

1. pohyb částic, jejich vzájemná gravitace:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \neq j} -\frac{GM_i}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad (10)$$

pro jejíž řešení je dobré použít symplektický integrátor. Pokud by částic bylo obrovské množství, zavádějí se sledovací částice, reprezentující vždy učitou skupinu částic na podobných trajektoriích;

2. vazba částice \leftrightarrow plyn, skrzevá gravitaci $\mathbf{a}_{\text{částice}} \doteq \int_{\text{disk}} -\frac{GdM}{r^3} \mathbf{r}$, a aerodynamické tření dle Epsteinova nebo Stokesova zákona:

$$\mathbf{a}_{\text{Epstein}} = -S\rho v_T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{pro } D \ll \ell, \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_{\text{Stokes}} = -\frac{1}{2}CS\rho|\mathbf{u} - \mathbf{v}|(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad \text{pro } D \gg \ell, \quad (12)$$

kde S označuje průřez částice, D průměr, C koeficient odporu, v_T termální rychlost (plynu), \mathbf{u} rychlost částice, \mathbf{v} rychlost plynu a ℓ střední volnou dráhu molekul (plynu);

3. vzájemné srážky částic, příslušná fragmentace nebo akrece, popsané relacemi $\frac{dM}{dt}(M)$, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}(M)$, používají se simulace Monte–Carlo nebo samostatná hydrodynamika;
4. tlak záření $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4$, $P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}$;
5. radiační zrychlení, $\mathbf{a}_{\text{rad}} \doteq \frac{\kappa_{\text{R}}}{c} \mathbf{F}_{\text{rad}}$, přičemž tok už známe, $\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{c\lambda_{\text{lim}}}{\kappa_{\text{R}}\rho} \nabla E_{\text{rad}}$;
6. viskózní ohřev, čili $\mathbf{S} \cdot \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$, kde tenzor napětí \mathbf{S} je též jako ve viskóznímu členu $\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}$;
7. rezistivní ohřev, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \doteq \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \doteq \frac{\mu_{\text{vac}}^2}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{B})^2$, dle Ohmova a Ampérova zákona, kde \mathbf{j} označuje hustotu proudu a \mathbf{E} elektrické pole;
8. anizotropní vedení tepla a jeho saturace, $\nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{heat}}$, $\mathbf{F}_{\text{heat}} = \frac{F_{\text{sat}}}{F_{\text{sat}} + |\mathbf{F}|} \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = K_{\parallel} \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T) + K_{\perp} [\nabla T - \mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \nabla T)]$, $F_{\text{sat}} = 5\phi\rho c_s^3$, kde $\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$, $c_s = \sqrt{\Gamma \frac{\partial P}{\partial \rho}}$ označuje rychlost zvuku a $\phi < 1$ je volný parametr;
9. radiativní rozpad, $\rho\epsilon_{\text{decay}}(X, Y, Z)$, se změnami abundancí $\frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\alpha_k}$;
10. částicová difuze, $\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot D\nabla n$, $D = \frac{1}{3}\ell v_T$, kde n označuje koncentraci, D difuzní koeficient, ℓ střední volnou dráhu, v_T termální rychlost;
11. fázové přeměny, depozice plynu a sublimace pevných částic;
12. chemické reakce, případně jejich katalyzace zářením nebo povrchy;
13. Hallův jev, čili člen $-\nabla \times (\frac{1}{en_e} \mathbf{j} \times \mathbf{B})$ v indukční rovnici (5) (Armitage 2010);
14. ambipolární difuze, $+\nabla \times (\frac{1}{\gamma\rho_i\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})$ tamtéž, v řidším prostředí, tj. při nižší frekvenci srážek, se neutrální částice mohou pohybovat systematicky jinak než ionty, což se projeví jako tření, skrze koeficient $\gamma \equiv \langle \sigma v_i \rangle / (m_i + m_n)$.
15. změny ionizace a rekombinace, popsané rovnovážnou Sahovou rovnicí:

$$\frac{X_i^2}{1 - X_i} n_e = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi}{kT}}, \quad (13)$$

kde X_i označuje stupeň ionizace, a χ ionizační energii atomu. Nepřímo je ovlivněna i stavová rovnice prostřednictvím $\mu(\rho, T, X, Y, Z)$ a tamtéž bychom měli správně zohlednit *degeneraci* elektronového plynu faktorem $\lambda_{\text{deg}}(\rho, T)$;

16. termonukleární reakce včetně ztrát energie neutrinu, $\rho\epsilon_{\text{nukl}}(\rho, T, X, Y, Z) - \rho\epsilon_{\nu}$, a odpovídající rovnice pro změny chemického složení (abundancí X vodíku,

Y helia a Z těžších prvků, resp. jednotlivých izotopů):⁴

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\alpha_i}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\alpha_j}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = \sum_k \frac{\epsilon_k}{\alpha_k}. \quad (14)$$

Čtenář se přečtením tohoto řádku vzdává jakéhokoliv nároku na úplnost výčtu...

0.1.3 Vztah Eulerova a Lagrangeova formalismu

Alternativně bychom mohli použít Lagrangeův formalismus, tzn. souhybného pozorovatele, který se líně nechává unášet proudící tekutinou. Neznámé jsou pak *trajektorie* (nekonečného množství) bodů kontinua $\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, respektive $\rho(\mathbf{r}_0, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t)$, apod. pro další veličiny, všechny závislé na čase t a „indexované“ například počátečními polohami \mathbf{r}_0 (v čase $t = 0$).

Namísto parciálních derivací $\frac{\partial}{\partial t}$ a vlastně celých levých stran bychom užili totálních $\frac{d}{dt}$, jejichž vztah plyne z derivace funkce $\phi(\mathbf{r}, t)$ dvou proměnných:

$$\underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{\text{Lagrange}} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial t}}_{v_i} = \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi}_{\text{Euler}}.$$

Polohy \mathbf{r} lze posléze spočítat z \mathbf{v} jako:

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}_0, t) dt$$

V dalším zůstaneme u našeho Eulerova, nicméně je dobré tušit, že existují kódy využívající Lagrange.⁵ Výhodou Lagrangeova popisu mj. je, že nemusíme předem konstruovat (zbytečně rozlehlou) fixní síť bodů, zvlášť když předem nevíme, kam se body kontinua dostanou. Opačně řečeno, výhodou Eulerova popisu je, pokud nás eminentně zajímá jen omezená oblast prostoru, nepočítáme zbytečně trajektorie, které stejně skončí mimo ni.

