

Kosmologický princip

*

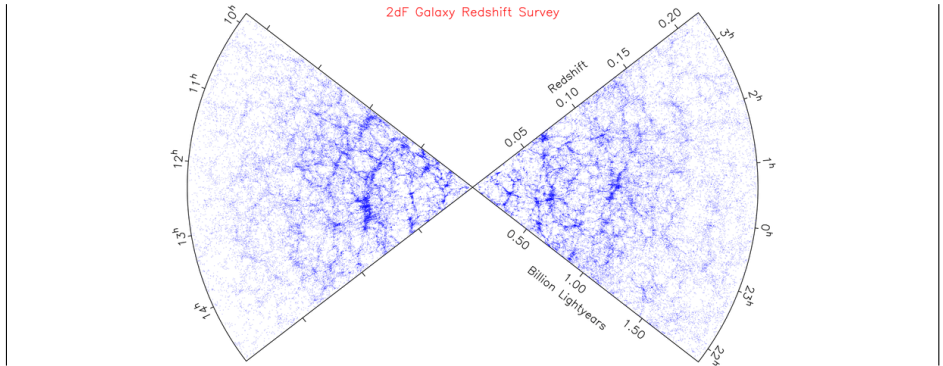
Základním východiskem pro náš nejjednodušší model vesmíru je pozorování, že na velkých měřítkách je vesmír *izotropní*. Ve všech směrech vidíme například téměř stejné množství galaxií (viz obr. 1) nebo kosmické mikrovlnné pozadí má na směr téměř nezávislou intenzitu.

Tato pozorovaná izotropie a *koperníkovský princip*, to jest víra, že nejsme na nějak význačném místě vesmíru, znamenají, že vesmír je *homogenní* (všude stejný).

Na druhou stranu musíme zmínit *Keplerův–Olbersův paradox*. Pokud by vesmír byl nekonečný a zároveň věčný, hvězdy v něm rozmístěné s koncentrací n a se zářivým výkonu L , by produkovaly celkově

$$\int_0^\infty \frac{L}{4\pi r^2} n 4\pi r^2 dr = Ln \int_0^\infty dr = \infty, \quad (1)$$

ale v noci je tma. Znamená to tedy, že vesmír měl nějaký počátek a *není statický*.



Obr. 1 — Velkoškálová struktura vesmíru pozorovaná přehlídkou 2dF.

Einsteinovy rovnice pole

*

Abychom vystihli všechny podstatné vlastnosti vesmíru, musíme pracovat se zakřiveným čtyřrozměrným časoprostorem, Jde vlastně o zobecnění obvyklého třírozměrného Euklidova prostoru, v němž vzdálenosti mezi body měříme jednoduše

pomocí Pythagorovy věty $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Infinitesimální vzdálenost mezi událostmi („body“) v časoprostoru je popisována obdobně metrickým tenzorem g_{ik} :

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = g_{00}(dx^0)^2 + g_{01}dx^0 dx^1 + \dots,$$

přičemž přes opakující se indexy i a $k = 0 \dots 3$ podle sumačního pravidla sčítáme. Časoprostor je totiž varieta, čili je lokálně plochý, obdobně jako povrch Zeměkoule viděný zblízka. Pro plochý (Minkowského) časoprostor by matice g_{ik} byla jednoduchá:

$$g_{ik} \equiv \eta_{ik} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ale v obecném případě je $g_{ik}(t,x,y,z)$ zde jiné než $g_{ik}(t',x',y',z')$ jinde. — potřebovali bychom zjistit $4 \times 4 = 16$ funkcí času a souřadnic (respektive jen 10, kvůli symetrii $g_{ik} = g_{ki}$).

Právě k tomu slouží Einsteinovy rovnice (EFE), které popisují vztah mezi křivostí časoprostoru (metrikou g_{ik}) a „obsahem“ vesmíru (tenzorem energie a hybnosti T_{ik}), který je zdrojem gravitace:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (2)$$

Přestože tyto rovnice vypadají „hrozivě“, hned v následující kapitole je velmi zjednodušíme, protože náš vesmír je přece homogenní (g_{ik} je všude stejné).

Ricciho tenzor R_{ik} a Ricciho skálar R jsou první a druhé parciální derivace metriky podle souřadnic:

$$R = g^{ik} R_{ik},$$

$$R_{ik} = R^l{}_{ilk},$$

přičemž Riemannův tenzor:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i{}_{nl} \Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{nm} \Gamma^n{}_{kl}$$

a Christoffelovy symboly:

$$\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Λ označuje kosmologickou konstantu (číslo), G gravitační konstantu, c rychlost světla ve vakuu. Složkami T_{ik} mohou být opět nějaké funkce času, souřadnic nebo rychlostí, nicméně pro kapalinu s hustotou ρ a tlakem p platí (v lokální inerciální soustavě):

$$T_k^i = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/c^2 \end{pmatrix}.$$

Z matematického hlediska jde o soustavu 10 (nezávislých) nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Není řešitelná analyticky, až na několik speciálních případů.

