

# 1 Druhé hvězdy

Hvězdy, které pozorujeme dnes, se nám pouhým okem jeví jako body. Při pozorování interferometrem však lze nemálo bodů rozlišit jako kotoučky. Stejně tak pozorování spektrografem svědčí o tom, že nemálo hvězd má atmosféru, kterou lze charakterizovat jednou hodnotou efektivní teploty  $T_{\text{eff}}$ . Proto si dovoluujeme hvězdy popisovat v prvním přiblížení jako sféricky symetrické.

Od prvních hvězd (kap. ??) se však podstatně liší, vzhledem k odlišnému stavu mezihvězdného prostředí (ISM). Především je dnes v ISM přítomen prach, způsobující účinnější ochlazování, fragmentaci oblaků na menší části, potažmo vznik hvězd malých hmotností. Tyto hvězdy pak existují dlouhou dobu, a to ve stavu téměř rovnovážném; budeme je proto nazývat „druhé“.

## 1.1 Rovnice kontinuity

Sférické rovnice zde odvodíme zjednodušením složitých rovnic MHD (?? až ??), které jsme používali pro disk. Předpokládáme přitom, že žádný asymetrický akreční disk již neexistuje, naopak existuje protohvězda, která je zcela symetrická, čili směřujeme k rovnicím jednorozměrným. Zároveň se budeme snažit „za každou cenu“ eliminovat rychlost  $\mathbf{v}$ , čili směřujeme k rovnicím statickým.

Vezměme jako první kontinuitu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho}^{\text{konvekce}} = \overbrace{-\rho \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{expanze}}.$$

Pro statický případ nelze jen tak  $\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\mathbf{v}$  položit rovné nule;  $0 = 0$  by nám ostatně bylo k ničemu. Převedeme-li vše vlevo ( $\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$ ) a zapíšeme-li složku  $\hat{r}$  operátoru divergence ve sférických souřadnicích:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \rho \mathbf{v}) = 0,$$

což po rozšíření  $4\pi R^2$  dá:

$$\frac{\partial}{\partial t} (4\pi R^2 \rho) + \frac{\partial}{\partial R} (4\pi R^2 \rho \mathbf{v}) = 0.$$

Zavedeme-li veličinu:

$$M_R \equiv \int_0^R 4\pi R'^2 \rho \, dR', \quad (1)$$

tj. hmotnost koule o poloměru  $R$ , první závorku ihned identifikujeme jako  $\frac{\partial M_R}{\partial R}$ , druhou jako  $-\frac{\partial M_R}{\partial t}$ , čili celou rovnicí jako  $dM_R = 0$ . Jinými slovy: přírůstek hmotnosti  $dM_R$  je totální diferenciál; nezáleží na tom, jakým způsobem „přisypáváme“.

Pro statický případ uvažujeme pouze jedinou parciální derivaci  $\frac{\partial}{\partial R}$ , kterou můžeme b.ú.n.o. nahradit za totální:

$$\frac{dM_R}{dR} = 4\pi R^2 \rho,$$

nebo po obvyklé záměně nezávislé proměnné:

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}. \quad (2)$$

## 1.2 Hydrostatická rovnováha

V obecné Navierově–Stokesově rovnici:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}}^{\text{konvekce}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \overbrace{\nabla \Phi}^{\text{gravitace}} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \frac{1}{\mu_{\text{vac}}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}^{\text{Lorentz}} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mu_1 \nabla \mathbf{v}}^{\text{viskozita}} + \dots$$

položíme rovnou  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\mathbf{B} = 0$ , což vede na:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi,$$

což zapsáno ve sférických:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} - \frac{GM_R}{R^2},$$

odkud obratem:

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R \rho}{R^2},$$

neboli:

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}. \quad (3)$$

Při rovnováze je tedy gravitace vnitřních vrstev vyrovnána *gradientem* tlaku; nikoli tlakem samotným! Nezáleží ani na tlaku, ani na vnějších vrstvách. I když je pravda, že tlak významně ovlivňuje stav látky (přes rovnici stavovou (22)). Vnější vrstvy se neuplatňují, neboť jejich gravitace je dle Newtonova teorému nulová; dokonce jejich přítomnost snižuje  $\nabla P$ , čili v tomto smyslu působí poněkud odporově.

Poznamenejme ještě, že i když  $\nabla \Phi = -\frac{GM_R}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$ , tak potenciál  $\Phi \neq -\frac{GM_R}{R}$ , jako pro hmotný bod! Záporně vzatý gradient tohoto výrazu by totiž byl:

$$GM_R \nabla \frac{1}{R} + \frac{G}{R} \nabla M_R = -GM_R \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{G}{R} 4\pi R^2 \rho \frac{\mathbf{R}}{R},$$

čili správně by bylo:

$$\Phi = -\frac{GM_R}{R} + \int_0^R 4\pi G \rho R' dR'. \quad (4)$$

Protože jsme paranoidní, ověříme ještě, že takové  $\Phi$  splňuje Poissonovu rovnici:

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot \left( GM_R \frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = G \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot \overbrace{\nabla M_R}^{4\pi R^2 \rho \frac{\mathbf{R}}{R}} + \frac{GM_R}{R^3} \overbrace{\nabla \cdot \mathbf{R}}^3 + GM_R \mathbf{R} \cdot \overbrace{\nabla \frac{1}{R^3}}^{-\frac{3\mathbf{R}}{R^5}} = 4\pi G\rho,$$

c.b.d.

### 1.3 Energetická rovnováha

Do známé 1. věty termodynamické:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla U}^{\text{konvekce}} = \overbrace{-U \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{expanze}} - \overbrace{P \nabla \cdot \mathbf{v}}^{\text{práce}} - \overbrace{\kappa_R \rho c a T^4}^{\text{emise}} + \overbrace{\kappa_R \rho c E_{\text{rad}}}^{\text{absorpce}} + \dots + \overbrace{\epsilon \rho}^{\text{reakce}}$$

můžeme dosadit z rovnice přenosu záření v difuzní aproximaci:

$$\frac{\partial E_{\text{rad}}}{\partial t} = \nabla \cdot \overbrace{\frac{c\lambda_{\text{lim}}}{\kappa_P \rho} \nabla E_{\text{rad}}}_{-\vec{\Phi}} + \overbrace{\kappa_R \rho c a T^4}^{\text{emise}} - \overbrace{\kappa_R \rho c E_{\text{rad}}}^{\text{absorpce}} \quad (5)$$

za emisi a absorpci, a přitom pokládat  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ,  $\mathbf{v} = 0$ :

$$0 = -\nabla \cdot \vec{\Phi} + \epsilon \rho,$$

kde  $\vec{\Phi}$  je vektor toku záření a  $\epsilon$  měrný výkon všech reakcí (ať už kladný či záporný). Operátor divergence ve sférických je zřejmý:

$$0 = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \Phi + \epsilon \rho;$$

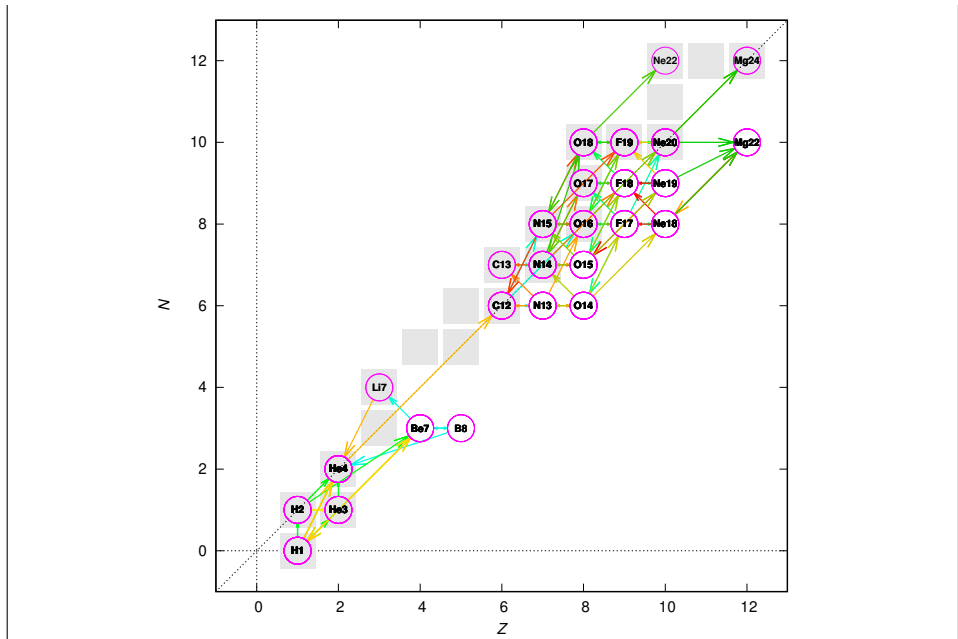
s využitím veličiny  $L_R \equiv 4\pi R^2 \Phi$ , tj. toku povrchem koule o poloměru  $R$ , bychom pak obdrželi:

$$\frac{dL_R}{dR} = 4\pi R^2 \epsilon \rho,$$

neboli:

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu, \quad (6)$$

kde jsme explicitně vyjádřili reakce termonukleární  $\epsilon_{\text{nuc}}$  (viz příklady na obr. 1, 2) a ztráty neutrin  $\epsilon_\nu$ . Neznamená to ovšem, že se veškerá energie uvolňuje jako fotony (a neutrina)! Reakce totiž uvolňují nejen  $\gamma$ ,  $\nu$ , ale též pozitrony  $e^+$  (záhy anihilují), a kinetickou energii produktů reakce. Nicméně jsme předpokládali, že plyn a záření jsou neustále v rovnováze, takže je vlastně jedno, v jaké formě energii uvolníme. Stejně se určitým způsobem přerozdělí mezi  $U$ ,  $E_{\text{rad}}$ , dle hodnoty  $T = T_{\text{gas}} =$



**Obr. 1** — Termonukleární reakce uvažované pro hvězdy malých a středních hmotností, zobrazené na grafu protonové číslo  $Z$  versus neutronové číslo  $N$ . Vlevo dole je proton–protonový řetězec, respektive jeho 3 varianty, vpravo nahoře cyklus CNO, dlouhá šipka odpovídá Salpeterově reakci (též  $3\alpha$ ). Celkem se jedná o 75 reakcí. Stabilní izotopy jsou zobrazeny šedě.

