

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Padám-li zrovna do hmotného bodu, asi bych měl znát metriku g_{ik} . Ve velké vzdálenosti je časoprostor (téměř) plochý. I tak jsou složky g_{22} , g_{33} nejednoduché, neboť měřím ve *sférických* (křivočarých) souřadnicích:

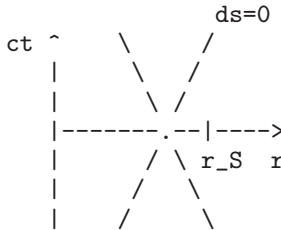
$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \vartheta)^2 \end{pmatrix}.$$

Je to obdobné, jako když se transformují sférické souřadnice na kartézské, $x = r \cos \vartheta \cos \varphi$, $y = r \cos \vartheta \sin \varphi$, $z = r \sin \vartheta$. Infinitesimální interval je jako vždy $(ds)^2 = g_{ik} x^i x^k$.

V malé vzdálenosti *není* časoprostor plochý. Jak se složky změní? Protože se jedná jen o bod, zůstanou kvůli symetrii úhlové stejné. Změnu lze očekávat jen u g_{00} , g_{11} . Změna by měla být značná, když se (klasické) energie $\frac{1}{2}mc^2 \simeq GMm/r_S$, tzn. pro poloměr:

$$r_S = \frac{2GM}{c^2},$$

kterým budu změnu poměřovat. Uvažme např.: $1 + \frac{r}{r_S}$, $1 - \frac{r}{r_S}$, $1 + \frac{r_S}{r}$, $1 - \frac{r_S}{r}$, $(1 - \frac{r_S}{r})^{-1}$ apod. Pro $r \rightarrow \infty$ musí jít k 1, proto „1“. Zároveň nesmí divergovat, takže musí být r ve jmenovateli. Otázka je, zda „+“, nebo „-“? Pro $r \rightarrow r_S$ se musí nějak měnit světelný kužel, jinak by neexistoval horizont a částice by z pod horizontu mohly odletět pryč (viz obr.)! Proto –.



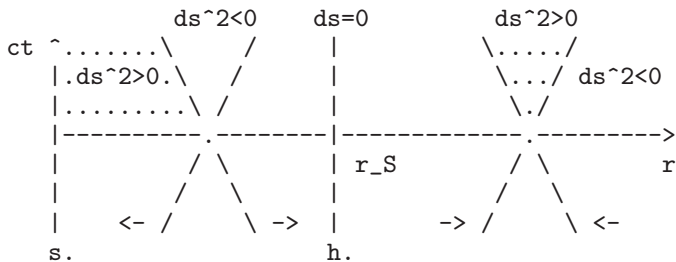
Související otázka je, zda „¹“, nebo „⁻¹“? Kdyby byly koeficienty u g_{00} a g_{11} totožné, kužel (ct vs. r) by se nijak neměnil.¹ Proto jednou ¹ a jednou ⁻¹. Na horizontu pak metrika diverguje; to se „nedá nic dělat“. (Říká se tomu souřadnicová singularita.)

Odtud:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \vartheta)^2 \end{pmatrix}.$$

Kdybychom si chtěli být jisti, dosadíme do Einsteinových rovnic ($R_{ik} = 0$; pro vakuum).

Co lze vidět? Jak se blížím horizontu, můj světelný kužel, resp. jeho *časupodobná* část $(ds)^2 > 0$, ve které jediné se mohou pohybovat, se zužuje. Na horizontu ($h.$) je nekonečně úzký. Pak se opět rozšiřuje, ale vzhledem ke změně znaménka g_{00} a g_{11} je část $(ds)^2 > 0$ orientovaná k $r \rightarrow 0$, tzn. pád do singularity ($s.$).



1. Jinými slovy: časoprostor by se buď nafukoval, nebo smršťoval, ale *nedeformoval*.