⁴ Po zahrnutí posledně jmenovaných jeví již můžeme počítat *celý* vývoj hvězd, včetně jedno-rozměrné hydrostatické aproximace, konvekce, hvězdného větru, trojrozměrné struktury, rotace, magnetického dynama, případných vnějších vlivů ($\Phi_{\text{dvoj*}}$, $F_{\text{dvoj*}}$). Na druhou stranu je nutné připustit, že některé jevy, například erupce, rekonexe, výboje, resp. pohyb svazků částic, jsou natolik *nerovnovážné*, že předpoklad LTE bychom museli opusit a mj. bychom nesměli vůbec používat teplotu T , nýbrž „divoké“ distribuční funkce jednotlivých veličin.

⁵ Aby se Euler a Lagrange nepletli, je potřeba se podívat na jejich podobizny. Lagrange se zdá hubenější a asketičtější, nebude mu tedy dělat problém jít sledovat trajektorie. Naopak Euler je na první pohled „tlustší a línější“, ten se za žádnou cenu nikam se nepohne.

0.1.4 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita

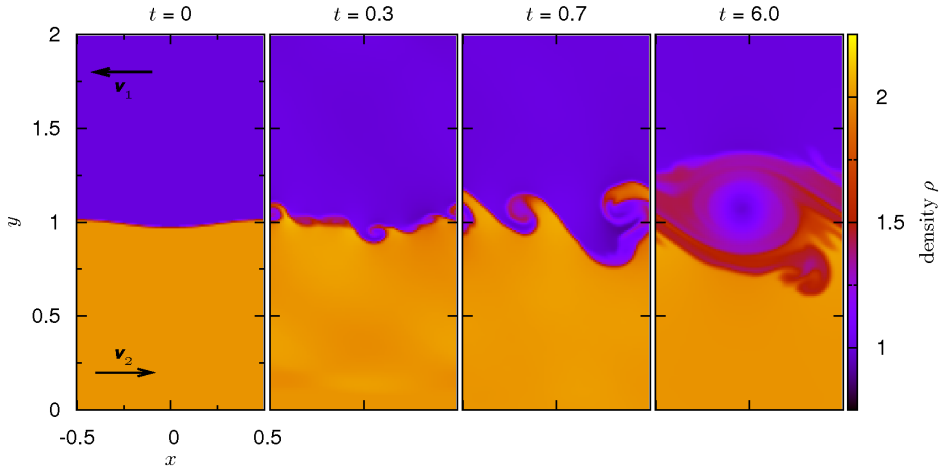
Řešení hydrodynamických rovnic vykazují několik zásadních nestabilit, z nichž nejzákladnější je Kelvinova–Helmholtzova. Vzniká již ve velmi jednoduché situaci⁶: dvě vrstvy nestlačitelné kapaliny, jedna proudící tam a druhá zpět, bez gravitace. Z celé soustavy (1) až (6) nám zůstanou jen dvě „očesané“ rovnice:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P.$$

Jak vidíme z numerického řešení (obr. 1), jedná se o významný zdroj turbulence neboli vírů. Není možno nevědět, že vlny na moři jsou způsobené právě tímto jevem.

U každé nestability bychom si měli také uvědomit, co omezuje její růst. V tomto případě je samoomezující, velikost víru je dána počátečními podmínkami a parametry problému.



Obr. 1 — Vývoj Kelvinovy–Helmholtzovy nestability z počáteční malé perturbace rozhraní. Počáteční podmínky (v bezrozměrných jednotkách): $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $P_1 = P_2 = 10$, $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (+1, 0)$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo periodické, nahoře a dole $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Stavová rovnice v tomto případě odpovídala ideálnímu plynu. Výpočet byl proveden programem Pluto (Mignone aj. 2007) ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů.

⁶ Pozor na implikaci! Neznamená to, že nevzniká ve složitějších situacích.

Vertikální stříhová nestabilita. V protoplanetárním disku se rozvíjí zejména ve svislém směru, neboť větší z znamená trochu větší $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ od Slunce, čili menší keplerovskou rychlost $v_{\text{kepl}} = \sqrt{GM_*/r}$ než v základní rovině, což vede ke stříhu; proto se jinými slovy nazývá vertikální stříhová nestabilita (angl. VSI).

0.1.5 Rayleighova–Taylorova nestabilita

Pro vznik druhé, Rayleighovy–Taylorovy nestability je třeba: hustší nestlačitelná kapalina nahore, řidší dole, to vše v gravitačním poli. Příslušné rovnice jsou:

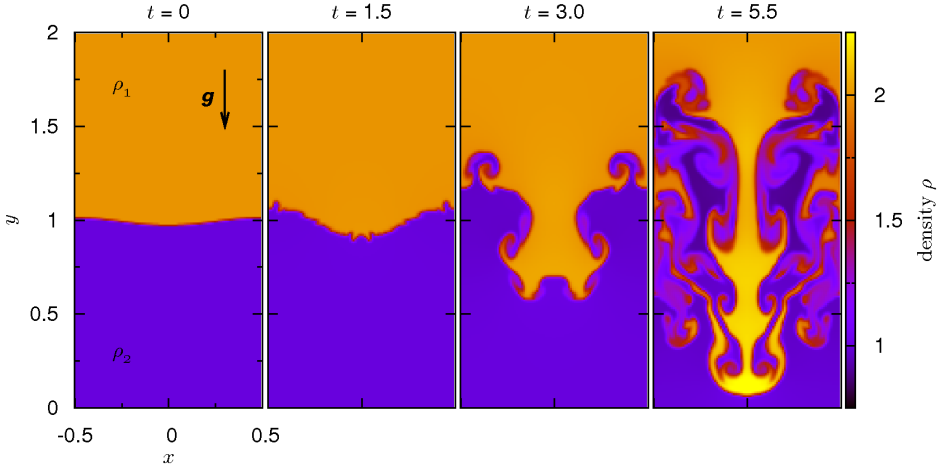
$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi.$$

Vývoji (obr. 2) je možno rozumět následovně: jde o stav s vyšší energií, který samovolně přejde do stavu s nižší energií a vyšší neuspořádaností (entropií). S ohledem na Archimédův zákon se tato nestabilita nazývá též *vztlaková*. Pokud bychom řešili zároveň tepelnou rovnováhu (3) a viděli bychom transport vnitřní energie, hovořili bychom o *konvekci*.