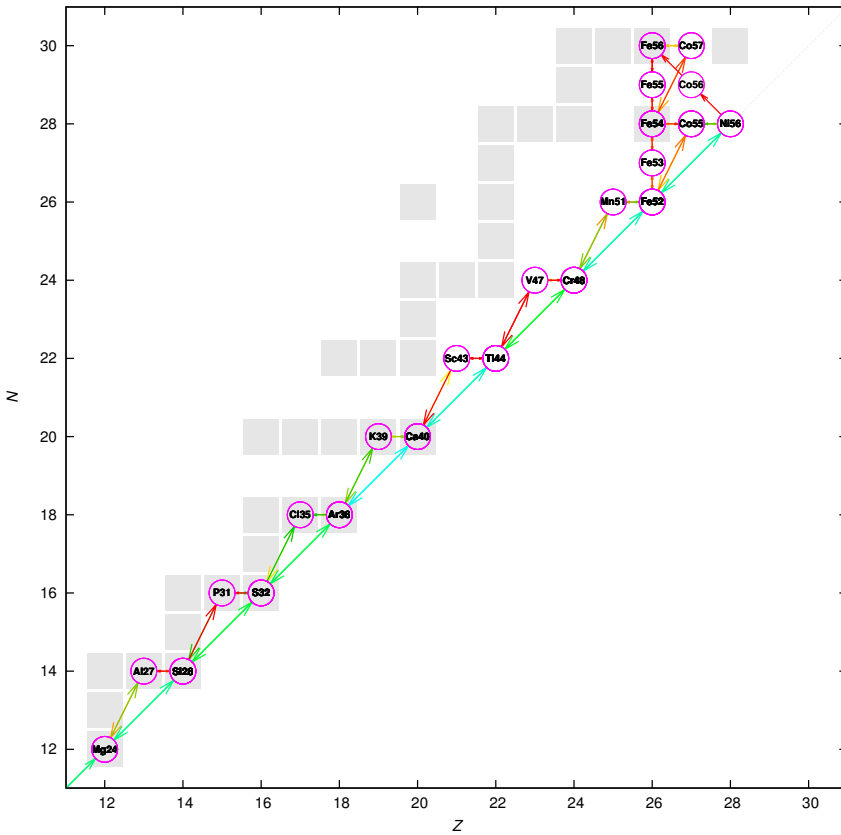
$T_{\text{rad}}$ . Skrytým předpokladem je, že v daném místě je dosti vysoká opacita  $\kappa_P$ ,  $\kappa_R$ . Doposud jsme řešili pouze místní rovnováhu, ale neuvážili jsme, že se energie může přenášet z místa na místo. (Ostatně jsme nijak nevyužili ani zmiňovanou difuzní aproximaci, tzn. předpis pro  $\vec{\Phi}$ .)

## 1.4 Přenos energie

Způsobů přenosu energie je přinejmenším šest:

1. záření, resp. zářivá difuze, je-li prostředí opticky tlusté;
2. proudění, též konvekce, turbulence, vztlaková nestabilita (tj. vlastně opak vln);
3. vedení, čili částicová difuze v plazmatu, příp. šíření neuspořádaných vibrací v pevné látce;
4. neutrína, většinou způsobující chlazení, jen výjimečně ohřev;
5. vlny, resp. jejich *dissipace* (jinak by totiž vlna prošla skrz), ať už jde o zvukové, vztlakové, rázové, seismické, MHD, atd. atd.
6. gravitační vlny, neboli deformace časoprostoru (jež je obzvlášť obtížné uložit do jiné formy).

V normálních hvězdách se uplatňuje především 1. a 2. V bílých trpaslících 3. V pozdních fázích vývoje anebo v supernovách 4. Někde na rozhraní fotosféra,



**Obř. 2** — Reakce vedoucí až ke skupině Źeleza (Fe, Co, Ni), které se uvaŹují pro hmotné hvězdy, přičemŹ řetězec pp a cyklus CNO (nezobrazeny) bývájící značně zjednoduŹeny; celkem jde o 91 reakcí. Stabilní izotopy jsou zobrazeny Źedě. Není zde zachycena ani pŹípadná nukleosyntéza s-procesem (zachycování neutronů pomalejší než rozpad  $\beta^-$ ).

chromosféra, koróna 5. Při spirálování a splývání černých děr nebo neutronových hvězď 6.

**Přenos zářením.** Zřejmě bychom mohli vyjít z obecné rovnice ??, ale pro naše záměry zápis zjednodušíme; namísto Einsteinových  $A_{ji}$ ,  $B_{ij}$ ,  $B_{ji}$  opěť píšeme emisní a opacitní koeficienty  $j_\nu$ ,  $\kappa_\nu$ , vynecháváme prach, dělíme  $c$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \hat{k} \cdot \nabla I_\nu = j_\nu \rho - \kappa_\nu^{\text{abs}} \rho I_\nu - \kappa_\nu^{\text{sca}} \rho I_\nu + \kappa_\nu^{\text{sca}} \rho \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\omega \quad \text{pro } \forall \hat{k}. \quad (7)$$

Dále integrujeme přes všechny vlnové délky, uŹíváme pŹitom vhodně středované opacity:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \hat{k} \cdot \nabla I = j \rho - \kappa^{\text{abs}} \rho I - \kappa^{\text{sca}} \rho I + \kappa^{\text{sca}} \rho \frac{1}{4\pi} \int I d\omega \quad \text{pro } \forall \hat{k}.$$

Namísto řešení pro všechny možné směry zavádíme 0., 1. a 2. moment intenzity jako integrály přes prostorový úhel ( $d\omega = \sin\vartheta d\vartheta d\phi$ ):

$$J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\omega, \quad (8)$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \hat{k} d\omega, \quad (9)$$

$$\mathbf{K} \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \hat{k} \hat{k} d\omega, \quad (10)$$

kde  $J$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{K}$  jsou po řadě skalár, vektor, tenzor. Sice to je  $1 + 3 + 9 = 13$  veličin namísto 1, ale neřešíme žádný směr.

Integrujeme-li (7) přes prostorové úhly, získáme *nultý integrál* rovnice přenosu:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{H} = 4\pi j\rho - \kappa\rho J, \quad (11)$$

kde jsme počítali  $\int \hat{k} \cdot \nabla I d\omega = \nabla \cdot \int \hat{k} I d\omega$ . Čtvrtý člen popisující rozptyl by byl zřejmě  $\kappa^{\text{sca}}\rho J$ ; pro skoro izotropní intenzitu je ovšem  $I \doteq J$ , čili se odečte se třetím.

Následně *první integrál* (tzn. po násobení jednotkovým vektorem  $\hat{k}$ ) je:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{K} = 0 - \kappa\rho \mathbf{H}, \quad (12)$$

kde emise zmizela, neb ji předpokládáme izotropní. Soustava (11), (12) je bohužel neuzavřená; máme jen 2 rovnice pro 3 neznámé. Další integrování nepomůže, neboť druhý integrál by obsahoval 3. moment, atd. Zřejmě se není čemu divit — nelze čekat, že se integraci pro všechny směry lze vyhnout tak snadno!

Namísto toho předpokládáme *uzavírací relaci*:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{3} \delta_{ij} J, \quad (13)$$

která platí pro *skoro izotropní* intenzitu,  $I = I_0 + I_1 \cos\theta$ ,  $I_1 \ll I_0$ , nebo též planparalelní atmosféru (viz níže). Nazývá se jinak Eddingtonův faktor. Kdybychom ji dosadili do (11), obratem získáme difuzní aproximaci (5), ale ta nás momentálně nezajímá.

Využijeme ovšem (12); pro stacionární případ je  $\frac{\partial}{\partial t} \doteq 0$ , navíc umenšené faktorem  $\frac{1}{c}$ :

$$\nabla \cdot \frac{1}{3} \delta_{ij} J = \frac{1}{3} \nabla J = -\kappa\rho \mathbf{H}.$$

Pro lokální termodynamickou rovnováhu (LTE) víme, že pro hustotu energie záření platí  $u = \frac{4\pi}{c} J = aT^4$ . Navíc první moment samozřejmě souvisí s výše užívanou veličinou  $L_R$ ,  $|\mathbf{H}| = L_R/(16\pi^2 R^2)$ , neboť dalším faktorem  $4\pi$  se dělilo v definici. Ve sférické symetrii je (složka  $\hat{r}$ ):

$$\frac{1}{3} \frac{c}{4\pi} a 4T^3 \frac{dT}{dR} = -\frac{\kappa\rho L_R}{16\pi^2 R^2},$$

odkud:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa\rho L_R}{16\pi acR^2 T^3},$$

neboli:

$$\left. \frac{dT}{dM_R} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa L_R}{64\pi^2 acR^4 T^3}. \quad (14)$$

**Adiabatická konvekce.** Chceme-li popsat jakékoliv proudění, máme zásadní problém, neboť  $\mathbf{v} \neq 0$ ! Nicméně představíme si jej „mlhavě“ tak, že probíhá nějaký termodynamický děj, v nejjednodušším případě adiabatický. Už jsme jej ostatně odvozovali pro atmosféru ??:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{ad}} = \frac{T}{P} \left( 1 - \frac{1}{\Gamma} \right) \frac{dP}{dR}. \quad (15)$$

Při adiabatické konvekci se vlastně nic neděje ( $dQ = 0$ ), pouze máme málo strmý gradient teploty, na nějž se nahoře naváže. Snad bychom tomu ani neměli říkat „přenos“, když expandující a kontrahující bubliny nikam nic neodvzdávají.

Pro posouzení, kdy konvekce nastává a kdy nikoli, můžeme využít odvozenou Bruntovu–Väisäläovu frekvenci ??:

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left( \left. \frac{d\rho}{dR} \right|_{\text{ad}} - \frac{d\rho}{dR} \right) = \frac{g}{\rho} \left( \frac{\rho}{\Gamma P} \frac{dP}{dR} - \frac{d\rho}{dR} \right), \quad (16)$$

Podmínka pro konvekci je přirozeně  $N^2 < 0$ , neboť pak je  $N$  imaginární a nevznikají vlny, nýbrž nestabilita. Je ekvivalentní Schwarzschildovu kritériu:<sup>1</sup>

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}. \quad (17)$$

Jinými slovy: je-li prostředí „mezi námi a vámi“ neprůhledné ( $\kappa\rho$  velké), musí zde být strmý gradient  $\nabla_{\text{rad}}$ ; bublina se sice adiabaticky ochladí (dle  $\nabla_{\text{ad}}$ ), ale její  $T_{\text{b}} > T_{\text{o}}$  zůstane vyšší, potažmo  $\rho_{\text{b}} < \rho_{\text{o}}$  nižší (neb  $P_{\text{b}} = P_{\text{o}}$  je neustále vyrovnané), tudíž podlehne vzlaku.

