

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Nultý člen vlevo je jistě časová derivace magnetického pole, protože právě ta nás zajímá. Tu znám z Maxwellovy rovnice:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1)$$

ale bez znalosti elektrického pole  $\mathbf{E}$  neznám nic.

Chci proto dosadit z Ohmova zákona:

$$U = RI, \quad (2)$$

kde  $U$  označuje napětí,  $I$  proud,  $R$  odpor. To nepůjde. Musíme nahradit proměnné za intenzivní (tj. vztažené k 1 bodu):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \quad (3)$$

kde  $\mathbf{E}$  označuje zmiňované elektrické pole ( $\text{V m}^{-1}$ ),  $\mathbf{j}$  hustotu proudu ( $\text{A m}^{-2}$ ),  $\sigma$  vodivost. To nepůjde. Není tam rychlost  $\mathbf{v}$  plazmatu! Rychlost nábojů vystupuje mj. ve výrazu pro Lorentzovu sílu (též elektromotorickou):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

To nepůjde. Plazma je kvazineutrální,  $\bar{q} = 0$ . Plazma je však vodivé; náboje se v něm pohybují vzájemně. Museli bychom pak provést Lorentzovu transformaci pole elektrického, jež vytváří pole magnetické [1]. Nicméně bychom obdrželi obdobný výraz,  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ , a zobecnění (3) je proto:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (4)$$

Je-li v drátu proud, okolo drátu pole (viz Maxwell):

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (5)$$

kde  $\mu$  označuje permeabilitu. Nesmím se ovšem nechat zmást drátěnou smyčkou,  $\mathbf{B} \propto \nabla \times \mathbf{j}$ , kde nevzniká lineární pole ze stáječícího se proudu, nýbrž dvojnásobně zatočené. Pro plazma musí platit totéž, obzvláště když jsou v něm tak volně

pohyblivé náboje, které svými pohyby okamžitě kompenzují pole,  $\mathbf{E} = 0$ , čili můžeme předpokládat  $\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$ .

Než dosadím do (1), uvědomím si, že  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}$ , když  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , musí být  $-\nabla \cdot \nabla \mathbf{B}$  dle identity „bác mínus cáb“, neboli slovně: stáčení stáčení = stoupání rozbíhání – rozbíhání stoupání. Odtud:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (6)$$

Co vidíme bez toho, abychom rovnici řešili? Sama o sobě nám rovnice neřekne, jak se mění  $\mathbf{B}$ , protože neznáme  $\mathbf{v}$ , respektive jej zatím neznáme spolehlivě (ani v nitru Slunce). Pole se nicméně mění advekcí (1. člen) a difuzí (2. člen). Zatímco advekce může pole značně zesílit, zejména když se siločáry zavíjejí (při vhodném  $\mathbf{v}$ , např. při diferenciální rotaci), difuze obvykle způsobuje zeslabení, zejména když je v daném místě snižená vodivost  $\sigma$  (zvýšená rezistivita  $1/\sigma$ ; např. při erupcích).

Nesmím také nikdy zapomínat na meze platnosti rovnic! Jednu mez určuje Larmorův poloměr (též gyrační), po němž obíhají nabitě částice v magnetickém poli. Těžko může záviset na něčem jiném než na  $|\mathbf{B}|$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $|\mathbf{v}|$  částice (nikoliv plazmatu!) a těžko mohou být v čitateli a jmenovateli jinak než:

$$r_L = \frac{mv}{qB}. \quad (7)$$

Rovnice (6) platí na škálách  $L \gg r_L$ .

Druhou mezí je Debeyeova délka, neboli stínění náboje jinými náboji. V Maxwellově rovnici  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho$  by derivace mohla být nahrazena škálou ( $\nabla \sim 1/L$ ), ale jaká je typická velikost  $|\mathbf{E}|$ ? Mikroskopická pole jsou vytvářena tepelnými pohyby částic, jejichž kinetická energie  $kT$  a elektrická energie  $qU$  jsou si řádově rovny; vztah napětí  $U$  a pole  $E$  je  $E = U/L$  (jde přece o Volty na metr). Pak (po malém přeznačení):

$$l_D = \sqrt{\frac{\epsilon kT}{eq}}. \quad (8)$$

Rovnice (6) platí na škálách  $L \gg l_D$ .

[1] SEDLÁK, B., ŠTOLL, I. *Elektrina a magnetismus*. Praha: Academia, 1987.