Při vývoji nestability RT vždy dochází ke vzájemným pohybům tekutin, čili se nevyhnutelně objeví i nestabilita KH. Obě nestability (kouřící komín) běžně kreslí děti v mateřské školce, rodiče jim pouze zatajili, oč se jedná.

Nestabilitu obvykle omezuje až hranice (resp. okraj výpočetní domény). V atmosféře bývá vytvářena přirozeně teplotním zvrstvením či zvratem.



Obr. 2 — Vývoj Rayleighovy–Taylorovy nestability z počáteční malé perturbace rozhraní. Protože dochází ke vzájemným pohybům tekutiny, nevyhnutelně se objeví i nestability Kelvinovy–Helmholtzovy. Počáteční podmínky: $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$, $\Phi = y$, resp. $\mathbf{g} = -\nabla\Phi = (0, -1)$, $P(y)$ odpovídá hydrostatické rovnováze, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = (0, 0)$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo periodické, nahoře a dole $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Stavová rovnice odpovídá ideálnímu plynu. Výpočet programem Pluto ve dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů.

Baroklinická nestabilita. Jen trochu složitější variantou RT je nestabilita baroklinická (Klahr a Bodenheimer 2003, Lesur a Papaloizou 2010), ve které máme kromě kompresibilní rovnice kontinuity i difuzi vnitřní energie a nějaký ohřev:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho &= -\rho\nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P - \nabla\Phi, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla U &= -U\nabla \cdot \mathbf{v} - P\nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot K\nabla T - \nabla \cdot F_\star \hat{\mathbf{r}}; \end{aligned}$$

jedná se evidentně o termodynamický tepelný stroj, neustále pohánějící víření. V protoplanetárním disku je podkritická (lokální) baroklinická nestabilita (angl. SBI) patrně hlavním zdrojem turbulence.

Kvalitativně funguje takto: fluktuace posune bublinu plynu „nahoru“ (radiálně, proti \mathbf{a}_g), v okolí je (obvykle) nižší P_o , v bublině se vždy udržuje totéž $P_b = P_o$, nastává víceméně adiabatická expanze, při níž jak ρ_b , tak T_b klesají ($P \propto \rho T$).

Pokud ale teplotní profil $T_o(r)$ klesá dostatečně strmě, například proto, že prostředí je mizerně průhledné (κ_ν velké), bývá $T_b > T_o$, $\rho_b < \rho_o$; profil je konvektivně nestabilní. Bublina je balón.

Nahoře se ovšem okolí pohybuje jinou rychlostí v_{kepl} , bublina se proto posouvá „horizontálně“, ve směru $\hat{\phi}$. Zde je čas na difuzi vnitřní energie bubliny, která se odevzdá okolí, ρ_b , T_b klesnou na úroveň ρ_o , T_o . Protože si kontinuita a tlakový člen vynucují další pohyb, bublina padá zpět „dolu“, dochází k adiabatické kompresi, pohybu ve směru $-\hat{\phi}$, a přijímání tepla z okolí, čímž se cyklus uzavírá.

V meteorologii se setkáváme s týmiž situacemi. V cyklónách nebo anticyklónách, roztočených díky spolupůsobení gradientu tlaku a Coriolisova zrychlení (viz Brož a Šolc 2013, str. 177), se chladný a teplý vzduch vyskytují takřikajíc vedle sebe (rozhraní nazýváme fronty), přičemž jejich rozpad bývá způsoben právě baroklinickou nestabilitou, když chladný vzduch nateče pod teplý (říkáme, že nastala okluze). Na rozhraních vzdušných hmot se pak objevují velkoškálové Rossbyho vlny.

0.1.6 Magneto–rotační nestabilita

Třetí nestabilita, magneto–rotační (Balbus a Hawley 1991, angl. MRI) vyžaduje přinejmenším toto nastavení: nestlačitelná kapalina, bez gravitace, diferenciální rotace, magnetické pole, bez difuze. Čili:

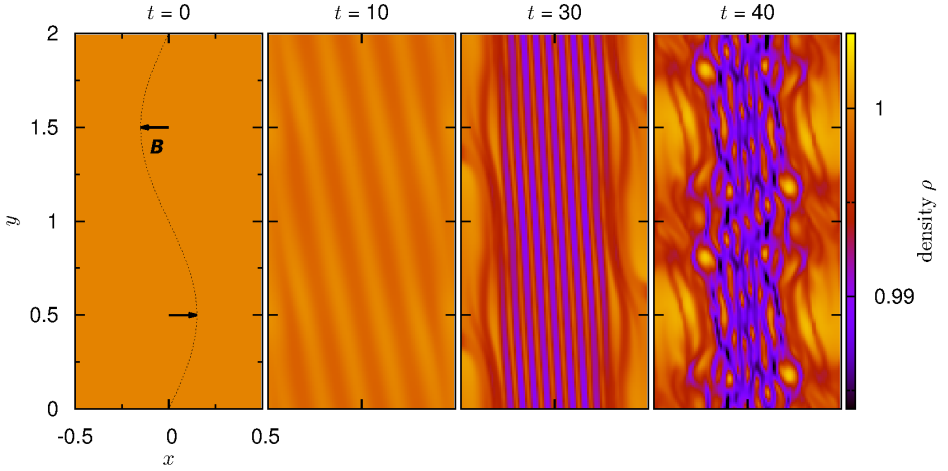
$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_* + \frac{1}{\rho \mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Základním principem je zamrznutí siločar v plazmatu a jejich navíjení v diferenciálně rotujícím prostředí (se stříhem rychlostí), čili zesilování slabých perturbací magnetického pole. Ostatně magnetické dynamo v nitru Slunce nebo Země je to-též. Rozvoj nestability je znázorněn na obr. 3. Podotkněme, že předpoklad „bez difuze“ nutně znamená nemalý stupeň ionizace látky, jinak by Lorentzův člen byl irelevantní. Dostatečný stupeň ionizace je v blízkosti Slunce, daleko od Slunce (i díky kosmickému záření), též na povrchu disku ozařovaného UV, ale není jisté, zda uprostřed. Tam může existovat *mrtvá zóna*, v níž MRI nefunguje a disk není (tak) turbulentní.