**Semiempirická konvekce.** Konvekce však často adiabatická *není*. Pak lze využít semiempirický popis, kdy předpokládáme, že víry urazí vzdálenost  $\ell = \alpha H_P$ , která je určitým násobkem tlakové škály  $H_P \equiv P/(dP/dR)$ , kde parametr  $\alpha$  je volný; pro standardní sluneční model (SSM) se volí např.  $\alpha = 2,1$ . Inverzí rovnice ?? lze vyjádřit:

$$\left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{semi}} = \left. \frac{dT}{dR} \right|_{\text{ad}} - \left[ \frac{L_R}{4\pi R^2} \frac{1}{\alpha^2 \sqrt{\beta} c_P \rho} \left( \frac{\mu m_{\text{u}}}{k} \right)^2 \right]^{\frac{2}{3}} \frac{g}{T}. \quad (18)$$

<sup>1</sup> Tyto symboly naneštěstí nejsou operátory, nýbrž  $\nabla \equiv \frac{P}{T} \frac{dT}{dP}$ ; jejich výhodou je bezrozměrnost a kladnost, neboť  $P(R)$  je klesající funkce, stejně jako  $T(R)$ . Nemusíme pak přemýšlet nad nerovnostmi záporných čísel.

Vidíme, že  $\rho$  i  $T$  jsou ve jmenovateli, čili semiempirická konvekce hluboko v nitru se blíží adiabatické.

**Semikonvekce.** Existuje ještě jedno kritérium pro konvekci, kde se využívá Ledouxův gradient:

$$\nabla_L = \nabla_{\text{ad}} + \nabla_B, \quad (19)$$

kteřý zahrnuje Bruntův gradient všech abundancí:

$$\nabla_B = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \Big|_{\rho} \sum_i \frac{\partial \ln P}{\partial \ln X_i} \Big|_{\rho, T, X_{j \neq i}} \frac{d \ln X_i}{d \ln P}. \quad (20)$$

Je-li prostředí nestabilní vzhledem k Schwarzschildovi, ale stabilní vzhledem k Ledouxovi:

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}} < \nabla_L, \quad (21)$$

pak nastává *semikonvekce*. Pro její popis lze použít difuzní aproximaci (Langer aj. 1983), s volným parametrem  $\alpha_{\text{sc}} = 1$  až 667.

**Termohalinní cirkulace.** Další možné proudění je termohalinní (hez. čes. tepelněsolné). Jedná se o obdobu hlubinné cirkulace v oceánech, při níž hraje roli slanost vody, přičemž slanější znamená hustší. Ve hvězdách jde o inverzi střední molekulové hmotnosti  $\mu$  v oblasti klesající ionizace, kde se nachází „řidší pod hustým“ (plně ionizovaný vodík má  $\mu = 0,5$ , plně neutrální  $\mu \doteq 1$ ). Cirkulace pak probíhá následovně: látka klesne  $\rightarrow$  ionizuje se  $\rightarrow$  zředí se  $\rightarrow$  stoupne  $\rightarrow$  rekombinuje  $\rightarrow$  zhoustne atd. Nastává i v případě, že Ledouxovo kritérium není splněno, tzn.  $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_L$ . Příspěvek k přenosu energie je možné popsat opět pomocí difuzní aproximace (Ulrich 1972), s volným parametrem  $\alpha_{\text{th}} = 0,001$  až 1.

**Konvektivní přestřelování.** Případný pohyb za hranicí konvektivní zóny vymezené Schwarzschildem se nazývá přestřelování. Jedná se vlastně o očekávaný jev, neboť víry mající velkou setrvačnost se zřejmě nebudou zastavovat okamžitě. Parametrizace se provádí pomocí  $f_{\text{ov}} = 0,1$  až 0,6, jakožto násobku  $H_P$ , přičemž se předpokládá exponenciální pokles promíchávání s postupným vzdalováním od hranice.

Jedním z pozorovaných projevů přestřelování je větší rozměr heliového jádra u červených obrů dle asteroseismologických měření (Montalbán aj. 2013). Pro Slunce se také pozorují odchylky pod tachoklinou, tj. rozhraním mezi zónou zářivé rovnováhy a konvektivní zónou, i když ty mohou souviset též s chybnými opacitami (Bailey aj. 2015).

Cílem dokonalejších modelů konvekce (např. Viallet aj. 2013), je popsat turbulentní proudění *bez* volných parametrů, se skutečným rychlostním polem  $\mathbf{v}$ , bez omezujících předpokladů ( $dQ \neq 0$ ), nejlépe včetně magnetického pole  $\mathbf{B}$ , pročež jsou potřebné rovnice MHD. Nejlepší by bylo, kdyby pro Slunce zároveň vyšly oscilace  $\mathbf{B}$  s periodou okolo 11 let.



### 1.5 Stavová rovnice a Sahovy rovnice

Celou soustavu uzavírá jako obvykle stavová rovnice pro hvězdnou látku:

$$P = \frac{\rho}{\mu m_u} kT \lambda_{\text{deg}}(\rho, T) + \frac{1}{3} a T^4 \quad (22)$$

kde je zohledněn ideální plyn, elektronová degenerace, tlak záření (fotonový plyn) i částečná ionizace jakožto závislost  $\mu(Q)$ .

Nesmíme proto zapomenout, že nedílnou součástí soustavy rovnic je soustava Sahova, která popisuje stupně ionizace  $x_j^r$  jednotlivých prvků (případně molekul) při LTE:

$$\frac{x_j^{r+1}}{x_j^r} P_e = \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}} Z_j^{r+1}}{h^3 Z_j^r} e^{-\frac{\chi_j^r}{kT}} \quad \text{pro } \forall j, \forall r, \quad (23)$$

kde  $P_e$  označuje tlak elektronového plynu,  $m_e$  hmotnost elektronu,  $Z_j^r$  partiční sumu,  $\chi_j^r$  ionizační energii; spolu s normovací podmínkou  $\sum_r x_j^r = 1$  pro  $\forall j$ . Pak počet volných elektronů na jeden atom je:

$$Q = \sum_j \nu_j \sum_r r x_j^r, \quad (24)$$

což přímo ovlivňuje střední molekulovou hmotnost  $\mu = \frac{\mu_i}{1+Q}$ , kde  $\mu_i = (\sum_E \frac{A_E}{w_E})^{-1}$ .

### 1.6 Okrajové podmínky v centru

Aby řešení soustavy diferenciálních rovnic bylo jednoznačné, musíme předepsat rozumné okrajové podmínky. Pro  $M_R = 0$  (tj. centrum) máme z definice  $L_R = 0$ ,  $R = 0$ . Určitým problémem je  $R$  ve jmenovateli, avšak zároveň se vyskytují  $M_R$  nebo  $L_R$  v čitateli, výrazy by tedy neměly divergovat. Při numerickém řešení to ovšem musíme ošetřit (viz Harmanec a Brož 2011).

### 1.7 Okrajové podmínky na povrchu

Pro  $M_R = M_*$ , což je parametr problému, nelze předepsat nic,  $R$ ,  $L_R$ , ani  $T$ , protože předem nevíme, kolik to vyjde, a nesmíme „znásilnit“ model. Pouze víme, že v atmosféře  $\rho \rightarrow 0$ ,  $P_g \rightarrow 0$ . Správně bychom měli použít sofistikovaný model atmosféry, který by mimochodem poskytoval kompletní syntetické spektrum, my však použijeme ten nejjednodušší (šedý).

**Šedá atmosféra.** Uvažovat budeme planparalelní (tenkou) atmosféru a rovnici přenosu bez rozptylu ( $\mu \equiv \cos \vartheta$ ,  $d\tau = \kappa \rho dx$ , kde  $x$  je hloubka, i když referenční směr pro  $\mu$  je nahoru):

$$-\mu \frac{dI}{d\tau} = \frac{j}{\kappa} - I. \quad (25)$$

Zavedeme-li skalární momenty intenzity (viz obr. 3):

$$J \equiv \frac{1}{4\pi} \int I d\omega, \quad (26)$$

$$H \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \mu d\omega, \quad (27)$$

$$K \equiv \frac{1}{4\pi} \int I \mu^2 \vartheta d\omega, \quad (28)$$

pak nultý integrál rovnice přenosu:

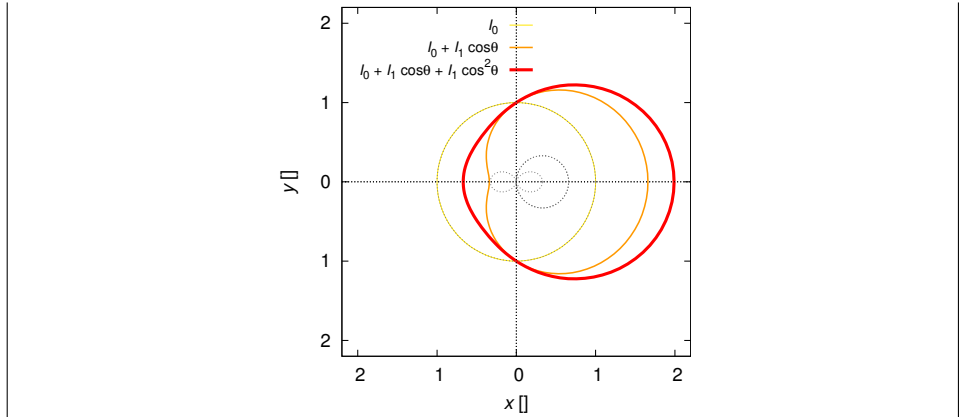
$$-\frac{d}{d\tau} \int I \mu d\omega = \frac{j}{\kappa} \int d\omega - \int I d\omega,$$

vychází:

$$-\frac{dH}{d\tau} = \frac{j}{\kappa} - J,$$

kdežto první integrál (po násobení  $\mu$ ):

$$-\frac{dK}{d\tau} = 0 - H.$$



**Obr. 3** — Závislost intenzity na směru od osy, pokud je  $I(\vartheta) = I_0 + I_1 \cos \vartheta + I_2 \cos^2 \vartheta$ , kde  $I_0 = 1$ ,  $I_1 = 0,66$ ,  $I_2 = 0,33$ , i když v reálných situacích je často  $I_0 \gg I_1 \gg I_2$ .