FLRW metrika

*

Při hledání homogenní metriky si položíme si otázku, lze popsat křivost jedním číslem? Vezměme jako příklad povrch koule o poloměru R , na níž vyznačíme kružnici o poloměru r . Na rovné ploše bychom očekávali obvod $o_{\text{očekávaný}} = 2\pi r$, ale zde bychom naměřili:

$$o_{\text{změřený}} = 2\pi R \sin \vartheta = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \doteq 2\pi R \left[\frac{r}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \dots \right].$$

Křivost je pak definována pomocí těchto obvodů jako:

$$K \equiv \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{o_{\text{očekávaný}} - o_{\text{změřený}}}{r^3}, \quad (3)$$

což pro výše uvedenou kouli dává:

$$K_{\text{koule}} = \frac{1}{R^2}.$$

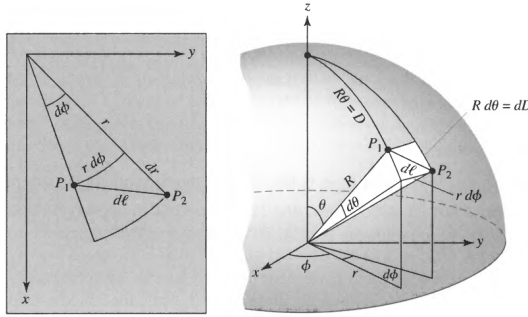
Nyní přejdeme k měření vzdáleností. Ve dvourozměrné euklidovské geometrii a v polárních souřadnicích bychom měli prostě $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\phi)^2$. Avšak na kulové ploše je (viz obr. 2):

$$(ds)^2 = (Rd\vartheta)^2 + (rd\phi)^2,$$

kde

$$Rd\vartheta = \frac{dr}{\cos \vartheta} = \frac{dr}{\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} = \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}.$$

Zobecnění na třírozměrný prostor provedeme záměnou $rd\phi$ za $r d\theta$ a $r \sin \theta d\phi$.



Obr. 2 — Geometrie na ploše a na kouli. Převzato z [2]

Nyní jsme teoreticky připraveni napsat obecnou metriku pro zakřivený časoprostor:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (4)$$

kteřá se nazývá Friedmannova–Lemâitrova–Robertsonova–Walkerova, zkráceně FLRW. Kromě (zatím neznámé) křivosti K jsme do ní doplnili i (zatím neznámou) funkci času $a(t)$, zvanou expanzní parametr, jež umožní popisovat rozpínání nebo smršťování vesmíru. Pochopitelně v metrice nejsou žádné funkce prostorových souřadnic, protože náš vesmír je všude stejný. V maticovém zápisu je:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1 - Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 d\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Expanzní parametr lze libovolně škálovat, nicméně pro přehlednost se volí obvykle $a(t_0) = 1$ dnes, pak K je křivost, anebo $K = -1, 0$ nebo $+1$, pak $a(t)$ je křivost.

Friedmannovy rce

*

Dosazením FLRW metriky (5) do Einsteinových rovnic (2) získáme rovnice pro expanzní parametr $a(t)$ a křivost K . Namísto ručního výpočtu použijeme algebraický manipolátor Reduce:

```
%% oznaceni souradnic (x^0,x^1,x^2,x^3) <=> (t,r,theta,phi)
```

```
matrix coords(1,4);
```

```
coords := mat((t,r,theta,phi));
```

```
procedure x(i); coords(1,i+1);
```

```
% matice se indexuji od 1, nikoli od 0!
```

```

%% FLRW metrika g_ik

a(t); Y; % obecna fce t

g := mat(
(-c^2, 0, 0, 0),
( 0, (a(t))^2/(1-K*r^2), 0, 0),
( 0, 0, (a(t))^2 r^2, 0),
( 0, 0, 0, (a(t))^2 r^2 sin(theta)^2)
);

g_ := 1/g; % kontravariantni metrika g^ik <=> inverzni matice

%% Christoffelovy symboly

procedure Christoffel(i,k,l); begin
scalar Ch;
Ch:=0;
for m := 0:3 do begin % opet indexace g_ik, g^ik od 1
Ch:=Ch + 1/2 * g_(i+1,m+1) *
(df(g(m+1,k+1), x(l)) + df(g(m+1,l+1), x(k)) - df(g(k+1,l+1), x(m)))
end;
return trigsimp(Ch); % zjednodusi goniometricke fce
end;

for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
for l := 0:3 do begin
Gamma(i,k,l) := Christoffel(i,k,l); % ulozeni do pole setri CPU time
if (Gamma(i,k,l) neq 0) then begin
write "Gamma~",i,"_",k,l," = ",Gamma(i,k,l);
end;
end;
end;
end;

%% Riemannuv tenzor

procedure Riemann(i,k,l,m); begin
scalar Ri,n;
Ri := df(Gamma(i,k,m), x(l)) - df(Gamma(i,k,l), x(m));
for n := 0:3 do begin
Ri:=Ri + Gamma(i,n,l)*Gamma(n,k,m) - Gamma(i,n,m)*Gamma(n,k,l);
end;
return trigsimp(Ri);
end;

for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
for l := 0:3 do begin
for m := 0:3 do begin
Ri := Riemann(i,k,l,m);
if (Ri neq 0) then begin