Nestabilitu rozvíjející se za výše uvedených podmínek omezuje až hranice (zde tloušťka disku) nebo difúzní člen, kdybychom ho měli. Pokud však dochází k ambipolární difuzi, čili ionty se pohybují beze srážek s neutrálními atomy, nestabilita se rozvíjí pouze v plazmatu a její celkový vliv je víceméně zanedbatelný.



Obr. 3 — Vývoj magneto–rotační nestability z počáteční malé perturbace magnetického pole \mathbf{B} . Počáteční podmínky: $\rho = 1$, $\mathbf{v} = (0, -0.5x)$, $\mathbf{B} = (B_0 \sin(\pi y), 0)$, $\Phi = 0$. Okrajové podmínky: vlevo a vpravo je jednoduše předepsán stříh rychlosti (proto nepotřebujeme $\Phi \neq 0$), nahoře a dole periodické. Stavová rovnice odpovídá ideálnímu plynu. Výpočet programem Pluto v dvou rozměrech, v síti 100×200 bodů. V časech $t > 30$ se již projevuje numerická viskozita, tzn. špatné rozlišení zejména ve směru x ; celistvost 1 buňky je poměrně silnou vazbou ($\nu \rightarrow \infty$).

0.1.7 Nestabilita dvou proudění

Pozoruhodná nestabilita vzniká pro dvě proudění s určitou vazbou (Youdin a Johansen 2007, angl. streaming instability). V našem kontextu jde o plyn a prach a vazbou jest aerodynamické tření, obojí pod vlivem gravitace centra.

Příslušná nestabilita se nazývá též „dvoutekutinová“, popisujeme-li prach jako tekutinu (s hustotou ρ_S a rychlostí \mathbf{u}).⁷ Plyn nemusí být nutně stlačitelný, ale prach ano, což zní podezřele, ale nejedná se samozřejmě o stlačování zrn, nýbrž o jejich soustřeďování v prostoru:

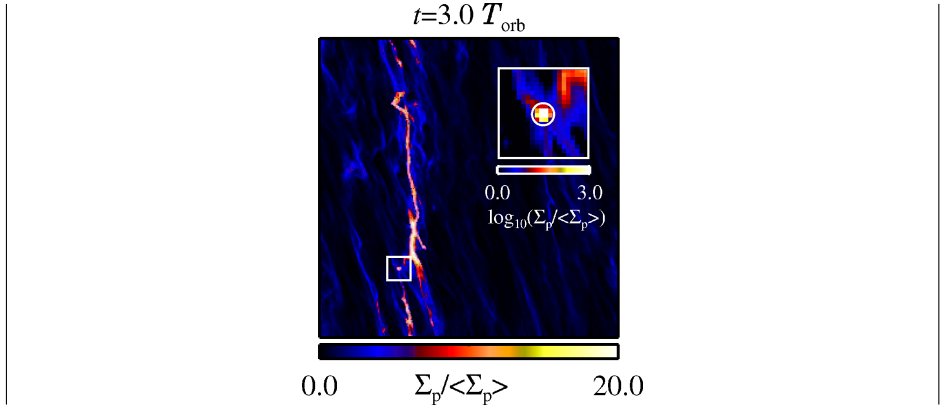
$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_S &= -\rho_S \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla \Phi_* - S \rho v_T (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \\ 0 &= \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi_* + S \rho_S v_T (\mathbf{u} - \mathbf{v}). \end{aligned}$$

⁷ Nestabilita ovšem přetrvává i případě, když prach popíšeme jako částice.

V Navierově–Stokesově rovnici pro prach jsme použili Epsteinův zákon a v rovnici pro plyn totéž s faktorem $-\frac{\rho_s}{\rho}$, kvůli zachování hybnosti. Často se namísto globálních simulací provádějí lokální, v korotujícím systému, s diferenciální rotací.

Oscilace ρ_s (i ρ) vytvářejí tak vysoká lokální maxima, že v nich gravitační nestabilita (kolaps) prachu nebo balvanů může vést ke vzniku planetesimál nebo rovnou planetárních embryí (viz obr. 4).

Je tu i jistá analogie s Tour de France — cyklista na čele cítí odpor vzduchu o ostatní „lenoši“ v závětrí ho snadno dojedou. V tomto specifickém případě nestabilitu omezuje cíl.



Obr. 4 — Nestabilita dvou proudění (plynu a prachu). Znázorněna je plošná hustota σ části disku Převzato z Johansen aj. (2007).

0.1.8 Gravitační nestabilita

Pro kolaps jsou třeba dvě věci: stlačitelný plyn, vlastní gravitace. Dále potřebujeme rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi, \\ \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \rho, \end{aligned}$$

ze kterých je možné odvodit ještě jednu (podstatnou) podmínku, neboli *Toomreho kritérium* pro nestabilitu (Toomre 1964):