Zároveň požadujeme, aby  $H$  odpovídalo hvězdě, tzn. předpokládanému  $L_*$ ,  $R_*$  nebo  $T_{\text{eff}}$ , dle jejího definičního vztahu  $L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$ , pak:

$$H = \frac{L_*}{16\pi^2 R_*^2} = \frac{1}{4\pi} \sigma T_{\text{eff}}^4,$$

jinými slovy je  $H = \text{konst.}$  Integrace 1. integrálu (podle  $\tau$ ) je tudíž triviální:

$$K = H\tau + C, \quad (29)$$

kde  $C$  je integrační konstanta, kterou zatím neznáme.

Eddingtonův trik spočívá v tom, že obecnou  $I(\mu)$  jednoduše rozdělíme na horní poloprostor a dolní poloprostor:  $I = I_1$  pro  $\mu > 0$ ,  $I = I_2$  pro  $\mu \leq 0$ , kde  $I_1$ ,  $I_2$  nezávisí na  $\mu$ , jen na  $\tau$ . Přitom  $I_2(\tau) = 0$  pro  $\tau = 0$ , tj. okrajová podmínka na „vršku“ fotosféry. Pak ovšem lze snadno spočítat všechny momenty:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \\ H &= \frac{1}{4}(I_1 - I_2), \\ K &= \frac{1}{6}(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

a uvidět, že i pro poloprostorovou intenzitu platí uzavírací relace:

$$K = \frac{1}{3}J \quad \text{pro } \forall \tau$$

a zároveň:

$$J = 2H \quad \text{pro } \tau = 0.$$

Dosadíme-li obojí do (29), obdržíme obratem  $C = \frac{2}{3}H$ .

Dosadíme-li prvé do (29) (se  $\sigma = \frac{ca}{4}$ ):

$$\frac{1}{3} \frac{c}{4\pi} aT^4 = \frac{1}{4\pi} \sigma T_{\text{eff}}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right),$$

získáme teplotní profil atmosféry:

$$T^4(\tau) = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4 \left( \frac{3}{2} \tau + 1 \right), \quad (30)$$

tzn. že nemusíme vůbec řešit její energetiku.

**Hydrostatická rovnováha.** Nakonec nám tedy pro popis atmosféry stačí pouze 1 rovnice, konkrétně hydrostatická rovnováha, neboť  $T(\tau)$  známe a  $P_g = P_g(\rho)$ ; kontinuita je triviální. Máme:

$$\frac{dP}{dx} = g\rho,$$

což zapsáno v optické tloušťce:

$$\frac{dx}{d\tau} = \kappa\rho, \quad (31)$$

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\kappa}, \quad (32)$$

s okrajovou podmínkou  $\tau = 0, x = 0, P_g = 0$ . Integrujeme numericky směrem dolu, počítáme přitom závislé veličiny  $P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4, P = P_g + P_{\text{rad}}, \rho = P_g \frac{\mu m_u}{kT}$ . Opacitu pro jednoduchost bereme dle Bell a Lin (1994). Ve Fortranu 77 bychom psali:

```
tau = 0.d0
x = 0.d0
P_g = 0.d0

do while (tau < tau_max)
  T = (0.5d0*Teff**4*(1.5d0*tau + 1.d0))**(0.25d0)
  P_r = 1.d0/3.d0*a*T**4
  P = P_g + P_r
  rho = P_g*mu*m_u/(k*T)

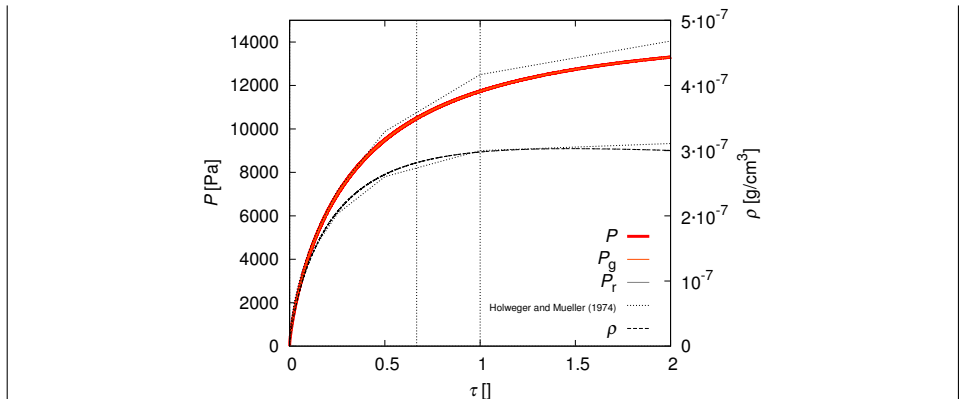
  kappa = kappa_func(rho, T)

  write(*,*) tau, x/1.d3, P, P_g, P_r, rho, T, kappa

  dx = dtau/(kappa*rho)
  dP = g/kappa*dtau
  dP_r = a/4.d0*Teff**4*dtau
  dP_g = dP-dP_r

  P_g = P_g + dP_g
  tau = tau + dtau
  x = x + dx
enddo
```

Řešením (jako obr. 4) několika fotosfér (různé  $L_*$ ,  $R_*$ ) získáváme vhodné okrajové podmínky pro modely nitra (na  $\tau = 2/3$ ), avšak musíme předepsat pouze *relace* mezi veličinami  $R, P, L_R, T$ , nikoli veličiny samotné, protože a priori nevíme, kolik to vyjde!



**Obr. 4** — Profil sluneční fotosféry, znázorňující tlak  $P$  a hustotu  $\rho$  v závislosti na optické tloušťce  $\tau$ . Předpokládáme šedou atmosféru a porovnááme ji s daty Holweger a Müller (1974).

Shrnutí: jsou soustavou 4 diferenciálních nelineárních rovnic 1. řádu se smíšenými okrajovými podmínkami, pro 4 neznámé funkce  $R(M_R)$ ,  $P(M_R)$ ,  $L_R(M_R)$ ,  $T(M_R)$  1 nezávislé proměnné  $M_R$ .

### 1.8 Vývojové rovnice stavby

Pokud bychom chtěli zároveň studovat vývoj v čase, musíme změnit chemické složení a promíchat (netřepat):

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_j \frac{\epsilon_j}{\alpha_j}, \quad (33)$$

kde  $\epsilon_j$  označuje měrný výkon jednotlivých reakcí a  $\alpha_j$  měrnou energii hvězdné látky, která by se celkově uvolnila při dané reakci, a:

$$Y_K = \frac{\int_K Y dM_R}{\int_K dM_R} \quad \text{pro } \forall K, \quad (34)$$

neboť v každá konvektivní zóna (vnitřní i vnější) je pokládána za dokonale promísenou a chemicky homogenní. Obdobně bychom postupovali pro  $X$ ,  $Z$ , případně jednotlivé izotopy.

V tepelné rovnováze (6) musíme uvážit i časové změny vnitřní energie a vykonanou práci:

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuc}} - \epsilon_\nu - \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} P \frac{d\rho}{dt}. \quad (35)$$

Pokud by se hvězda vyvíjela opravdu rychle, můžeme situaci zkusit zachránit tím, že do (3) vrátíme inerciální člen (zrychlení):

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4} - \frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}. \quad (36)$$

### 1.9 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky se nejčastěji předepisují ve fázi hydrostatické protohvězdy (tzn. před hlavní posloupností), která bývá plně konvektivní, neboť protohvězdy jsou chladné, látka je ve stavu částečné ionizace, má vysokou opacitu, čili je všude splněna Schwarzschildova podmínka  $\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}$ . Při dokonalém promíchávání můžeme předpokládat  $X = \text{konst.}$ ,  $Y = \text{konst.}$ ,  $Z = \text{konst.}$  pro všechna  $M_R$ , zvolené tak, aby odpovídaly zvolené populaci hvězd.

Shrnutí: vývojové rovnice stavby jsou soustavou 7 integro–diferenciálních nelineárních rovnic 2. řádu se smíšenými okrajovými podmínkami, pro 7 neznámých funkcí  $R(M_R, t)$ ,  $P(M_R, t)$ ,  $L_R(M_R, t)$ ,  $T(M_R, t)$ ,  $X(M_R, t)$ ,  $Y(M_R, t)$ ,  $Z(M_R, t)$  2 nezávislých proměnných  $M_R$ ,  $t$ .

### 1.10 Numerické řešení metodou FVM

Jedním ze způsobů numerické řešení je integrace přes (neinfinitesimální) objemy (FVM), v našem případě kulové slupky vymezené zvolenými hodnotami  $M_j$ . Namísto neznámých spojitých funkcí máme neznámé diskrétní veličiny  $R_j$ ,  $P_j$ ,  $L_j$ ,  $T_j$ ,

$X_j, Y_j, Z_j$  pro  $j = 1..M$ , přičemž tyto jsou definované uvnitř objemu ( $P_j, T_j, X_j, Y_j, Z_j$ ) nebo na jeho hranici ( $R_j, L_j$ ). Provedeme-li zároveň nejjednodušší Eulerovu diskretizaci v čase:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \doteq \frac{Y^{n+1} - Y^n}{\delta t}, \quad (37)$$

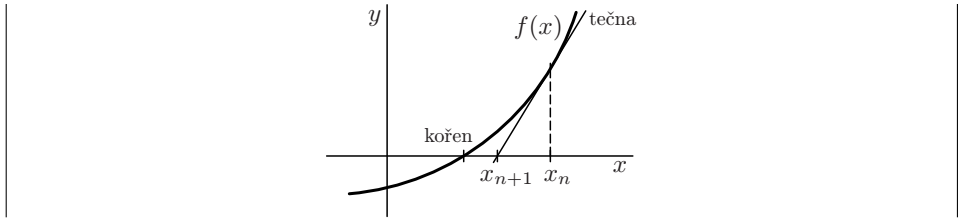
apod. pro ostatní veličiny, a dosadíme-li všude jinde hodnoty veličin v *novém* čase  $t^{n+1}$ , získáme implicitní metodu, v rámci které bychom museli vyřešit nelineární soustavu  $7M$  rovnic. Symbolicky ji zapíšeme pro všechny veličiny najednou jako:

$$F_j = 0 \quad j = 1..7M. \quad (38)$$

Soustavu nelze jen tak invertovat (je stále nelineární). Dosadíme-li do ní odhad (např. řešení z předchozího časového kroku, jednoduchý polytropický model) jistě *nebude* splněna:

$$F_j \neq 0.$$

Ke skutečnému řešení se můžeme přiblížit metodou Newtonovou–Raphsonovou, která pro jednorozměrnou funkci  $f(x)$  funguje jako na obr. 5.



**Obr. 5** — Schéma jedné iterace Newtonovy–Raphsonovy metody pro hledání kořenů funkce  $f(x) = 0$ . V bodě  $x_n$  zkonstruujeme pomocí derivace  $f'(x_n)$  tečnu, jejíž průsečík s osou  $x$  nám dá novou hodnotu  $x_{n+1}$ , která je blíže kořenu.