```

```

        write "R^",i,"_",k,l,m," = ",Ri;
    end;
end;
end;
end;
end;

```

%% Ricciho tenzor

```

procedure Ricci(i,k); begin
    scalar Rc,l;
    Rc:=0;
    for l := 0:3 do begin
        Rc:=Rc + Riemann(l,i,l,k);
    end;
    return trigsimp(Rc);
end;

```

```
matrix R_ik(4,4);
```

```

for i := 0:3 do begin
    for k := 0:3 do begin
        R_ik(i+1,k+1) := Ricci(i,k);
        write "R_",i,k," = ", R_ik(i+1,k+1);
    end;
end;

```

%% Ricciho skalar

```

procedure R(); begin
    scalar R,i,k;
    R:=0;
    for i := 0:3 do begin
        for k := 0:3 do begin
            R:=R + g_(i+1,k+1) * R_ik(i+1,k+1);
        end;
    end;
    return trigsimp(R);
end;

```

```
write "R = ", R();
```

%% tenzor energie a hybnosti T^i_k pro tekutinu

```

T__ik := mat(
    ( rho*c^2, 0, 0, 0),
    ( 0, p, 0, 0),
    ( 0, 0, p, 0),
    ( 0, 0, 0, p)
);

```

```
T_ik := g * T__ik;
```

% kovariantni T_{ik}

%% Einsteinovy rce pole

write "EFE: ", R_ik - 1/2 * R() * g - Lambda_ * g, " = ", (8*pi*capG/c^4) * T_ik;
bye;

Výsledná složka 00 Einsteinových rovnic se nazývá Friedmannova rovnice:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \overbrace{\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}}^{\equiv \rho_\Lambda} \right) a^2. \quad (6)$$

Ze stopy EFE vychází ještě druhá Friedmannova rovnice:

$$\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} + \frac{\Lambda c^2}{2\pi G} \right) a^2.$$

Za předpokladu platnosti rovnice kontinuity:

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -\frac{p}{c^2} \frac{d(a^3)}{dt}$$

lze odvodit i jiný užívaný tvar Friedmannovy rovnice (6); nejprve ji násobíme a :

$$\dot{a}^2 a + Kc^2 a = \frac{8\pi G}{3} \rho a^3,$$

pak derivujeme podle času:

$$2\dot{a}\ddot{a} + \dot{a}^2 \dot{a} + \overbrace{Kc^2 \dot{a}} = \frac{8\pi G}{3} \overbrace{\frac{d(\rho a^3)}{dt}},$$

odkud ihned plyne rovnice pro zrychlení:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a.$$

Abychom mohli vypočítat konkrétní průběh $a(t)$, potažmo $\rho(t)$, musíme znát ještě *stavové rovnice*, respektive závislosti $\rho(a)$ pro různé substance, což shrnuje následující tabulka:

	škálování hustoty	stavová rovnice
hmota (prach):	$\rho_m \propto 1/a^3$	$p_m = 0$
záření, neutrina:	$\rho_{\text{rel}} \propto 1/a^4$	$p_{\text{rel}} = \rho_{\text{rel}}/3$
Λ (temná energie):	$\rho_\Lambda \propto \text{konst.}$	$p_\Lambda = -\rho_\Lambda$

Hmota (ať už ve formě hvězd/galaxií nebo jako temná hmota), je strhávaná rozpínajícím se prostorem a její hustota přirozeně klesá jako $1/a^3$. Pro fotony se však kromě poklesu jejich koncentrace uplatňuje ještě prodlužování vlnové délky, které ovlivňuje energii podle vztahu $E = hc/\lambda$, takže výsledná úměra je $1/a^4$. Hustota odpovídající kosmologické konstantě naopak zůstává konstantní; pokud ji převedeme na pravou stranu EFE hovoříme též o *temné energii*.