$$Q \equiv \frac{c_s \omega_{\text{kepl}}}{\pi G \sigma_0} < 1, \quad (15)$$

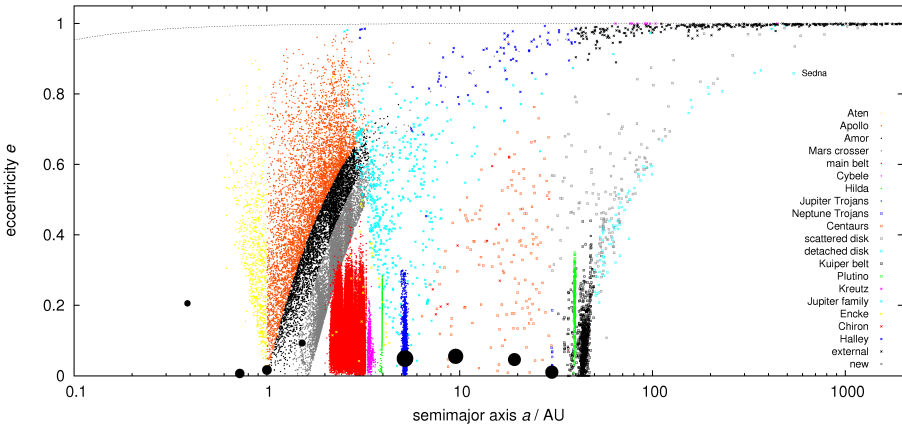
kde c_s označuje rychlost zvuku, $\omega_{\text{kepl}} = \sqrt{GM_*/r^3}$ střední pohyb na daném polooměru, σ_0 počáteční plošnou hustotu disku (odvození viz Armitage 2010, str. 135).

Růst ρ , P , Φ nade všechny meze je sice teoreticky možný, pak bychom všichni skončili v černé díře, ale obvykle se nakonec ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) ustaví dosti velký hydrostatický ∇P .

0.1.9 Počáteční a okrajové podmínky

Výše uvedené rovnice však neobsahují jednu veledůležitou věc: počáteční podmínky! Navíc čelíme třem takřka neřešitelným problémům: (i) rovnice *nelze* integrovat zpět v čase kvůli termodynamicky nevratným dějům (například difuzi, srážkám, unikajícímu infračervenému záření) a deterministickému chaosu, čili nemůžeme volit čas $t_0 = \text{dnes}$, kdy by bylo možné něco měřit; (ii) sluneční soustava vznikla v apriori neznámém čase $t_?$; (iii) v čase $t_?$ dávno minulém beztak nelze měřit nic.

Naštěstí je možno využít skutečnosti, že: (i) chemické složení Slunce, planet a meteoritů je totožné, až na těkavé prvky (zejména H, He); (ii) radiometrické stáří primitivních meteoritů je okolo $t = -(4,56 \pm 0,01)$ Gyr; (iii) minimální počáteční plošnou hustotu disku lze odhadnout podle pozorovaných planet, rozprostřených podél jejich drah a doplněných o zmiňované těkavé prvky. Pak již lze rozumně volit počáteční podmínky v čase $t_0 = -4,56$ Gyr, integrovat rovnice dopředu (dodnes) a nakonec posoudit model dle souladu s pozorovanou sluneční soustavou (obr. 5).



Obr. 5 — Pozorovaný stav sluneční soustavy znázorněný na grafu velká poloosa a , excentricita e . Symboly a barvami jsou rozlišeny planety a jednotlivé populace malých těles: asteroidy jsou označeny kroužky, transneptunické objekty čtverečky a komety křížky. Tečkovaná linie (nahore) odpovídá perihelové vzdálenosti rovné poloměru Slunce.

Poznámka na okraj: vnitřní okraj disku (ve sférických souřadnicích) obvykle volíme $r_1 \simeq 0,1 \text{ AU}$ kvůli působení magnetického pole rotující hvězdy, které pod korotační orbitou skutečně vytváří mezeru v disku. Vnější okraj $r_2 \simeq 40 \text{ AU}$ musí být dostatečně daleko, aby (příliš) neovlivňoval pohyb ve studované oblasti. Ve sférických souřadnicích by okrajové podmínky mohly být voleny takto:

1. $r = r_1$ (vnitřní okraj): $v_r = v_\vartheta = 0$, $v_\phi = \sqrt{GM_\star/r_1}$, tj. keplerovská rychlost;
2. $r = r_2$ (vnější okraj): $v_r = v_\vartheta = 0$, $v_\phi = \sqrt{GM_\star/r_2}$;
3. $\vartheta = 0^\circ$ (u pólu)⁸ zrcadlové podmínky, tzn. skaláry zůstávají totožné, normálové složky vektorů mění znaménko: $\rho \rightarrow \rho$, $v_n \rightarrow -v_n$, $B_n \rightarrow -B_n$, $v_t \rightarrow v_t$, $B_t \rightarrow B_t$;
4. $\vartheta = 90^\circ$ (na rovníku) symetrické podle roviny: $\rho \rightarrow \rho$, $v_n \rightarrow -v_n$, $B_n \rightarrow B_n$, $v_t \rightarrow v_t$, $B_t \rightarrow -B_t$;
5. $\varphi = 0^\circ = 360^\circ$ periodické.

0.1.10 Formalismus v programu Pluto

Pro výpočetní účely se rovnice optimalizují následovně (Mignone aj. 2007). Maximum členů vyjádříme pomocí divergence, abychom se vyhnuli výpočtům rotace, které jsou náročné a při kterých hrozí větší zaokrouhlovací chyby. Pro přehlednost zde také předpokládáme $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $F_\star = 0$ (tj. bez přenosu záření), $K = 0$, $\eta_{\text{mag}} = 0$, $\Phi_{\text{disk}} = 0$ (beztak převažuje Φ_\star):⁹

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{p} \\ E + \rho\Phi \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \rho\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{B} + I P \\ (E + \rho\Phi + P)\mathbf{v} - \mathbf{B}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{v}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\nabla\Phi \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

kde $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}$ označuje hustotu hybnosti, $E = U + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2\mu_{\text{vac}}}\mathbf{B}^2$ hustotu energie a $P = P_{\text{gas}} + \frac{1}{2\mu_{\text{vac}}}\mathbf{B}^2$ celkový tlak.

Identita (16) s (1) je zřejmá:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

⁸ pro plochý disk je zřejmě možno volit větší hodnotu, např. $\vartheta = 85^\circ$

⁹ Symboly typu $\mathbf{v}\mathbf{B}$ (nebo $\mathbf{B}\mathbf{v}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}$) jsou diády, čili tenzory druhého řádu (matice 3×3) se složkami $v_i B_j$. Někdy bývají označovány $\mathbf{v} \otimes \mathbf{B}$.

