

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Základní otázka. Co je neznámou? Metrický tenzor. Nejjednodušší by byl:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

tj. pro kartézské souřadnice a pro plochý časoprostor¹. Metrika určuje infinitezimální interval ds mezi dvěma událostmi:

$$(ds)^2 = g_{ik} dx^i dx^k = c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (2)$$

Proč „-“? Kdyby „+“, bylo by $ds = 0$ pouze pro zároveň současně a soumístné události. Zde požadujeme $ds = 0$, když jsou události *ovlivnitelné* (světelným paprskem). Čili „-“.²

Ve skutečnosti je neznámý:

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

kde \mathbf{e}_i jsou vektory báze. Složky jsou obecně nenulové ze dvou důvodů: (i) křivočaré souřadnice; (ii) křivý časoprostor. Mění se místo od místa (čas od času).³ Vzhledem k (2) zde nicméně musí být symetrie vůči záměně $i \leftrightarrow k$, tzn. $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ nezávislých složek. Jednotka $[g_{ik} x^i x^k] = m^2$, ale nelze obecně říci, jaká je $[g_{ik}]$, $[x^i]$, $[x^k]$.

Inverzní matice odpovídá duální bázi:

$$g^{ik} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = (g_{ik})^{-1}, \quad (4)$$

neboli $g_{il} g^{lk} = \delta_i^k$ (tj. Kroneckerovo delta; jednotková matice). Operace maticového násobení s metrikou umožňuje zvyšování a snižování indexů.

-
1. sice se užívá i „prostorčas“, ale kdo o něm přemýšlí jako o čase?
 2. Příklad: 1. událost vyslání signálu ze Země ($t_1 = 0$, $x_1 = 0$) a 2. událost příjem signálu na Apollu 10 ($t_2 = 1$ s, $x_2 = 299\,792\,458$ m) jsou ovlivnitelné, neboť $ds = 0$. Cernan může hned přemýšlet, zda přece jen nepřistát...
 3. Představuji si přitom ruku a tři prsty ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), jak se soustavně posouvají a sklápějí.

Pro zapsání kýžených rovnic jsou potřeba parciální derivace (ostatně jako u všech fyzikálních zákonů), které je nutné přepsat na *kovariantní* derivace, aby se zohlednily změny báze při posunu o dx , dy atd. Pro skalár není co řešit:⁴

$$f_{;i} = f_{,i} , \quad (5)$$

neboť na bázi nezávisí. Pro vektor:

$$f^i_{;j} = f^i_{,j} + f^k \Gamma^i_{kj} , \quad (6)$$

kde jsme použili Γ se 3 indexy, neboť 2 jsou původní a 1 sčítací (relativní změna složky i při derivování dle j , k níž přispívají všechna k). Musí se pochopitelně násobit původními složkami f^k . Pro tenzor (obdobně jako pro diádu $a^i b^j$):

$$f^{ij}_{;k} = f^{ij}_{,k} + f^{lj} \Gamma^i_{lk} + f^{il} \Gamma^j_{lk} . \quad (7)$$

Kdyby nebyly složky ij kontravariantní (nahore), ale $_{ij}$ kovariantní (dole), bylo by – před Γ (a sčítací index by musel být horní).

Speciálně pro metrický tenzor platí, že se sice mění místo od místa, ale když tyto změny kompenzujeme Γ , tak se nemění:

$$0 = g_{ij,k} - g_{lj} \Gamma^l_{ik} - g_{il} \Gamma^l_{jk} ,$$

odkud lze vyjádřit Γ . Nazývá se afinní konexe (též Christoffelův symbol):

$$\Gamma^i_{kj} = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,j} + g_{mj,k} - g_{kj,m}) . \quad (8)$$

Není divu, že závisí na 1. derivacích a inverzi. Indexy: horní je jen jeden, druhý musí být sčítací, derivování dle původních nebo sčítacího (s $-$), zbytek doplním.

