

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Jedná se základní rovnici pro popis gravitačního potenciálu ($\Delta U = 0$; v prázdném prostoru), elektrického potenciálu ($\Delta \varphi = 0$) nebo teplotní rovnováhy ($\Delta T = 0$; v pevné látce). Laplace skoro nelze zapomenout, neboť se zdá triviální:

$$\Delta f = 0, \quad (1)$$

kde operátor $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$. [tečka za větou]

Pro sféricky symetrickou funkci $f(r) = \frac{1}{r}$ by vedl na:

$$\nabla f = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x, \dots, \dots \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

a tedy na:

$$\nabla \cdot \nabla f = -\nabla \cdot \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) = -\frac{1}{r^3} + x \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} 2x - \dots = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.$$

Aha. Laplace je 0, když vektorové pole (po ∇) ubývá jako $\frac{1}{r^2}$, tzn. nepřímo úměrně povrchu koule r^2 .

Zřejmě ale bude existovat vícero řešení! Jiná úměra, např. $\frac{1}{r^3}$, by sice vedla k $\Delta_r \neq 0$, avšak to může být kompenzováno vhodnou závislostí úhlových souřadnic $\Delta_{\vartheta, \varphi}$. Proto napíšu gradient ∇ ve sférických, s vědomím, že když se derivuje, resp. dělí úhlem, musí se dělit i r , resp. $r \sin \vartheta$ (viz j.):

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_{\vartheta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2)$$

Laplace je ovšem složitější, neboť divergence $\nabla \cdot$ působí i na *bázové vektory*, které jsou nekonstantní.¹ Proto:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3)$$

Jak asi vypadá obecné řešení $\Delta U = 0$? Obvyklý postup je (úplná) separace proměnných:

$$U(r, \vartheta, \varphi) = f(r)g(\vartheta)h(\varphi). \quad (4)$$

1. Konkrétně sférické $\mathbf{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, $\mathbf{e}_{\vartheta} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$, $\mathbf{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ a jejich derivace $\partial_{\vartheta} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_{\vartheta}$, $\partial_{\varphi} \mathbf{e}_r = \sin \vartheta \mathbf{e}_{\varphi}$, $\partial_{\vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} = -\mathbf{e}_r$, $\partial_{\varphi} \mathbf{e}_{\vartheta} = \cos \vartheta \mathbf{e}_{\varphi}$, $\partial_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$.

Už s ohledem na 1. příklad se nedivím, že řešením pro radiální část f je polynom $\sim r^{-\ell}$. Z (3) (po $\cdot r^2$) ostatně plyne, že po $\partial_r f$ ubyde r , tj. právě vlastnost polynomu. Pouze provedu normalizaci R (tj. poloměrem něčeho; např. R_{\oplus}). Úhlová část pro φ je tak jednoduchá, že řešení musí být jednoduché „jako kyvadlo“, neboli harmonická funkce $e^{i m \varphi}$. Úhlová část pro ϑ je tak složitá (viz $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$, $\sin^2 \vartheta$), že řešením je „kombinace“, čili polynomy harmonické funkce. Nazývají se *Legenderovy* přidružené polynomy $P_{\ell m}$; nelze je asi snadno „uhádnout“, nicméně vzhledem k logické substituci $x = \cos \vartheta$ se nedivím členům x , $\sqrt{1-x^2}$, $1-x^2$ apod. Nakonec doplním koeficienty $U_{\ell m}$ (tzn. každý jiný, komplexní, normovaný hmotným bodem $-GM/r$):

$$U = -\frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} U_{\ell m} \left(\frac{R}{r} \right)^{\ell} P_{\ell m}(\cos \vartheta) e^{i m \varphi} \right]. \quad (5)$$

Jejich hodnoty vyplývají z okrajových podmínek, resp. se musejí určit měřením.

Abychom tomu uvěřili, dosadím:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right) g h + f \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \right) h + f g \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = 0$$

a $\cdot r^2$, $\div f g h$:

$$\overbrace{\frac{1}{f} r^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} \right)}^F + \overbrace{\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{h} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}}^{-F} = 0.$$

Části radiální jsem přisoudil hodnotu $F = \text{konst.}$ a úhlové $-F$, aby to vyšlo 0. Pro část radiální tedy platí separátně:

$$r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial f}{\partial r} = F f. \quad (6)$$

Dosadím-li polynom $C r^{-\ell-1}$ (vylučuji r^0):

$$r^2 C(-\ell-1)(-\ell-2)r^{-\ell-3} + 2r C(-\ell-1)r^{-\ell-2} = F C r^{-\ell-1},$$

získám nutnou podmínku pro F :

$$\ell(\ell+1) = F. \quad (7)$$

Pro část úhlovou ($\cdot \sin^2 \vartheta$):

$$\frac{1}{g} \sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \right) + \overbrace{\frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}}^{-H} = -F \sin^2 \vartheta$$

užijí opět obdobný trik s H a $-H$. Část pro φ separátně splňuje:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} = -Hh, \quad (8)$$

odkud:

$$h = C e^{i\sqrt{H}\varphi}; \quad (9)$$

je pak logické označit:

$$m \equiv \sqrt{H}. \quad (10)$$

Zbývající část pro ϑ :

$$\frac{1}{g} \sin^2 \vartheta \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \right) + F \sin^2 \vartheta = H, \quad (11)$$

kde substituce $x = \cos \vartheta$, $\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -\sin \vartheta \frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} = \sin^2 \vartheta \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \cos \vartheta \frac{\partial g}{\partial x}$ dá:

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial g}{\partial x} + \left(F - \frac{H}{1 - x^2} \right) g = 0. \quad (12)$$

Dosadím-li např. polynom 2. stupně: $g = ax^2 + bx + c$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2ax + b$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2a$, pak:

$$(1 - x^2)2a - 2x(2ax + b) + F(ax^2 + bx + c) - H \frac{ax^2 + bx + c}{1 - x^2} = 0.$$

Jde o rovnost koeficientů u x^4 , x^3 , atd. Specificky pro $F = 6$, $H = 0$ (tzn. $\ell = 2$, $m = 0$) by bylo $(-2a - 4a + 6a)x^2 + (-2b + 6b)x + (2a + 6c) = 0$, čili $b = 0$, $a = -3c$; normalizaci lze volit, standardně $g = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, což ozn. P_{20} .