Druhý řádek odpovídá rovnici (2) (bez μ_{vac} , které je zahrnuto v \mathbf{B}):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{B} + I P_{\text{gas}} + I \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right) = \\
 & = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\rho} \mathbf{v} \mathbf{v} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\rho} \dot{\mathbf{v}} \mathbf{v} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\rho} \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} - \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B} - \dot{\nabla} \cdot \mathbf{B} \dot{\mathbf{B}} + \nabla P_{\text{gas}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{B}} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \\
 & \mathbf{v} \text{ krát (1)} \\
 & = \underbrace{\mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \nabla \rho}_{=0} + \underbrace{\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{bác}} + \underbrace{\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}_{\text{bác}} - \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{bác}} - \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{bác}} + \nabla P_{\text{gas}} + \underbrace{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}_{\text{cáb}} = \\
 & = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \nabla P_{\text{gas}} - (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\rho \nabla \Phi \quad \text{c.b.d.}
 \end{aligned}$$

Vezmeme nyní raději 4. řádek a rovnici (5):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{v}} \mathbf{B} + \dot{\nabla} \cdot \mathbf{v} \dot{\mathbf{B}} - \dot{\nabla} \cdot \dot{\mathbf{B}} \mathbf{v} - \dot{\nabla} \cdot \mathbf{B} \dot{\mathbf{v}} = \\
 & = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{B} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v} = \\
 & = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \dot{\nabla} \times (\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}) - \dot{\nabla} \times (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{B}}) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{c.b.d.}
 \end{aligned}$$

Nakonec rychle porovnáme 3. řádek a rovnici (3):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \rho \Phi \right) + \nabla \cdot \left(U \mathbf{v} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{v} + \rho \Phi \mathbf{v} + P_{\text{gas}} \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \mathbf{v} - \mathbf{B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \right) = \\
 & = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot U \mathbf{v} + P_{\text{gas}} \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \cdot \text{Navier-Stokes} + \mathbf{B} \cdot \text{indukční rce} + \Phi \text{ krát rce kontinuity} = \\
 & = 0,
 \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

0.1.11 Metoda konečných objemů (FVM)

Jednou z metod používaných pro numerické řešení hydrodynamických rovnic je metoda konečných objemů (FVM, angl. finite volume method). Budeme ji zde demonstrovat na rovnici kontinuity, ale samozřejmě ji lze použít na celou soustavu rovnic (16):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Provedeme integraci přes nějaký objem V :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{p} dV = \int_V 0 dV,$$

a použijeme Gaussovu větu:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{1}{V} \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} = \bar{0},$$

kde na levé straně jsme napsali průměrnou hodnotu hustoty $\bar{\rho}$ v onom V a na pravé straně jsme z výukových důvodů ponechali „průměrnou nulu“.

Diskretizace v prostoru spočívá ve vyjádření integrálu přes hranici V , resp. sumy přes příslušné plošky S :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_S \mathbf{p} \cdot d\mathbf{S} &\doteq \frac{S_{i+1/2,j,k}}{V_{i,j,k}} p_{i+1/2,j,k} - \frac{S_{i-1/2,j,k}}{V_{i,j,k}} p_{i-1/2,j,k} \\ &+ \frac{S_{i,j+1/2,k}}{V_{i,j,k}} p_{i,j+1/2,k} - \frac{S_{i,j-1/2,k}}{V_{i,j,k}} p_{i,j-1/2,k} \\ &+ \frac{S_{i,j,k+1/2}}{V_{i,j,k}} p_{i,j,k+1/2} - \frac{S_{i,j,k-1/2}}{V_{i,j,k}} p_{i,j,k-1/2}, \end{aligned} \quad (17)$$

kde indexy i, j, k přísluší jednotlivým kartézským souřadnicím a mění se od 0 do počtu bodů sítě. Hodnoty $p_{i,j,k}$ v polovinách prostorového kroku (na hranicích mezi sousedními objemy) určujeme interpolací.

Diskretizace v čase je v nejjednodušším případě:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \doteq \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t}.$$

Schéma explicitní vznikne tak, že v (17) použijeme staré $\rho_{i,j,k}^n$ a $p_{i,j,k}^n$ (tj. z minulého časového kroku). Explicitní se jmenuje proto, že můžeme obratem vyjádřit nové $\rho_{i,j,k}^{n+1}$.

Ve schématu implicitním bychom všude použili nové (avšak neznámé!) $p_{i,j,k}^{n+1}$. Rovnice proto spolu s ostatními tvoří soustavu rovnic, kterou je třeba vyřešit. Z matematického hlediska tedy musíme provést inverzi (velké) matice. Výhodou je ovšem větší stabilita a možnost použití většího Δt .

V programu PLUTO jsou implementovány metody přesně nebo přibližně řešící Riemannův problém, který spočívá v nalezení časového vývoje nespojitosti hustoty a rychlosti pro linearizované rovnice (1) a (2). Vybírat můžeme z vícero postupů (např. Roe, HLLE, HLLC).

Škálované jednotky. Abychom částečně předešli numerickým problémům a zakrouhlovacím chybám, je dobré používat vhodně škálované jednotky. Například pro simulace protoplanetárního disku je můžeme volit následovně: $[r] = a_J$,

$$[\rho] = M_{\odot}/a_J^3, [v] = \sqrt{GM_{\star}/a_J}/(2\pi), \text{ odkud plyne } [m] = M_{\odot}, [t] = 2\pi/\sqrt{GM_{\star}/a_J^3}, \\ [P] = M_{\odot}GM_{\star}/a_J^4/(4\pi^2).$$

0.1.12 Migrace planet v plynném disku

Je třeba především rozlišovat, zda se jedná o migraci v disku tvořeném plynem nebo planetesimálami; obojí se pochopitelně chová jinak. Zde se budeme soustředit pouze na plyn a v něm vnořenou planetu. Pak lze rozlišovat tři základní typy ustálené migrace: I, II a III — tzn. bez mezery, s mezerou a s částečnou mezerou.