V našem mnoharozměrném případě vlastně hledáme mnoho kořenů, jedna iterace NR vlastně představuje nalezení intervalů  $\Delta X_k$  (neboli oprav veličin):

$$F_j + \sum_{k=1}^{7M} \overbrace{\frac{\partial F_j}{\partial X_k}}^{J_{jk}} \Delta X_k = 0 \quad \text{pro } \forall j, \quad (39)$$

což evidentně spočívá v řešení *lineární* soustavy rovnic; matice  $J_{jk}$  se nazývá jakobián. Je nanejvýš vhodné, když jsou rovnice úhledně uspořádané, takže  $J_{jk}$  je pásové a inverze snazší. Prakticky můžeme výpočet provést programem Mesastar (Paxton aj. 2011, 2013, 2015).

Kdybychom se chtěli obeznámit s tím, kde jsou rovnice v programu zapsány, začneme v souboru `star/job/run_star.f90` a postupujeme takto:

```

do_run_star (1)
  run1_star (2)
    EVOLVE_LOOP:
      STEP_LOOP:
        star_evolve_step (3)
          do_evolve_step_part2 (4)
            IMPLICIT_MDOT_LOOP:
              do_struct_burn_mix (5)
                do_hydro_converge (6)
                  do_hydro_newton (7)
                    hydro_newton_step (8)
                      newt (9)
                        newton (10)
                          do_newton (11)
                            eval_equations (12)
                              eval_equ (13)
                                eval_equ_for_solver (14)
                                  ZONES_LOOP:
                                    do1_dln_d_dt_eqn (15)
                                      e00 (16)

```

kde se na 16. úrovni vnoření (!) vyskytuje zápis jednoho z členů jedné z derivací jedné z rovnic (konkrétně kontinuity) do jakobiánu.

## 1.11 Značení vývojových stadií

Abychom se neupsali, označíme si vývojová stadia následujícími zkratkami:

PS	... nerovnovážná protohvězda (angl. protostar)
pre-MS	... hvězda před hlavní posloupností
MS	... hlavní posloupnost (main sequence)
SGB	... větev podobrů (subgiant branch)
RGB	... větev červených obrů (red giant branch)
HB	... horizontální větev (horizontal branch)
AGB	... asymptotická větev obrů (asymptotic giant branch)
TP-AGB	... termální pulzy
post-AGB	... hvězda po AGB
NB	... obálková mlhovina (nebula)
WD	... bílý trpaslík (white dwarf)
BD	... hnědý trpaslík (brown dwarf)
RD	... červený trpaslík (red dwarf)
BSG	... modrý veleobr (blue supergiant)
RSG	... červený veleobr (red supergiant)
WR	... Wolfova–Rayetova hvězda
SN	... supernova
NS	... neutronová hvězda (neutron star)
BH	... černá díra (black hole)

Dále budeme samozřejmě užívat písmena odpovídající Harvardské spektrální klasifikaci: O, B, A, F, G, K, M, L, T. Případně podrobnější číselné členění O2 ... O8, B0 ... B8, atd.

Další méně časté zkratky nechtě jsou: WN tj. WR s čarami N; WC WR s C; LBV svítivá modrá proměnná, Of O s emisními čarami.

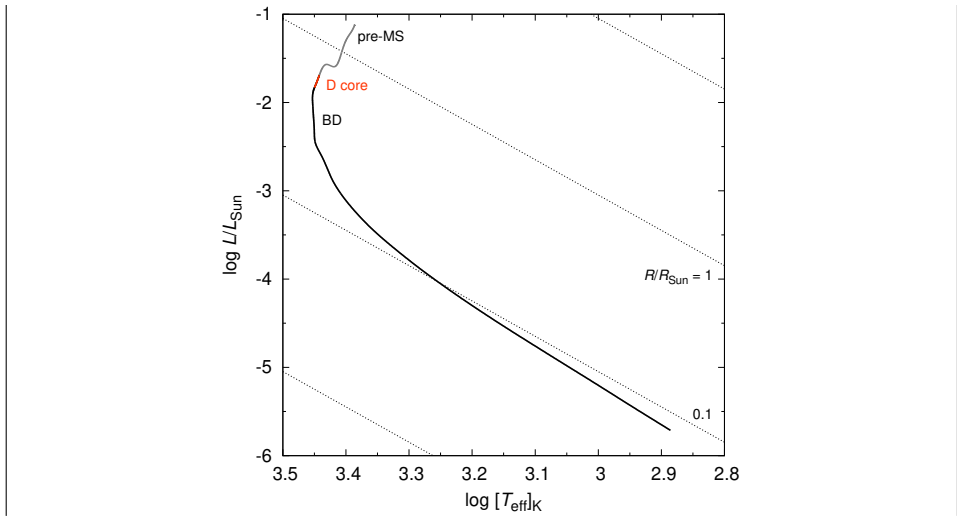
### 1.12 Vývojové procesy

Vzhledem k tomu, že se procesy mohou opakovat, nemá cenu je vysvětlovat vícekrát. Proto o nich pojednáme jen jednou a uvedeme fáze, ve kterých se zejména uplatňují.

1. *kontrakce* → *ohřev*: Každý normální plyn se při stlačení zahřeje, není-li v kontaktu s nějakým rezervoárem, který by jeho teplotu udržoval. Pro adiabatický děj ( $dQ = 0$ ) a zároveň platnou stavovou rovnicí ostatně máme  $P = K\rho^\gamma = \rho/(\mu m_u)kT$ , neboli  $\rho^{\gamma-1}T^{-1} = k/(K\mu m_u)$ , což při  $\gamma > 1$  znamená ohřev při kontrakci. Ve hvězdě jde zejména o kontrakci jádra. Uplatňuje se ve fázích SGB, RGB.
2. *expanze* → *ochlazení*: Samozřejmě je možný i proces opačný. Často se jedná o expanzi obálky; oba procesy probíhají zároveň, neboť po kontrakci jádra se něco stát musí. Proč nekontrahuje také obálka? Kdyby mohla, kontrahovala by už předtím, avšak nyní do ní přichází více tepelné energie! Uplatňuje se opět ve fázích SGB, RGB
3. *hoření H v centru*: Termonukleární reakce jakožto kladný příspěvek k  $dQ$  hvězdu vlastně neohřívají, nýbrž vyrovnávají ztrátu (záporné  $dQ$ ), a tím zpoomalují kontrakci. Udržují hvězdu velmi blízko hydrostatické rovnováhy, všechny stavové veličiny se mění pomalu. Jedná se samozřejmě o nejdlejší fázi MS.
4. *růst střední molekulové hmotnosti  $\mu$* : Podstatnou změnou je však změna chemického složení, přičemž ve stavové rovnici  $P = \rho/(\mu m_u)kT$ , je  $\mu$  ve jmenovateli. Pro čistý plně ionizovaný vodík by bylo  $\mu \doteq 1/2$  (1 proton, 1 elektron s  $m \doteq 0$ , 2 částice), pro čisté helium  $\mu \doteq 4/3$ . Tomu odpovídá menší tlak  $P$  i  $\nabla P$  (i když ne nutně). Látka se nám mění „pod rukama“, stává se měkčí. Jedná se o hlavní vývojový proces na MS.
5. *pokles opacity  $\kappa$  chemicky*: Rozptyl na volných elektronech je zdaleka nejvýznamnější zdroj opacity v plně ionizovaném plazmatu, kde nejsou možné vázaně-volné natož vázaně-vázané přechody. Pak  $\kappa$  logicky klesá, neboť elektrony anihilují s pozitrony, uvolněnými řetězcem pp nebo cyklem CNO. Ostatně tomu odpovídá i přibližná Kramersova opacita,  $\kappa \doteq 0,19 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} (1-X)$ , kde přímo vystupuje abundance vodíku. Uplatňuje se taktéž na MS.
6. *hoření H ve slupce*: Po poklesu  $X_c \rightarrow 0$  se maximum  $\epsilon_{\text{nuc}}$  přesouvá ven, čemuž říkáme hoření ve slupce. Pokračuje téměř neustále od SGB  $\rightarrow$  AGB.
7. *růst opacity  $\kappa$  rekombinací*: Obzvlášť po zmiňované expanzi obálky lze očekávat vznik konvektivní zóny, které roste od povrchu směrem dovnitř, až je většina objemu konvektivní. Způsobuje první vynesení prvků do atmosféry; uplatňuje se ve fázi RGB.