Pro popis rozpínání se kromě expanzního parametru $a(t)$ používá také *Hubbleův parametr*:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (7)$$

Pro dnešek (z blízkých objektů) je změřena hodnota $H_0 = 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, což „numerologicky“ zhruba odpovídá rychlosti vzdalování Měsíce od Země. Dále zavedeme *decelerační parametr*:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (8)$$

pro posouzení toho, kdy se rozpínání zpomaluje ($q > 0$) a kdy zrychluje ($q < 0$). Měřitelnou veličinou je *rudý posuv* (angl. redshift), jeho definice a vztah k $a(t)$ je:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{dnes pozorované}} - \lambda_{\text{emitované}}}{\lambda_{\text{emitované}}}, \quad 1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (9)$$

Z důvodů, které budou zřejmé záhy, zavedeme *kritickou hustotu* jako:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (10)$$

Pro výpočetní účely Friedmannovu rovnici (6) upravíme s využitím stavových rovnic:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \overbrace{\frac{H_0^2}{\rho_{c0}}}^{\frac{8\pi G}{3}} \left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{rel0}}{a^4} + \rho_{\Lambda 0} \right) a^2,$$

definujeme bezrozměrné veličiny Ω jako:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c},$$

pak

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{rel0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 \right)$$

a člen Kc^2 vyloučíme pomocí téže rovnice, ale napsané pro čas $t = t_0$, kdy je $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = H_0 a_0 = H_0$:

$$H_0^2 + Kc^2 = H_0^2 (\Omega_{m0} + \Omega_{rel0} + \Omega_{\Lambda0}) ,$$

čili:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{rel0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda0} a^2 + 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{rel0} - \Omega_{\Lambda0} \right) , \quad (11)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu pro $a(t)$, kterou můžeme snadno řešit numericky (viz podstatnou část kódu programu ve Fortranu 77):

```

c  pocatecni podminky
    t = 0.d0
    a = a_0
    tout = t
    i1st = 1

c  hlavni cyklus
    do while ((t.lt.tstop).and.(a.gt.0d0))

c  stavove rovnice pro hmotu (prach), zareni a vakuum => skalovani hustot
    Omega_m = Omega_m0 / a
    Omega_rel = Omega_rel0 / a**2
    Omega_lambda = Omega_lambda0 * a**2

c  rudy posuv
    z = a_0/a - 1.d0

c  zkrat casovy krok, je-li treba
    if ((i1st.eq.1).and.(a.lt.1.d-2)) then
        dt = 1.d-3*dt
        dtout = 1.d-4*dtout
        i1st = 0
    endif

c  standardni vystup
    if (t.ge.tout) then
        write(*,*) (t_0+sign*t)/Gyr, a, z, Omega_m, Omega_rel,
:         Omega_lambda
        tout = t + dtout
    endif

c  Friedmannova rovnice
    da_dt = sqrt(H_0**2 * (Omega_m + Omega_rel + Omega_lambda
:         + 1.d0 - Omega_m0 - Omega_rel0 - Omega_lambda0))

c  jednoduchy Euleruv integrator
    a = a + da_dt*dt*sign
    t = t + dt

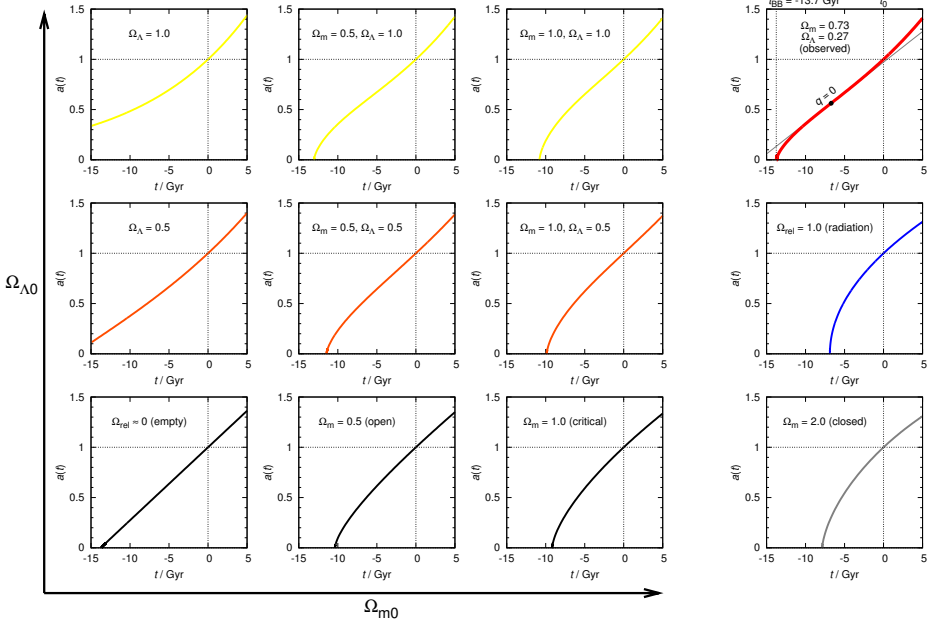
enddo