Asi nejsnadněji lze popsat typ II. Značná část plynu v okolí dráhy již spadla na planetu, čímž se vytvořila mezera. Zároveň vznikla spirální ramena, která jsou vlastně přímou gravitační vazbou mezi planetou a diskem. Třecí neboli viskózní síly mezi rameny a zbytkem disku mají transversální složku, která způsobuje spirálování planety dle první Gaussovy rovnice:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2\mathcal{T}}{n} + \mathcal{O}(e), \quad (18)$$

kde a označuje velkou poloosu planety, \mathcal{T} transversální složku zrychlení (tj. v rovině dráhy, kolmo k radiusvektoru), $n = \sqrt{GM_{\odot}}a^{-\frac{3}{2}}$ střední keplerovský pohyb neboli úhlovou rychlost, přičemž předpokládáme kruhovou dráhu ($e = 0$). Transversální složka je vytvářena viskózním členem v rovnici (2):

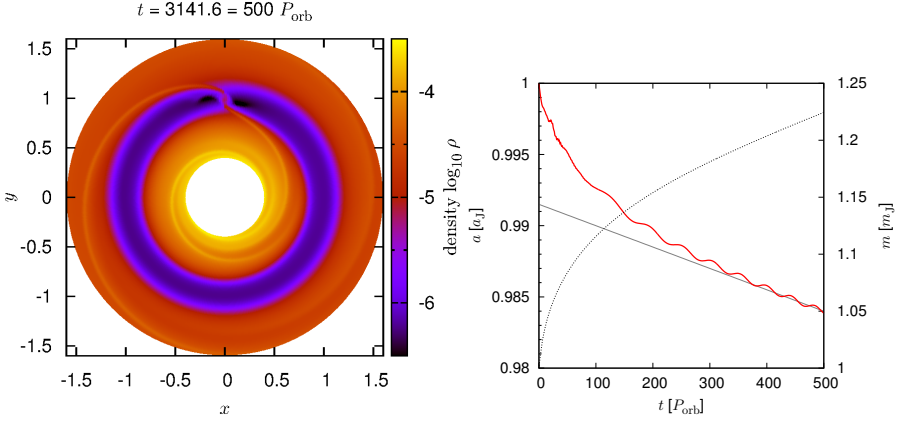
$$\mathcal{T} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \mu_1 \frac{\partial}{\partial r} v_{\text{kepl}} = \frac{\mu_1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \sqrt{GM_{\odot}} r^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_1}{\rho} \sqrt{GM_{\odot}} \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}},$$

což po dosazení (a obvyklé náhradě $r \rightarrow a$) dává:

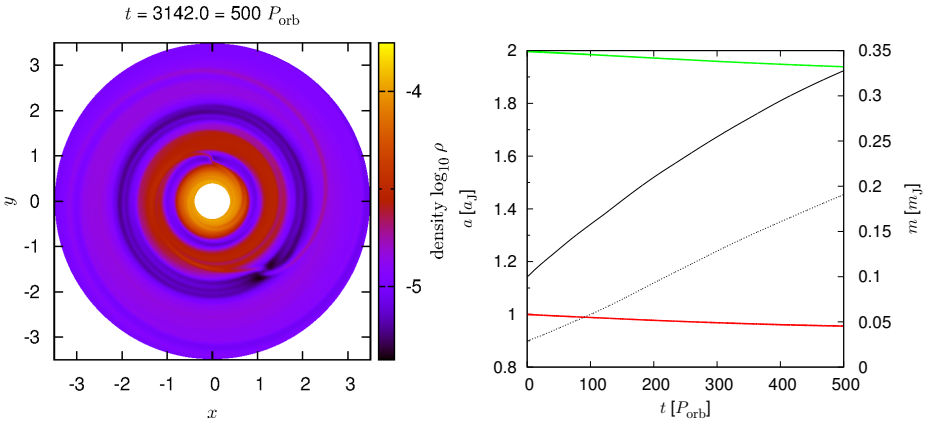
$$\left(\frac{da}{dt} \right)_{\text{II}} = -\frac{3\nu}{2a}, \quad (19)$$

kde $\nu \equiv \mu_1/\rho$ je kinematická viskozita. Znaménko je zde záporné, neboť k planetě je blíže vnější spirální rameno, disk tam obíhá (keplerovsky) pomaleji, čili dochází k brzdění.

Situaci pro jednu planetu ukazuje obr. 6, spočtený programem Fargo (Masset 2000). Po vytvoření mezery se vývoj ustálí a změna velké poloosy odpovídá vztahu (19). Pro dvě interagující planety (obr. 7) je situace obecně složitější. Pokud se vytvoří dvě mezery a překryjí se, vnější spirální rameno je od vnitřní planety mnohem dál, takže převažuje vliv vnitřního, kde ale disk obíhá rychleji, a zmiňovaná planeta se tedy nutně také urychluje a vzdaluje od Slunce.



Obr. 6 — Plynný disk a jedna vnořená planeta, vlevo plošná hustota disku $\sigma(x, y)$, vpravo časový vývoj velké poloosy $a(t)$ (znázorněn červeně) a hmotnosti $m(t)$ planety (tečkované). Pro porovnání je znázorněn i pokles a dle rovnice (19), která platí poté, co se v disku vytvoří mezer. Parametry simulace byly voleny takto: hmotnost centra $M = 1$, poměr $H/r = 0,05$, plošná hustota $\sigma = 6,37 \cdot 10^{-5} r^{-1,5}$, kinematická viskozita $\nu = 10^{-5}$, planeta s počáteční velkou poloosou $a = 1$, orbitální periodou $P_{\text{orb}} = 2\pi$ a hmotností $m = 0,001$. Rozsah poloměrů byl $r \in (0,4; 1,6)$, dvourozměrnou síť (r, ϕ) tvořilo 128 krát 384 bodů a časový krok $\Delta t \doteq 0,31416$. Simulace programem Fargo (Masset 2000).



Obr. 7 — Disk a dvě planety. Obdobné nastavení parametrů jako u obr. 6, s výjimkou $r \in (0,4; 3,5)$, 1-rozměrná síť sahající do $r' = 20$, planety $a_1 = 1$, $m_1 = 10^{-4}$, $a_2 = 2$, $m_2 = 2,9 \cdot 10^{-5}$. Simulace programem Fargo.