8. *vznik degenerovaného jádra*: Elektronový plyn vykazuje při vysoké hustotě (anebo ekvivalentně nízké teplotě) degeneraci, neboli prudký nárůst tlaku kvůli Pauliho vylučovacímu principu.  $\nabla P$  by u málo hmotných hvězd zastavil další kolaps; není však dost času, aby se takto vyvinuly. Situace jinak nastává ve fázi RGB.
9. *chlazení neutrin*: V určitých krátkých fázích, kdy je vysoká centrální teplota  $T_c$ , může být  $\epsilon_\nu \gg \epsilon_{\text{nuc}}$ . Pak ovšem nutně nastává rychlý kolaps jádra. Jedná se o přechod mezi RGB/HB a krátké fáze TP-AGB, WR.
10. *He záblesk v jádře*: Vysoce degenerovaný plyn má velmi zvláštní vlastnost: při dodání  $dQ$  se nezvyší  $T$ , tedy ani  $P$ , nedojde k žádné expanzi, pouze ke snížení stupně degenerace  $\psi$ . Hoření He proto začíná překotně, dokud  $\psi \rightarrow 0$ . Příslušná Salpeterova reakce ( $3\alpha$ ) kvůli chlazení neutrin začíná mimo centrum. I když  $L_{\text{nuc}} \simeq 10^{10}$ , na povrchu se příliš neprojeví. V té souvislosti ovšem nastávají oscilace celé hvězdy. Jedná se opět o přechod RGB/HB.
11. *hoření He v centru*: Druhý zdroj kupodivu *neznamená* zvýšení zářivého výkonu  $L$ . Musí se totiž uvážit interakce dvou slupek — expanze jádra způsobí expanzi H slupky, snížení  $\epsilon_H$  i značný pokles celkového  $L$ . Vzhledem ke strmosti  $\epsilon_{\text{nuc}}(T)$  očekáváme navíc konvektivní zónu v centru. Jedná se vlastně o obdobu MS, ale odlišujeme ji jako HB.
12. *hoření He ve slupce*: Analogicky se hvězda vyvíjí při  $Y_c \rightarrow 0$ , obdobně jako na RGB, avšak tentokrát hovoříme o fázi AGB. Obě větve leží blízko sebe a částečně se překrývají. V atmosféře se později objevuje druhé vynesení.
13. *He záblesky ve slupce*: Postupně dochází ke ztenčování slupek, přibližování slupek, jejich interakci, při níž kvůli degeneraci na spodku He slupky nastává překotné hoření He a silný ohřev. V horní části přitom vznikne malá konvektivní zónička a dojde k dočasnému vyhasnutí H slupky. Tepelné pulzy trvají řádově  $10^2$  yr, intervaly mezi pulzy  $10^4$  yr. Případně dochází ke třetímu vynesení, pokud se konvektivní zóna propojí s vnější. Jedná se fázi označovanou TP-AGB.
14. *ztráta hmoty*: Ať už jde o hydrodynamický vítr, vítr řízený zářením, supervítr, pulzace obálky, nebo pouze o nějaký semiempirický předpis, hvězda v pozdních fázích prodělává zásadní změnu hmotnosti. Jedná se především o fáze RGB, AGB, post-AGB, WR.
15. *hoření C*: Pro hmotnější hvězdy dochází i k reakcím uhlíku, při němž v nitru vznikají izotopy Ne, Mg, Jedná se opět o fázi AGB, potažmo WD se složením O/Ne/Mg.
16. *vznik Fe jádra*: Pokračující zachycování částic  $\alpha$  vede až ke vzniku jader skupiny železa (obr. 2), která mají maximální vazebnou energii na nukleon. Pak nastává nevyhnutelný kolaps, při němž hraje roli fotodisintegrace jader Fe (zpět na  $\alpha$ ), neutronizace, vzniká NS nebo BH, v závislosti na detailní struktuře jádra před kolapsem.
17. *ohřev neutrin*: Hustota látky v okolí proto-NS je natolik vysoká, že se uplatňuje přenos energie neutrin, která jsou při slabých interakcích s látkou termalizována. Probíhá nukleosyntéza r-procesem (zachycování neutronů rychlejší než rozpad  $\beta^-$ ) nebo p-procesem. Přitom lze očekávat určité nestability (viz kap. ??).



**Obr. 6** — Hertzsprungův–Russellův diagram, tj. závislost zářivý výkon  $L$  versus efektivní teplota  $T_{\text{eff}}$ , pro hvězdu s hmotností  $M = 0,05 M_{\odot}$  neboli hnědého trpaslíka. Krátká fáze hoření deuteria (oranžově) *není* následována hořením H, čili trpaslík pozvolna chladne, kontrakce je zastavována degenerovaným plynem. Vývoj byl ukončen v čase 13,7 Gyr, odpovídajícím stáří vesmíru. Výpočet programem Mesastar (Paxton aj. 2015).

### 1.13 Vývoj hvězd různých hmotností

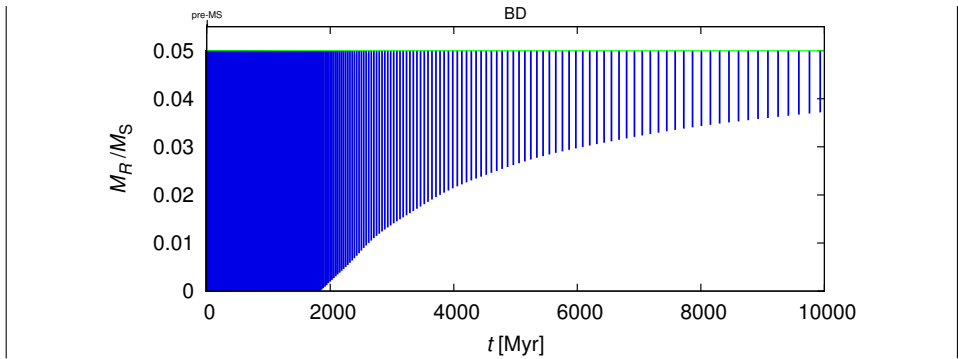
Zkusme nyní stručně popsat, jak se liší vývoj hvězd podle jejich počáteční hmotnosti. Když se z mezihvězdné látky vydělí kolabující protohvězda, zpočátku je možno kolaps považovat za izotermální, později za adiabatický. Na HR diagramu by tomu odpovídal pohyb za Hayashiho linií. Po dosažení hydrostatické rovnováhy konvektivní protohvězda sestupuje podél Hayashiho linie a posléze se posouvá ke hlavní posloupnosti. Méně hmotné hvězdy se přitom jeví jako objekty typu T Tauri, příp. FU Orionis, více hmotné jako Herbigovy hvězdy Ae nebo Be, nejmotnější pak jako RSG, BSG. Schematicky bychom to mohli popsat jednoduše jako:

PS  $\rightarrow$  pre-MS  $\rightarrow$  MS ...

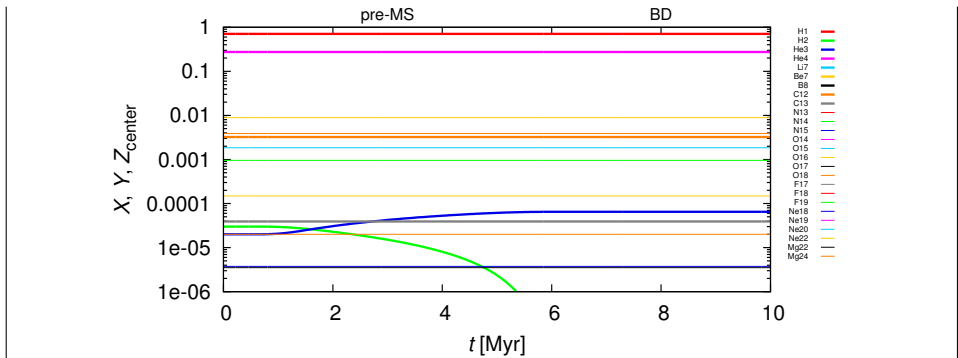
Co se týká následného vývoje, u hvězdy s hmotností  $M \geq 0,013 M_{\odot}$  dochází pouze hoření deuteria,  $D + p \rightarrow {}^3\text{He} + e^+ + \bar{\nu}_e$  (obr. 8). Zpočátku je plně konvektivní, posléze zóna ustupuje (obr. 7). Kolapsu brání degenerovaný plyn, pouze postupně chladne (obr. 6). Hvězda spektrálního typu T i její konečné stadium se nazývá hnědý trpaslík, což zapíšeme jako:

T  $\rightarrow$  BD (D)

Podobně se vyvíjejí hvězdy s  $M \geq 0,060 M_{\odot}$ , ale dochází u nich navíc k hoření lithia:



**Obr. 7** — Kippenhahnův diagram (pro  $M = 0,05 M_{\odot}$ ), čili vnitřní struktura vynesená ve hmotnosti  $M_R$  a v závislosti na čase  $t$ . Konvektivní zóna je značena modře; zóny hoření zde nejsou patrné.



**Obr. 8** — Abundance jednotlivých izotopů v centru (pro  $M = 0,05 M_{\odot}$ ). Ve fázi před hlavní posloupností je patrné pouze hoření deuteria, jinak abundance zůstávají konstantní. Zobrazen je pouze krátký úsek do 10 Myr.

L  $\rightarrow$  BD (Li)

Hvězda s  $M \geq 0,10 M_{\odot}$  je červený trpaslík. Její konečné stadium by byl heliový podtrpaslík, ale evidentně není čas, aby se vyvinul (v mladých otevřených hvězdokupách naopak vidáme spíše fázi pre-MS):

M8  $\rightarrow$  He sd

Pro  $M \geq 0,25 M_{\odot}$  jde opět o červeného trpaslíka, ale tentokrát by vystoupal nad hlavní posloupnost mezi „podobry“. Na konečné stadium, heliového bílého trpaslíka, ale opět není čas:

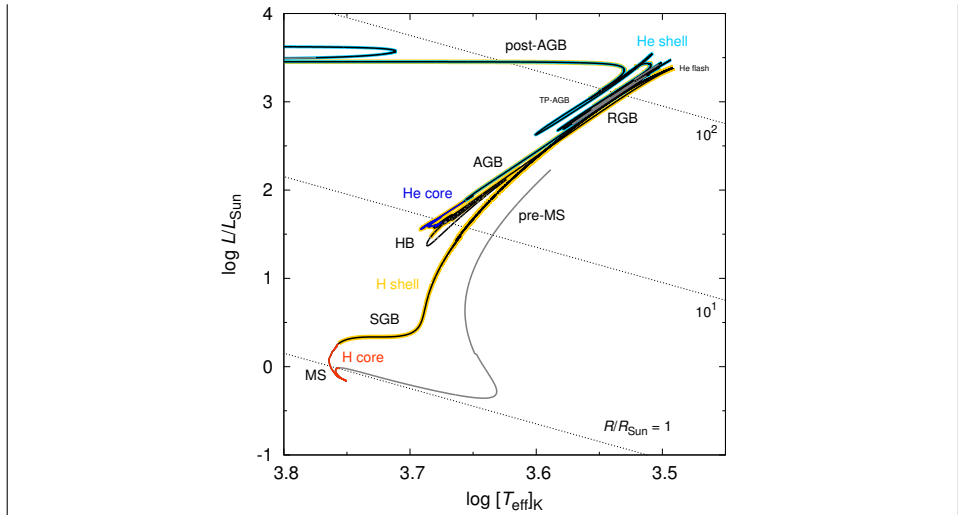
M5  $\rightarrow$  SGB  $\rightarrow$  He WD

Pro  $M \geq 0,60 M_{\odot}$  nastává určité stoupání podél Hayashiho linie, avšak degenerace zabrání dalšímu kolapsu jádra a hoření helia, čili:

K5  $\rightarrow$  SGB  $\rightarrow$  RGB  $\rightarrow$  He WD

Pro Slunce s  $M \geq 1,0 M_{\odot}$  již očekáváme komplexní vývoj (obr. 9), komplexní změny konvektivních zón (obr. 10), fázi hoření He (obr. 11) včetně záblesků, čemuž odpovídá konečné stadium uhlíkov/kyslíkový bílý trpaslík:

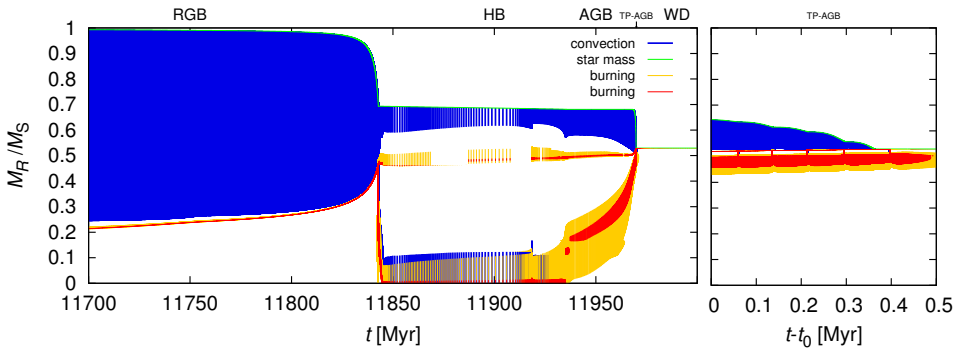
MS G5  $\rightarrow$  SGB  $\rightarrow$  RGB  $\rightarrow$  HB  $\rightarrow$  AGB  $\rightarrow$  TP-AGB  $\rightarrow$  post-AGB  $\rightarrow$  NB  
 $\rightarrow$  C/O WD



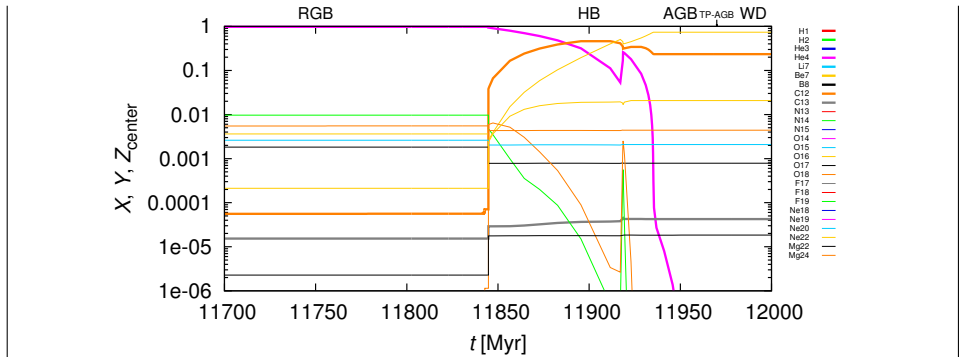
**Obr. 9** — HR diagram pro Slunce s počáteční hmotností  $M = 1 M_{\odot}$ . Černě jsou podél vývojové stopy připsány jednotlivé fáze, od pre-MS do post-AGB. Barevně jsou vyznačeny období hoření H v centru (červeně), hoření H ve slupce (žlutě), hoření He v centru (modře), hoření He ve slupce (bledě). Čárkovaně jsou vyneseny linie konstantního poloměru, dle vztahu  $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$ . Během stoupání podél RGB je patrná malá zastávka (angl. dip). Je způsobena průchodem zóny hoření diskontinuitou v chemickém složení tam, kam zasáhla konvektivní zóna, jež způsobila zvýšení  $X$  na  $X_{\text{surf}}$   $\rightarrow$  pokles  $\mu$   $\rightarrow$  pokles  $T$   $\rightarrow$  dočasný pokles  $\epsilon_{\text{nuc}}$ . U hvězd s nižší metalicitou bychom v rámci HB také očekávali výraznou modrou smyčku (k vyšším  $T_{\text{eff}}$ ). Počáteční abundance helia byla zvolena  $Y = 0,274$ , metalicita  $Z = 0,01954$ , opacity dle Grevesse a Noels (1993), parametr konvekce  $\alpha = 2,1$ , parametrický Reimersův vítr (ve fázi RGB) s účinností  $\eta = 0,6$ , Blockerův vítr (AGB) s  $\eta = 0,1$ .

Pro  $M \geq 1,3 M_{\odot}$  je obdobná situace, pouze poloha na hlavní posloupnosti je více vlevo nahoře. Uvádíme ji zde kvůli odlišné spektrální třídě (na MS):

F5  $\rightarrow$  dtto



**Obr. 10** — Kippenhahnův diagram (pro  $M = 1 M_{\odot}$ ) v pozdních fázích vývoje (RGB až WD). Vyznačeny jsou nejvýše 2 největší konvektivní zóny a 2 zóny hoření (H, He). Zejména na konci fáze RGB dochází ke ztrátě na  $0,7 M_{\odot}$ , později až na  $0,5 M_{\odot}$ . Vnější konvektivní zóna ustupuje před tenkou slupkou H. He záblesk zde nastává v čase asi 11,85 Gyr. Na konci je patrné dohořívání obou slupek až k povrchu. Detail vpravo zachycuje krátkou fázi TP-AGB, během které je patrných pět He záblesků ve slupce, čili tepelných pulzů. Na hranici rozlišení jsou dočasná vyhasnutí H slupky a malé konvektivní zóny.



**Obr. 11** — Abundance v centru (pro  $M = 1 M_{\odot}$ ) pro všechny izotopy uvažované sítě reakcí, zahrnující řetězec pp, cyklus CNO a reakce až po  $^{24}\text{Mg}$ . Během fáze HB se spotřebovává He v centru. Náhlé zvýšení  $Y$  v čase 11,92 Gyr souvisí s počátkem přeměny O na C a rozšířením centrální konvektivní zóny. V konečném stadiu (WD) je jádro tvořené především kyslíkem  $^{16}\text{O}$  a uhlíkem  $^{12}\text{C}$ .

Pro  $M \geq 1,8 M_{\odot}$  je obdobná obdobná situace:

A5 → dtto

Pro hmotnost  $M \geq 5 M_{\odot}$  sled reakcí pokračuje až za cyklus CNO (srov. obr. 1), tudíž konečné stadium je kyslíkovo/neonový/hořčíkový bílý trpaslík:

B4 → SGB → RGB → HB → AGB → TP-AGB → post-AGB → NB  
 → O/Ne/Mg WD

Při hmotnosti  $M \geq 10 M_{\odot}$  je natolik vysoký zářivý výkon, že přechody mezi fázemi jsou na HR diagramu víceméně vodorovné. O moc výše už hvězdy ani být nemohou, neboť se blíží Eddingtonově limitě. Jeví se jako modří nebo červení veleobří, v nichž vznikne jádro Fe, což končí explozí supernovy typu II a konečné stadium je zpravidla neutronová hvězda (obr. 15):

$$B1 \rightarrow BSG \rightarrow RSG \rightarrow SN \rightarrow NS$$

Pro  $M \geq 20 M_{\odot}$  lze očekávat natolik zásadní ztrátu hmoty hvězdným větrem, že vznikne WR hvězda s atmosférou obohacenou o  $^{14}\text{N}$ . Konečné stadium je jistě neutronová hvězda nebo černá díra, podle toho, je-li exploze supernovy úspěšná či nikoli:

$$O8 \rightarrow BSG \rightarrow WN \rightarrow SN \rightarrow NS \text{ nebo BH}$$

Pro  $M \geq 25 M_{\odot}$  také vznikne WR hvězda, ale její atmosféra je navíc obohacená o  $^{12}\text{C}$ ; končí spíše kolapsem do černé díry:

$$O7 \rightarrow BSG \rightarrow WN \rightarrow WC \rightarrow SN \rightarrow BH$$

Pro  $M \geq 40 M_{\odot}$  lze po opuštění hlavní posloupnosti odlišit stadium Of, ale jinak je situace obdobná:

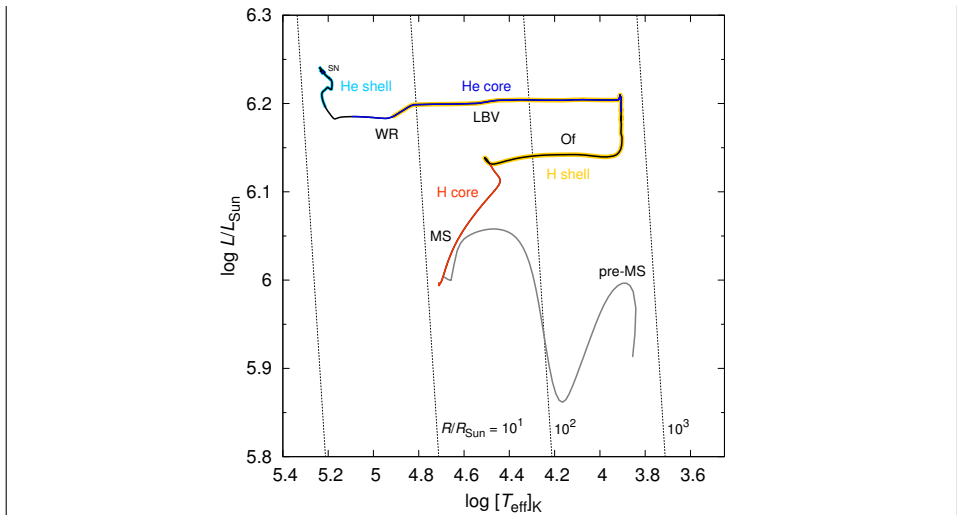
$$O5 \rightarrow Of \rightarrow WN \rightarrow WC \rightarrow SN \rightarrow NS \text{ nebo BH}$$

Konečně pro  $M \geq 85 M_{\odot}$  očekáváme fázi výrazné proměnnosti (LBV), jinak je situace obdobná obdobné (viz obr. 12, 13, 14):

$$O2 \rightarrow Of \rightarrow LBV \rightarrow WN \rightarrow WC \rightarrow SN \rightarrow BH$$

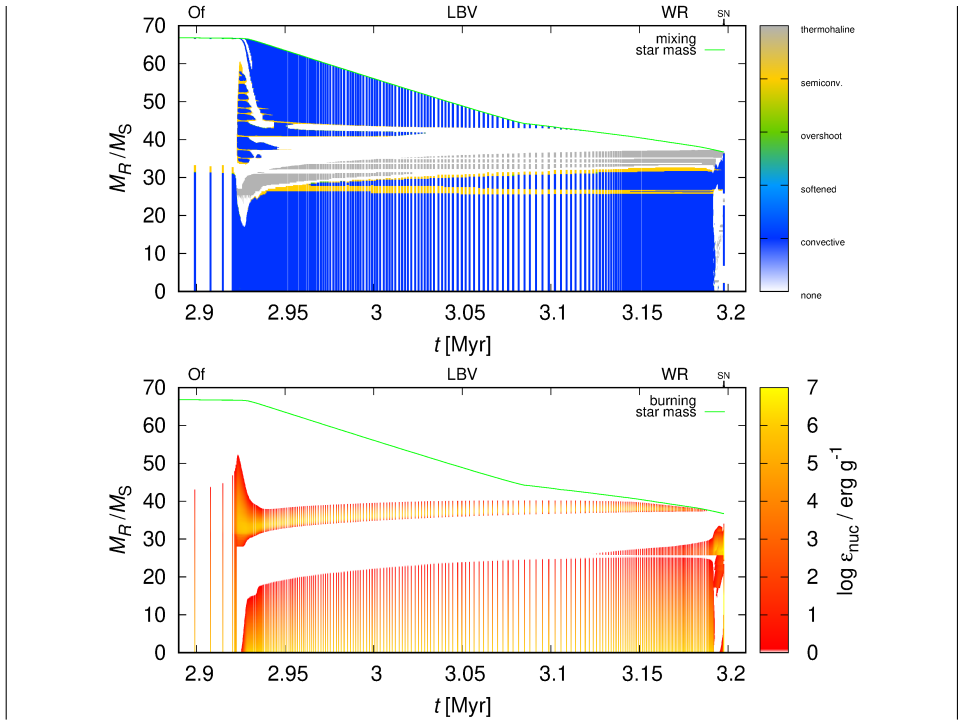
Zdůrazněme, že exploze supernovy může mít vícero možných výsledků; i pro prakticky stejnou počáteční hmotnost  $M_i$  se liší konečná hmotnost  $M_f$ . Funkce  $M_f(M_i)$  s více hodnotami ovšem není funkce! Důvodem jsou patrně interakce mezi několika slupkami C, O, které velmi citlivě závisejí na jejich vzájemných vzdálenostech (Pejcha a Thompson 2015, Sukhbold aj. 2018).