```

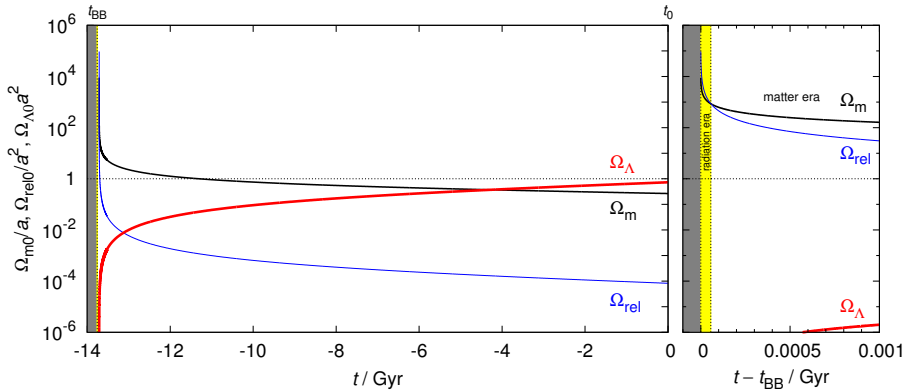
Některé hypotetické vesmíry pochopíme i bez programu:

1. pro *prázdny* vesmír ($T_{ik} = 0$, bez Λ) vychází $\dot{a}^2 = 0$, $a = \text{konst.}$, $H = 0$, $K = 0$, čili je v něm statický Minkowského plochý časoprostor ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$).
2. *de Sitterův* vesmír ($T_{ik} = 0$, pouze $\Lambda > 0$) se vyznačuje exponenciálním rozpínáním $a(t) \propto \exp \chi t$.
3. pro *prach a plym* existuje kritická hustota ρ_c (viz (10)); je-li
 $\rho = \rho_c \Rightarrow K = 0$, tzn. vesmír je plochý;
 $\rho > \rho_c \Rightarrow K > 0$, je uzavřený, má kulovou geometrii;
 $\rho < \rho_c \Rightarrow K < 0$, je otevřený, geometrie je hyperbolická.
Pro podkritický hmotou vyplněný vesmír platí úměra $a \propto t^{2/3}$.
4. vesmír vyplněný *zářením* se rozpíná jako $a \propto t^{1/2}$
5. náš *pozorovaný* vesmír má počáteční podmínky (v čase $t = t_0$) přibližně $\Omega_{m0} = 0,27$, $\Omega_{rel0} = 8,24 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{\Lambda 0} = 0,73$. Na obr. 3 a 4 vidíme jeho vývoj spočtený výše uvedeným programem. Můžeme z něj odečíst okamžik Velkého třesku $t_{BB} = -13,7 \text{ Gyr}$, kdy je $a = 0$, začátek zrychlování v čase $t = -6,7 \text{ Gyr}$, nebo trvání éry záření ($\rho_{rel} > \rho_m$) asi 60 000 roků od Velkého třesku

V další kapitole vysvětlíme, z čeho se odvozují výše uvedené hodnoty Ω .



Obr. 3 — Vývoj expanzního parametru $a(t)$ pro různé hodnoty Ω_{m0} , $\Omega_{\Lambda0}$, Ω_{rel0} . Hodnota Hubbleova parametru je ve všech případech $H_0 = 70,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