Turbulentní viskozita. Otázkou je, jaká je *hodnota* viskozity? Obvyklá molekulární viskozita řídkého plynu se zdá nepatrná a planety by vlastně nemigrovaly vůbec. Turbulence ovšem efektivně způsobuje viskozitu také; i když bychom ji nebyli schopni detailně rozlišit v numerickém modelu, mohli bychom ji zahrnout jako zvýšenou hodnotu ν .

Vzhledem k tomu, jaké má ν jednotky ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), je logické ji vztáhnout k nějaké rychlosti a nějakému rozměru. Je podruhé logické zvolit buď rychlost obíhání v_{kepl} , nebo zvuku c_s , a jako rozměr výšku H disku, neboť tato omezuje maximální velikost vírů. Shakura a Sunyaev (1973) navrhli parametrizaci vztahem:

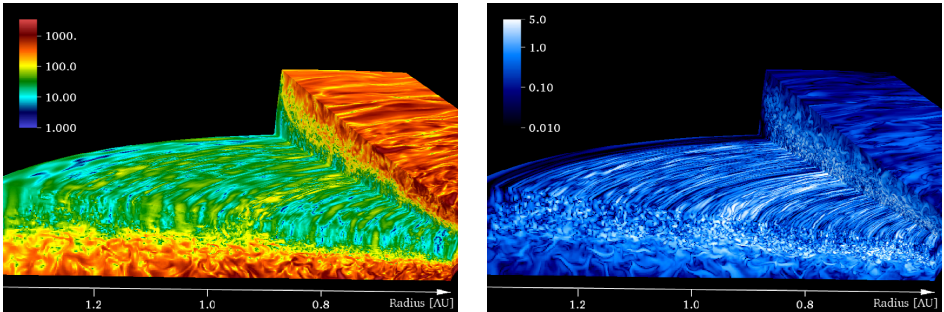
$$\nu = \alpha c_s H, \quad (20)$$

kde α je bezrozměrný parametr, nabývající hodnot od 0 do řádově 1. Ze stacionárního modelu disku (Brož a Šolc 2013, str. 206) můžeme případně dosadit za $H \simeq c_s/n_{\text{kepl}}$. Pokud bychom měli onu detailní simulaci s víry (jako na obr. 8), lze ekvivalentní hodnotu α počítat jako (Flock aj. 2013):

$$\langle \alpha \rangle = \left\langle \frac{\int \rho \left(\frac{\rho v'_\phi v'_r}{P} - \frac{B_\phi B_r}{P} \right) dV}{\int \rho dV} \right\rangle,$$

kde čárkované rychlosti v'_ϕ , v'_r označují fluktuace okolo středních hodnot.

Kromě zmiňovaných nestabilit SBI, VSI, MRI, které jsou potenciálně důležitým zdrojem turbulence, a tudíž zvýšené makroskopické viskozity, může hrát roli i fotoevaporace a hvězdný vítr, který strhává ionty, odnáší tak moment hybnosti ven a zbývající hmota disku se proto sune dovnitř (a pak bychom nepotřebovali velkou hodnotu α). Jsou to ostatně tytéž procesy, jaké ve vesmíru nutí akreční disky akretovat.



Obr. 8 — Rozvinutá magneto-rotační nestabilita v protoplanetárním disku, projevující se jako turbulence rychlosti $|\mathbf{v}|$ (v jednotkách m/s, vlevo) a složitá struktura magnetického pole $|\mathbf{B}|$ (v jednotkách Gauss = 10^{-5} T, vpravo). Převzato z Flock aj. (2013).

-
- [1] ARMITAGE, P. J. *Astrophysics of planet formation*. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780511691362.
- [2] BALBUS, S. A., HAWLEY, J. F. *A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution*. *Astrophys. J.*, **376**, 214–233, 1991.
- [3] BROŽ, M., ŠOLC, M. *Fyzika sluneční soustavy*. Praha: MatfyzPress, 2013. ISBN 97880-73782368. (http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/fyzika_malych_teles/).
- [4] FLOCK, M., FROMANG, S., GONZÁLES, M., COMMERÇON, B. *Radiation hydrodynamics in global simulations of protoplanetary discs* *Astron. Astrophys.*, **560**, A43, 2013.
- [5] JOHANSEN, A., OISHI, J. S., MAC LOW, M.-M., KLAHR, H., HENNING, T., YOUNG, A. *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar discs*. *Nature*, **448**, 1022–1025, 2007.
- [6] KLAHR, H. H., BODENHEIMER, P. *???* *Astrophys. J.*, **582**, 869–, 2003.
- [7] LESUR, G., PAPALOIOZOU, J. C. B. *The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models*. *Astron. Astrophys.*, **513**, A60, 2010.
- [8] MASSET, F. *FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks*. *Astron. Astrophys. Suppl. S.*, **141**, 165–173, 2000.
- [9] MIGNONE, A., BODO, G., MASSAGLIA, S. AJ. *PLUTO: A numerical code for computational astrophysics* *Astron. J. Suppl. S.*, **170**, 228, 2007.
- [10] SHAKURA, N. I., SUNYAEV, R. A. *Black holes in binary systems. Observational appearance*. *Astron. Astrophys.*, **24**, 337–355, 1973.
- [11] SHORE, S. N. *Astrophysical hydrodynamics*. Weinheim: Wiley-Vch, 2007. ISBN 97835-27406692.
- [12] TOOMRE, A. *On the gravitational stability of a disk of stars*. *Astrophys. J.*, **139**, 1217–1238, 1964.
- [13] *Wikipedia*. *Accretion disc* [online]. [cit. 2015-03-10]. (http://en.wikipedia.org/wiki/Accretion_disc)
- [14] YOUNG, A., JOHANSEN, A. *Protoplanetary disk turbulence driven by the streaming instability: linear evolution and numerical methods*. *Astrophys. J.*, **662**, 613–626, 2007.

Literatura

Učebnice

Reference