Zásadní otázka. Jak měřit křivost? Zvolím symetrickou dvojici, např. (dx, dy) , (dy, dx) , čili infinitezimální „čtvereček“. Provedu přenos (libovolného) vektoru f_i podle dx a pak podle dy , tzn. 2. derivaci. Totéž obráceně. Rozdíl je:

$$f_{i;jk} - f_{i;kj} \equiv R^l_{ijk} f_l . \quad (9)$$

Když je čtvereček křivý, nedostanu 0. Relativní rozdíly pro nejružnější dvojice si poznamenám do matice. Nazývá se Riemannův tenzor 4. řádu. Jde o nejpodrobnější popis křivosti, neboť je to $16 \cdot 16 = 256$ složek, i když samozřejmě je zde značná symetrie. Odtud plyne:

$$R^l_{ijk} = \Gamma^l_{ik,j} - \Gamma^l_{ij,k} + \Gamma^l_{mj} \Gamma^m_{ik} - \Gamma^l_{mk} \Gamma^m_{ij} , \quad (10)$$

4. notace $f_{,i} \equiv \partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x^i}$

kde je jednak derivování Γ a jednak násobení $\Gamma\Gamma$, protože jsme použili (6) dvakrát. Indexy: horní je jen jeden, druhý sčítací, dolní dle derivování, poslední sčítací; indexy se nezjevují (cf. strašidla).

Provedeme-li 1. úžení, tj. součet přes opakující se index (nejde o kvadrát), obdržíme křivosti pro dvojice souřadnic:

$$R_{ik} = R^l{}_{ilk}, \quad (11)$$

čili Ricciho tenzor 2. řádu.

Provedeme-li 2. úžení, resp. zvýšení indexu, obdržíme skalární křivost:

$$R = g^{ik} R_{ik} = R^k{}_k, \quad (12)$$

čili Ricciho skalár.

Proč to děláme? Naším cílem je co nejjednodušší tenzorová rovnice 2. řádu. V ní vystupují t. 2. ř., což jsou v našem případě: R_{ik} , Rg_{ik} , g_{ik} . Že by:

$$R_{ik} = 0?$$

Taková rovnice vskutku platí, avšak pro vakuum. (Pak je i $R = 0$.) Není neúčinná, popisuje např. gravitační vlny (přicházející odjinud).

Máme-li však nenulový tenzor energie a hybnosti T_{ik} , o němž předpokládáme, že souvisí s křivostí, musíme rovnici rozšířit, použít všechny tři a koeficienty volit tak, aby to vyšlo (viz Newton):

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}. \quad (13)$$

Jednotky: řekněme, že $[g_{ik}] = 1$, pak $[\Gamma^l{}_{ik}] = \text{m}^{-1}$, $[R] = [R_{ik}] = [R^l{}_{ijk}] = \text{m}^{-2}$, $[T_{ik}] = \text{J m}^{-3} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$, jistě tam bude gravitační konstanta (v 1. mocnině), $[G] = \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$ (viz Kepler), součin je $[GT_{ik}] = \text{m}^2 \text{s}^{-4}$, proto faktor c^{-4} . Číslo 8π je připomínkou Poissona (r.i.p.).

Jedná se o soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu, nelineárních, pro složky metrického tenzoru g_{ik} . První člen interpretujeme jako celkovou křivost, druhý člen jako křivost způsobovanou křivočarými souřadnicemi. Proto „–“. Rozdíl (nerovnováha) odpovídá křivosti způsobované křivým časoprostorem. Tato je v rovnováze se čtvrtým členem (T_{ik}), neboli „hmotou“ (ϱ, p, v, \dots). Dodatečný třetí člen (Λ) interpretujeme jako kosmologickou konstantu, nebo jako temnou energii (po začlenění do T_{ik} jako $-c^4/(8\pi G)\Lambda g_{ik}$). Je nutno ji změřit.

[1] KULHÁNEK, P. *Obecná relativita*. [online] [cit. 2018-01-26].

<http://www.aldebaran.cz/studium/otr.pdf>.

[2] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.