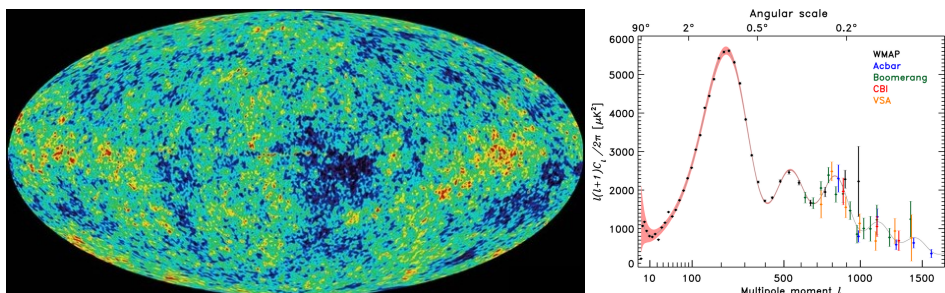


Obr. 4 — Časové závislosti relativních hustot $\Omega' = \frac{\rho}{\rho_{c0}}$ pro náš pozorovaný vesmír. Rozlišujeme přitom příspěvky od kosmologické konstanty, temné hmoty + baryonů a od záření. Na detailu vpravo je patrné období od Velkého třesku do 1 Myr.

Parametry našeho vesmíru jsou omezené především dvěma pozorováními: i) měřením fluktuací kosmického mikrovlnného záření (CMB); ii) fotometrií a spektroskopii supernov typu Ia.

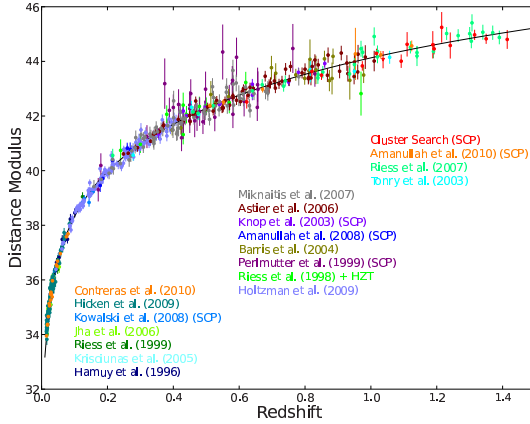
Z měřené intenzity kosmického mikrovlnného záření se vypočítává prostorové spektrum fluktuací (přičemž se odečte dipólní složka a rušení Mléčnou dráhou) a ta se fituje kosmologickými modely (viz obr. 5). Není to jednoduchý homogenní model, to bychom pochopitelně nedostali žádné fluktuace CMB.¹

Luminozitní vzdálenosti supernov Ia jsou určované nezávisle pomocí cefeid, Tullyho–Fisherovým vztahem a porovnávají se s rudým posuvem mateřských galaxií (viz obr. 6).



Obr. 5 — Vlevo fluktuace intenzity mikrovlnného záření znázorněné barevnou škálou na mapě oblohy. Vpravo odpovídající prostorové spektrum, čili závislost amplitudy na prostorové frekvenci (multipólovém momentu ℓ). Největší amplitudu vykazují fluktuace s úhlovým rozměrem okolo 1° .

¹ Toto záření vzniklo asi 380 000 roků po Velkém třesku, když došlo k rekombinaci, čili záření se oddělilo od látky a vesmír se stal průhledný. Jedná se vlastně o nejvzdálenější objekt, který můžeme pozorovat. Pozor, není možné tvrdit, že vzdálenost CMB je 13,7 Gly! V okamžiku, kdy došlo k emisi fotonů, byl zdroj od nás (budoucí Země) vzdálen *jen* 40 Mly. Toto záření pak cestovalo 13,7 Gy skrz rozpínající se prostor, takže souhybná vzdálenost někdejšího zdroje (dnes nějaké galaxie) od současné Země je 46,5 Gly.



Obr. 6 — Vztah mezi modulem vzdálenosti a rudým posuvem pro velký vzorek supernov typu Ia. Převzato z [5].

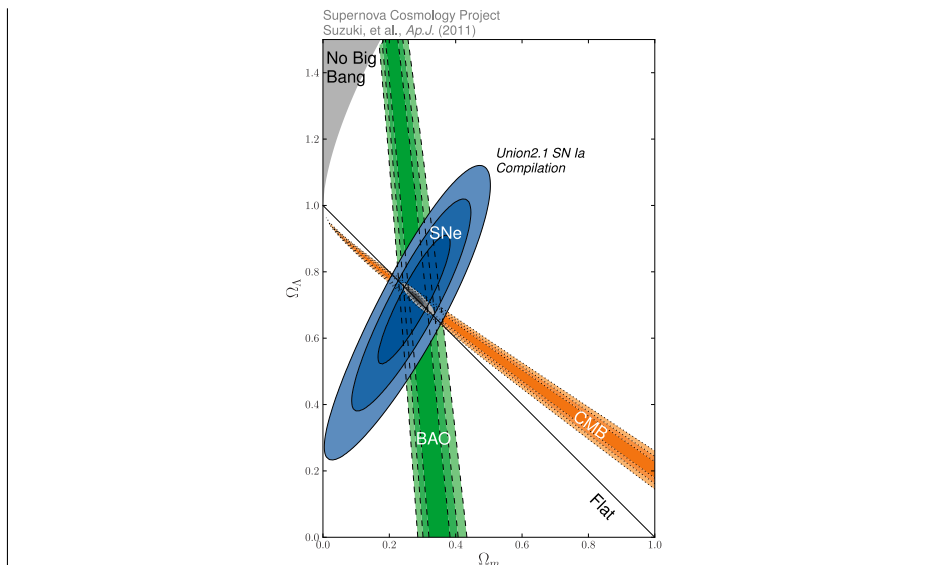
Parametry vesmíru a jejich nejistoty odvozené z dat WMAP, SN Ia a SDSS (Spergel aj. 2006) jsou následující:

