

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Pro pochopení rovnic uvedených níže je asi dobré znát Gaussovu větu:

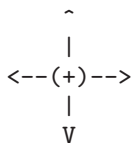
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \oint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1)$$

kde \mathbf{f} označuje vektorové pole, ∇ operátor „nabla“¹, V objem, S plochu (hranici objemu). Rozbíhavost ($\nabla \cdot$) odpovídá výtoku. Stejně tak Stokesovu větu:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{f} d\mathbf{S} = \oint_s \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2)$$

kde s je křivka (hranice plochy). Stáčení ($\nabla \times$) odpovídá 1 otočce.

Jde o souvislost elektřiny, magnetismu, nábojů a proudů. Především je třeba volit vhodné veličiny, které jsou intenzivní (vztahované k 1 bodu), aby byly rovnice zapsány jako diferenciální. V úvahu přicházejí zejména elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ a objemová hustota náboje $\rho = q/V$ namísto náboje q . Jaký by mohl být vztah mezi \mathbf{E} a ρ ? Především, jde o vektor a o skalár, čili vůbec nepřicházejí v úvahu $\mathbf{E} \propto \rho$, $\nabla \mathbf{E} \propto \rho$, $\nabla \cdot \nabla \mathbf{E} \propto \rho$, $\partial \mathbf{E} / \partial t \propto \rho$, $\mathbf{E} \propto \nabla \times \rho$ apod. Snad $\mathbf{E} \propto \nabla \rho$? Ne, tj. potenciál. Nebo $\nabla \cdot \mathbf{E} \propto \rho$? To by bylo v souladu s obrázkem náboje (+), z něhož se rozbíhají siločáry, a (1):



První rovnice pak musí být:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho, \quad (3)$$

kde ε je konstanta úměrnosti. Jmenuje se permitivita (pronikavost); je ve jmenovateli, protože se tak jmenuje: když je veliká, pole zasahuje daleko a v daném místě je rozbíhavost menší.

Druhá rovnice říká, že kdybychom hledali magnetické náboje, kde nic tu nic:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

kde \mathbf{B} označuje magnetické pole.

1. $\nabla \equiv (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

Zatím se \mathbf{E} , \mathbf{B} jeví zcela nezávislé, ale jedná se přece o *elektromagnetické* „dvoupole“. Vzhledem k tomu, že obojí jsou vektory, možností je vícero: $\mathbf{B} \propto \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \propto \nabla \nabla \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{B} \propto \nabla \times \mathbf{E}$, $\partial \mathbf{B} / \partial t \propto \nabla \times \mathbf{E}$, $\partial^2 \mathbf{B} / \partial t^2 \propto \nabla \times \mathbf{E}$, ... Jistě pole nebudou totožná. Jistě tam bude časová derivace. 1. nebo 2.? 2. lze převést na 1. Zároveň si vzpomínám, že je podezřele často $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$. Třetí rovnice proto říká, že se magnetické pole tvoří, když se elektrické pole stáčí, a to ve směru kolmém. Tvoření je časová derivace, stáčení je operace rotace, kolmost zajišťuje vektorový součin:

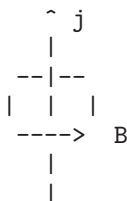
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (5)$$

kde konstanta úměrnosti je 1, neboť jsou tak zavedeny jednotky SI (viz níže); znaménko minus je konvencí.

Zřejmě to musí platit i opačně! Čtvrtá rovnice tedy říká opak, $\partial \mathbf{E} / \partial t \propto \nabla \times \mathbf{B}$, bez opačného znaménka (viz antisymetrii \times).² Kvůli jednotkám zde musejí být nejednotkové konstanty; užijeme jednak výše uvedené $1/\varepsilon$ a jednak $1/\mu$, kde μ je permeabilita (prostupnost), neboť dovoluje „prostoupení“ ze světa magnetického do elektrického. Zároveň nesmíme zapomenout na zmiňované *proudy*, tečou-li náboje (+) ve směru pole \mathbf{E} (od + k –), jde o ztrátu \mathbf{E} ; nikoliv zdroj \mathbf{B} ! Odtud:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{j}, \quad (6)$$

kde \mathbf{j} označuje proudovou hustotu. Mimochodem, ve stacionárním případě (když $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$) by vyšlo $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}$, tzn. okolo drátu by bylo pole podle Ampérova pravidla pravé ruky:



Jednotky se zdají nezapamatovatelné. Nicméně, zapamatujeme-li si alespoň některé, z rovnic (3) až (6) zjistíme zbývající, „aby to vyšlo“: $[\nabla] = [\nabla \cdot] = [\nabla \times] = \frac{1}{\text{m}}$, $[E] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$, $[\varrho] = \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, $[\varepsilon] = \frac{\text{C}}{\text{V m}}$; dále $[B] = \text{T}$, $[j] = \frac{\text{C}}{\text{s m}^2}$, $[\mu] = \frac{\text{T m s}}{\text{C}}$. Mj. z (5) vidíme souvislost mezi Teslou a Voltou: $\frac{\text{T}}{\text{s}} = \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$.

Přímým důsledkem (5) a (6) pro případ vakua ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) je:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E},$$

2. Kdybychom použili ++ nebo --, neobdrželi bychom vlnovou rovnici; byla by tma!

neboli:

$$\mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\nabla(\overbrace{\nabla \cdot \mathbf{E}}^{=0}) + (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{E},$$

odkud:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \nabla^2 \mathbf{E},$$

což je *vlnová rovnice*. Má totiž řešení v podobě nekonečné rovinné vlny, např. pro směr x :

$$f = A e^{i(kx + \omega t)};$$

po dosazení:

$$-\omega^2 f = -\frac{1}{\mu\varepsilon} k^2 f$$

dá:

$$|\omega| = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} |k|,$$

což je *disperzní relace* mezi úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$ a vlnovým číslem $k = 2\pi/\lambda$; faktor $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ je rychlost, shodou okolností světla. Totéž platí pro \mathbf{B} . Je základní vlastností vln ω nebo k ? Začneme-li zběsile kmitat (ω), začnou se šířit vlny skrz prostředí (c), což teprve určí jejich vlnovou délku (k). Čili ω .

$$\begin{array}{c} \text{2}\pi\text{i}/\text{k} \\ \text{-----} \\ \text{ } \end{array}$$

Bez toho, abychom rovnice řešili, si představme, co se v rovnicích děje: (i) zpočátku je $\mathbf{E} = 0$; (ii) přijdu sem s nábojem ρ ; (iii) zároveň s ním přijde \mathbf{E} ((3)); (iv) začnu s ním kmitat sem–tam, což je proud \mathbf{j} ; (v) zpočátku je $\mathbf{B} = 0$; (vi) nerovnováha mezi \mathbf{j} a \mathbf{B} tvoří nestacionární \mathbf{E} ((6)); (vii) jinde je stále $\mathbf{E} = 0$; (viii) tato změna \mathbf{E} v prostoru tvoří nestacionární \mathbf{B} ((5)); (ix) \mathbf{B} se mění monotónně, dokud \mathbf{j} nepřekmitne. Přestanu-li kmitat a ponechám-li ustálené ρ a \mathbf{j} , vlny odejdou a zůstane ustálené \mathbf{E} a \mathbf{B} .