

Občas se mi stane, že zapomenou nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Mějme nejjednodušší tenzor energie a hybnosti (pro prach, bez tlaku):

$$T^{ij} = \rho u^i u^j; \quad (1)$$

indexy jsou přirozeně horní, protože čtyřrychlosti  $u^i$  mají horní, při změně báze se chovají stejně jako souřadnice (kontravariantně). Mj.  $T^{00} = \rho c^2$  je hustota klidové energie (obdoba  $E = mc^2$ ),  $T^{11} = \rho (u^1)^2$  hustota složky  $x$  kinetické energie atd.

Mějme zákon zachování energie a hybnosti zapsán pomocí kovariantní derivace:<sup>1</sup>

$$T^{ij}_{;j} = 0; \quad (2)$$

index musí být sčítací (zřejmě to neplatí po složkách). Mějme i zákon zachování hmoty:

$$(\rho u^i)_{;i} = 0 \quad (3)$$

s totožným komentářem.

Když oba dva použijeme, pak:

$$(\rho u^i u^j)_{;j} = \overbrace{(\rho u^j)_{;j}}^{=0} u^i + \rho u^j u^i_{;j} = \rho u^j (u^i_{;j} + \Gamma^i_{kj} u^k) = 0,$$

kde  $\Gamma$  je afinní konexe; známe-li metrický tenzor  $g_{ik}$ , známe i  $\Gamma^i_{kj}$ . Búno zapomeneme  $\rho$  a vzpomeneme si na definici čtyřrychlosti  $u^i \equiv \partial x^i / \partial \tau$ , kde  $\tau$  označuje *vlastní čas*, měřený v soustavě pohybující se s částicí:

$$\rho \frac{\partial x^j}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial \tau} + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial \tau} \right) = 0.$$

Odtud:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^2} + \Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial \tau} \frac{\partial x^j}{\partial \tau} = 0, \quad (4)$$

což je pohybová rovnice pro volné částice (obdoba  $\mathbf{a} = 0$ ) v zakřiveném časoprostoru. Volně padají.

Známe-li metrický tenzor  $g_{ik}$  (Kerra), můžeme počítat pohyb okolo černé díry, gravitační čočkování, posun hvězd poblíž  $\odot$ , siluetu černé díry, Lenseův–Thirringův jev, Penroseův jev apod.

---

1. notace parciální  $f_{,i} \equiv \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ; kovariantní  $f^i_{;j} = f^i_{,j} + \Gamma^i_{kj} f^k$