H_0	$= 70,9_{-3,2}^{+2,4} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	Hubbleův parametr
ρ_0	$= 0,94_{-0,09}^{+0,06} \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	celková hustota
Ω_b	$= 0,0444_{-0,0035}^{+0,0042}$	hustota baryonů
$\Omega_{\text{CDM}+\text{b}}$	$= 0,266_{-0,040}^{+0,025}$	hustota temné hmoty + baryonů
Ω_Λ	$= 0,732_{-0,025}^{+0,040}$	hustota temné energie
z_{ion}	$= 10,5_{-2,9}^{+2,6}$	rudý posuv reionizace
τ	$= 0,079_{-0,032}^{+0,029}$	optická hloubka reionizace
t_0	$= 13,73_{-0,17}^{+0,13} \text{ Gyr}$	stáří vesmíru

V současnosti je kritická hustota rovna $\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \doteq 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \simeq 6$ protonů $\cdot \text{m}^{-3}$, ale nejsou to protony! Většinu obsahu vesmíru tvoří kosmologická konstanta alias temná energie, zbytek temná hmota a „zanedbatelnou“ menšinu (4 %) baryony. Na obr. 7 vidíme, jak důležité je pozorování různými metodami, protože každá má jiné nejistoty, přičemž výše uvedené přesné hodnoty Ω jsou v jejich průsečíku.

Pozorujeme tedy $\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{CDM}} + \Omega_{\text{baryonů}} + (\text{nepatrné příspěvky}) = (1,00 \pm 0,04)$, čili plochý vesmír je v souladu s pozorováním. Uvědomme si ale, že v principu nelze nikdy prokázat přesnou plochost!

Poznamenejme, že Λ přispívá svou hustotou ke zpomalování rozpínání (a vyrovnává jeho křivost na nulu), ale zároveň svým záporným tlakem rozpínání zrychluje. Existují samozřejmě i jiné hypotézy, hovoří se například o *kvintesenci*, která má odlišnou stavovou rovnici, proměnnou v čase. Parametry kosmologického modelu by se pak do jisté míry změnily.



Obr. 7 — Chybové „elipsy“ pro parametry Ω_{m0} a $\Omega_{\Lambda 0}$ vypočtené z měření kosmického mikrovlnného pozadí (CMB), ze supernov Ia (SNe) a ze struktur baryonické hmoty (BAO). Důležitý je průsečík vyplývající ze všech měření, který je vyznačen šedě. Převzato z [5].

Co je zdrojem temné hmoty?

*

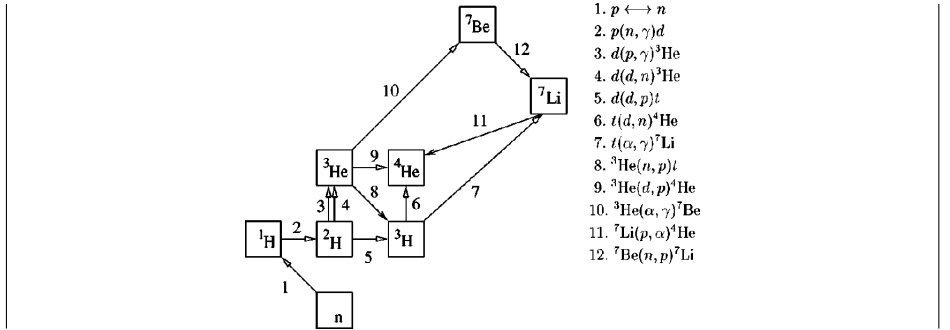
Pro existenci temné hmoty svědčí pozorování nezávislá na jakýchkoli kosmologických modelech. Jde zejména o nekeplerovskou rotaci vnějších částí galaxií (plochá rotační křivka $v(r)$), způsobená halem nesvítící hmoty.