- [1] GREVESSE, N., NOELS, A. *Cosmic abundances of the elements*. in Origin and evolution of the elements, eds. M. Prantzos, E. Vangioni-Flam, M. Casse, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [2] GREVESSE, N., SAUVAL, A. J. *Standard solar composition*. *Space Sci. Rev.*, 85, 161, 1980.
- [3] HARMANEC, P., BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: MatfyzPress, 2011. ISBN 97880-73781651.
- [4] HENYEV, L., VARDYA, M. S., BODENHEIMER, P. *Studies in stellar evolution. III. The calculation of model envelopes*. *Astrophys. J.*, **142**, 841, 1965.

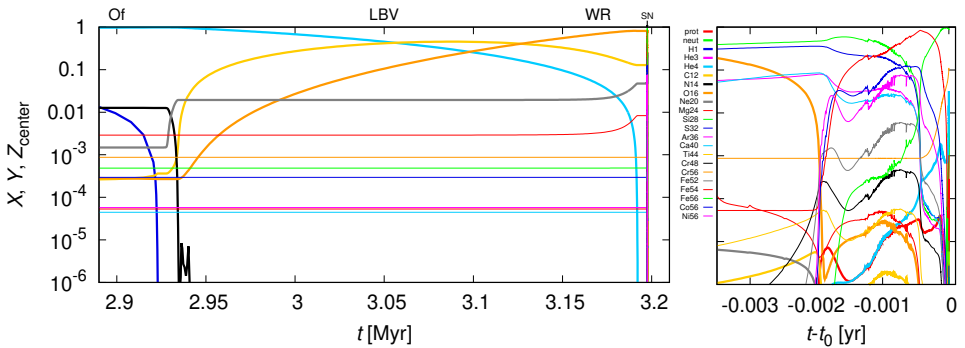


**Obr. 12** — HR diagram pro hvězdu s počáteční hmotností  $M = 85 M_{\odot}$ . Metalicita byla volena  $Z = 0,02$ , opacity dle Grevesse a Sauval (1998) pro látku obohacenou o C/O (tzv. typ 2), účinnost větru  $\eta = 0,8$  (dle Vink aj. 2001, Nugis a Lamers 2000), parametr konvekce  $\alpha = 1,5$  (dle Henyey aj. 1965), dále bylo použito Ledouxovo kritérium, parametr semikonvekce  $\alpha_{\text{semi}} = 0,01$ , termohalinní cirkulace  $\alpha_{\text{th}} = 2$  (Kippenhahn aj. 1980), přestřelování  $\alpha_{\text{ov}} = \alpha$ , s exponenciální poklesem popsáním  $f_0 = 0,0005$ ,  $f_{\text{ov}} = 0,001$ . Na grafu je zobrazen relativně malý rozsah zářivých výkonů. Hvězda nepostoupila ani do fáze RGB mimo jiné díky ztrátě hmoty způsobené větrem. Výpočet byl zastaven na začátku kolapsu, před explozí SN.

- [5] HOLWEGER, H., MÜLLER, E. A. *The photospheric barium spectrum - Solar abundance and collision broadening of BA II lines by hydrogen*. *Sol. Phys.*, **39**, 19–30, 1974.
- [6] IBEN, I. *Stellar evolution physics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. ISBN 97811070-16569.
- [7] KIPPENHAHN, R., RUSCHENPLATT, G., THOMAS, H.-C. *The time scale of thermohaline mixing in stars*. *Astron. Astrophys.*, **91**, 175, 1980.
- [8] LANGER, N., FRICKE, K. J., SUGIMOTO, D. *Semiconvective diffusion and energy transport*. *Astron. Astrophys.*, **126**, 207, 1983.
- [9] MAEDER, A. *Physics, formation and evolution of rotating stars*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. ISBN 9783540769484.
- [10] MIHALAS, D., MIHALAS, B. W. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford: Oxford Univ. Press, 1984. ISBN 0195034376.
- [11] MONTALBÁN, J. AJ. *Testing convective-core overshooting using period spacings of dipole models in red giants*. *Astrophys. J.*, **766**, 118, 2013.
- [12] NUGIS, T., LAMERS, H. *Mass-loss rates of Wolf-Rayet stars as a function of stellar parameters*. *Astron. Astrophys.*, **360**, 227, 2000.
- [13] PAXTON, B. AJ. *Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA)*. *Astrophys. J. Suppl. S.*, **192**, 3, 2011.
- [14] PAXTON, B. AJ. *Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA): Planets, oscillations, rotation, and massive stars*. *Astrophys. J. Suppl. S.*, **208**, 4, 2013.
- [15] PAXTON, B. AJ. *Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA): Binaries, pulsations, and explosions*. *Astrophys. J. Suppl. S.*, **220**, 15, 2015.

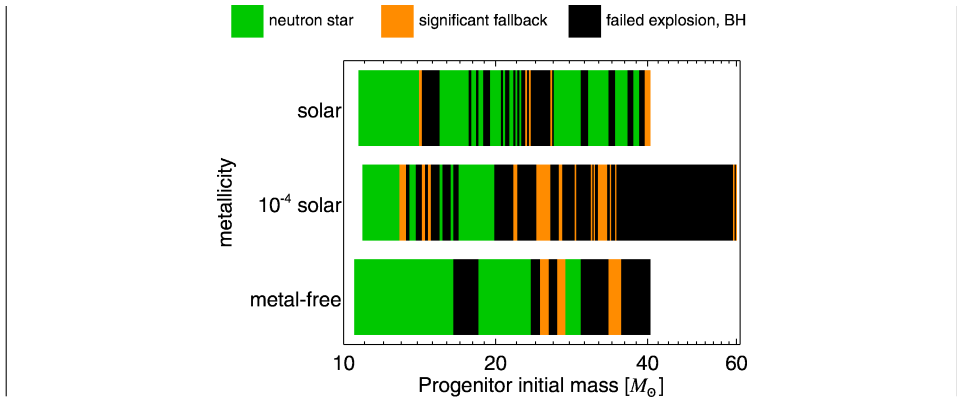


**Obr. 13** — Oddělený Kippenhahnův diagram (pro  $M = 85 M_{\odot}$ ), zachycující vývoj po MS. Nahoře jsou zobrazeny zóny promíchávání, s rozlišením konvekce (modře), přestřelování (zeleně) semikonvekce (žlutě) a termohalinní cirkulace (šedě). Dole je znázorněn měrný výkon  $\epsilon$  termojaderných reakcí s barevnou logaritmickou škálou. Na konci fáze Of, kdy hoří H ve slupce a He v centru, se v nitru nachází 25 zón promíchávání. Ve fázi LBV je zřetelná ztráta hmoty  $M(t)$  až na méně než  $40 M_{\odot}$ . Ve fázi WR se vodíková slupka odhalí na povrchu a záhy zanikne, neboť se spotřebuje prakticky všechen vodík. Slupek hoření těžších prvků je nakonec ve hvězdě vícero.



**Obr. 14** — Abundance v centru (pro  $M = 85 M_{\odot}$ ) a detail těsně před explozí SN, se škálou v rocích. Po přeměně He na C/O velmi rychle proběhne série reakcí, kdy zachycováním částic  $\alpha$  vzniknou jádra se sudým  $Z$  a  $N = Z$ , tj. zejména  $^{52}\text{Fe}$ ,  $^{56}\text{Ni}$ , který je ovšem záhy rozpadá dvakrát  $\beta^+$ . Při vzniku jádra  $^{56}\text{Fe}$  se vývoj odehrává na škále hodin; samotný kolaps poté na škále sekund.





**Obř. 15** — Konečná stadia hvězd různých počátečních hmotností  $M$  a metalicit  $Z$ . Pro jednorozměrné modely předchůdců byla použita jednoduchá parametrizace následné exploze,  $L_{\nu e}/L_{\text{crit}} = p[M/(0,4 M_{\odot} s^{-1})]^q$ , se zvolenými parametry  $p = 0,18$ ,  $q = 1,5$ , tak aby odpovídaly 2D nebo 3D modelům explozí. Zeleně jsou značeny neutronové hvězdy, černě černé díry, oranžově díry vznikající zpětným pádem. Převzato z Pejcha a Thompson (2015).

- [16] PEJCHA, O., THOMPSON, T. A. *The landscape of neutrino mechanism of core-collapse supernovae: Neutron star and black hole mass functions, explosion energies, and nickel yields.* *Astrophys. J.*, **801**, 90, 2015.
- [17] SUKHBOLD, T., WOOSLEY, S. E., HEGER, A. *High resolution study of presupernova core structure.* *Astrophys. J.*, accepted, 2018.
- [18] ULRICH, R. K. *Thermohaline convection in stellar interiors.* *Astrophys. J.*, **172**, 165, 1972.
- [19] VIALLET, M. A. J. *Turbulent convection in stellar interiors. III. Mean-field analysis and stratification effects.* *Astrophys. J.*, **769**, 1, 2013.
- [20] VINK, J. S., DE KOTER, A., LAMERS, H. *Mass-loss predictions for O and B stars as a function of metallicity.* *Astron. Astrophys.*, **396**, 574, 2001.