

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Jedná o jedinou rovnici stavby \* pro škálovaný gravitační potenciál  $\varphi$  a škálovanou souřadnici  $z$ , aby ji bylo možné používat pro \* nejrůznějších hmotností a poloměrů.

Neškálovaný gravitační potenciál zde zavedeme jako  $\nabla\Phi = \mathbf{a}_g$ , čili kladný a klesající s  $R \rightarrow \infty$ , takže jeho derivace je záporná:

$$\frac{d\Phi}{dR} = -\frac{GM_R}{R^2}, \quad (1)$$

kde  $M_R$  označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru  $R$ . L.–E. není nic jiného než derivace derivace:

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = -G \frac{dM_R}{dR} \frac{1}{R^2} + GM_R \frac{2}{R^3}.$$

První člen lze zjednodušit, protože hmotnost  $dM_R$  kulové slupky o tloušťce  $dR$ :

$$dM_R = 4\pi R^2 dR \rho.$$

Druhý člen je podezřele povědomý (viz ??). Odtud:

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = -4\pi G \rho - \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR}. \quad (2)$$

Problémem zůstává  $\rho(R)$  (neznámá funkce). Nelze mít jen 1 rovnici pro 2 funkce.

Naštěstí existuje vztah  $\rho(\Phi)$ ! Nejdříve ho zkusím uhádnout. Důvodem je (předpokládaná) zjednodušená stavová rovnice, neboli *polytropa*:

$$P = K \rho^\gamma. \quad (3)$$

Když je  $P$  tak jednoduchou funkcí (polynomem), i  $\nabla P$  je jednoduchý (polynom o 1 stupeň nižší než  $\gamma$ ). Zároveň tuším (měl bych tušit, jinak za 5), že „gravitace je v rovnováze s gradientem tlaku“, neboli:

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (4)$$

tj. polynom o 2 stupně nižší. Tento budu muset integrovat, tzn. opět o 1 stupeň nižší. Protože potřebuji vztah inverzní k  $\Phi(\rho)$ , je výsledný exponent  $\frac{1}{\gamma-1} \equiv n$ . Konečně škálování. Tím zmizí  $K$  aj. Odtud:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi^n = 0. \quad (5)$$

Pro jistotu pořádněji (jako v ??). Derivace ?? je:

$$\frac{dP}{dR} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dR},$$

a zároveň hydrostatická rovnováha:

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R\rho}{R^2} = \rho \frac{d\Phi}{dR},$$

odkud:

$$d\Phi = K\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho.$$

Určitý integrál  $\int_R^\infty$  je:

$$0 - \Phi = K\gamma \left( \frac{0}{\gamma-1} - \frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} \right),$$

tedy:

$$\rho = \left[ \frac{\Phi}{K\gamma}(\gamma-1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

nebo ekvivalentně ( $\gamma = \frac{1}{n} + 1 = \frac{n+1}{n}$ ):

$$\rho = \left[ \frac{\Phi}{K(n+1)} \right]^n,$$

c.b.d.

Uvědomme si, co to znamená. Za prvé je divné, že ve stavové rovnici ?? není teplota  $T$ , když každý ví, že tlak plynu  $P_g$  i tlak záření  $P_r$  na ní závisejí. Ona je skryta v exponentu, není tam totiž  $\rho^1$ , nýbrž  $\rho^\gamma$ ; obvyklé  $\gamma = \frac{4}{3}$ . Za druhé je divné, že bez  $T$  rovnice ?? vůbec nezávisí na zdrojích energie. Ostatně stavba \* byla pochopena dříve, než byly objeveny termonukleární reakce.

Myšlenkový experiment: co by se stalo, kdyby se ve  $\odot$  reakce zastavily? Nic! Alespoň krátkodobě ( $10^3$  r.) by  $\odot$  svítilo téměř stejně, protože profily  $\Phi$ ,  $\rho$ ,  $P$  (i  $T$ ) jsou určeny spíše hydrostatikou. Ochlazování (resp. přehřívání) je vzhledem k neprůhlednosti nepatrné ( $L/M \doteq 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} / 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 0,00019 \text{ W kg}^{-1}$ ).

[1] HARMANEC, P, BROŽ, M. *Stavba a vývoj hvězd*. Praha: Matfyzpress, 2011.