Oblaka horkého mezigalaktického plynu zářícího v rentgenovém oboru, která se pozorují v kupách galaxií, se vyznačují velkou rychlostí emitujících částic, jež přesahuje rychlost únikovou (počítanou ze svítící látky). Protože plyn navzdory tomu pozorujeme, musí být kupy celkově asi 10krát hmotnější než svítící látka.

Temnou hmotou nemohou být stelární černé díry, ty byly vyvráceny negativním pozorováním gravitačních čoček ve Velkém Magellanově mračnu.

Temná hmota musí být *nebaryonická*, protože jinak by nukleosyntéza po Velkém třesku proběhla odlišně, byla by překonána beryliová bariéra a vzniklo by mnoho primordiálního železa (viz obr. 8). Nesmí ani interagovat elektromagneticky, protože by se prozradila nějakým zářením.

Proto se uvažuje o hmotných neutrálních elementárních částicích interagujících pouze slabě a gravitačně. Mimo jiné byly navrhovány axiony nebo neutralina (superpartneři neutrin v supersymetrických teoriích), nicméně zatím neexistuje experimentální potvrzení těchto hypotéz.



Obr. 8 — Schematické znázornění jaderných reakcí, které se uplatňovaly během nukleosyntézy po Velkém třesku. Převzato z [3].

Co je zdrojem temné energie?

*

Nejjednodušším vysvětlením by mohlo být, že v Einsteinových rovnicích prostě musí být uvedena kosmologická konstanta Λ , nicméně není uspokojivé, když nemáme teorii vysvětlující její velikost.

Přirozeným vysvětlením by byla *energie vakua*, na než v kvantové mechanice nahlížíme jako na prostor plný virtuálních částic. Problém je, že z kvantové teorie vychází o 120 řádů větší hodnota než pozorovaná ρ_Λ ! Těžko pak takové interpretaci věřit.

Mějme jednu virtuální částici o hmotnosti $m \simeq \frac{\Delta E}{c^2}$ v boxu o rozměru $L \simeq \Delta x$. Její životní doba plyne z Heisenbergova principu neurčitosti:

$$\Delta t \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} \simeq \frac{\hbar}{mc^2}.$$

Protože nejistota hybnosti $\Delta p \geq 0$ i hybnost $p \geq 0$, musí minimální hodnota hybnosti být řádu $p_{\min} \simeq \Delta p$. Z principu neurčitosti víme zároveň, že:

$$\Delta p \simeq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

takže rychlost částice vyjádříme jako:

$$v \simeq \frac{p_{\min}}{m} \simeq \frac{\hbar}{mL}.$$

Největší vzdálenost, kterou částice může proletět, aby nevyletěla z boxu, je $L = v\Delta t$. Po dosažení:

$$L = \frac{\hbar}{mL} \frac{\hbar}{mc^2}, \quad L^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2}, \quad L \simeq \frac{\hbar}{mc}.$$

Abychom vytvořili *pár* virtuálních částic, musí být hustota energie vakua být:

$$u_{\text{vac}} \simeq \frac{2mc^2}{L^3} \simeq \frac{2m^4 c^5}{\hbar^3}.$$

Největší hmotnost, která přichází v úvahu, je Planckova hmotnost:

$$m_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 10^{19} \text{ GeV},$$

odkud plyne:

$$u_{\text{vac}} \simeq \frac{2m_{\text{p}}^4 c^5}{\hbar^3} \simeq \frac{2c^7}{G^2 \hbar} \simeq 10^{114} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Přesnější teorie dává $u_{\text{vac}} \simeq 10^{111} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$. To je v příkrém rozporu s měřenou hodnotou:

$$u_{\Lambda} = \rho_{\Lambda} c^2 = \rho_{\text{c}} \Omega_{\Lambda} c^2 = 6,22 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Nelze vyloučit možnost, že ve vesmíru existuje nějaké další skalární pole, jako je zmiňovaná kvintesence.

- [1] CARROL S. M. *A No-Nonsense Introduction to General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. (<http://preposterousuniverse.com/grnotes/grtiny.pdf>).
- [2] CARROL B. W., OSTLIE D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. San Francisco: Pearson, Addison Wesley, 2007. ISBN 0321442849.
- [3] NOLLET K. M., BURLET S. *Estimating reaction rates and uncertainties for primordial nucleosynthesis* Phys. Rev. D, 61, 123505, 2000.
- [4] *Reduce*. [online] [cit. 2010-03-08]. (<http://www.reduce-algebra.com/>).
- [5] *Supernova Cosmology Project* [online]. [cit. 2012-01-27]. (<http://supernova.lbl.gov/>).
- [6] WEINBERG S. *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN 0198526822.