

Občas se mi stane, že zapomenu nějakou důležitou rovnici: Maxwell, Planck, Einstein, Hamilton, Schrödinger, ... Co teď? Zkusím si vzpomenout!

Jedná se rovnici popisující ionizaci, resp. *rekombinaci*, vysvětlující vznik spektrálních čar \*. Především je třeba si uvědomit, jaké veličiny přicházejí vůbec v úvahu. Jistě ionizační energie  $E_i$ ; pro vodík  $13,6 \text{ eV}^1$ . Dále termodynamická teplota  $T$  a Boltzmannova konstanta  $k$  (jsou vždy spolu, protože  $kT$  je energie). Co dalšího? Možná Planckova konstanta  $h$ , elementární náboj  $e$  (ne, už je zahrnut v  $E_i$ ), hmotnost elektronu  $m_e$ , rychlost světla  $c$  (ne,  $m_e c^2$  je moc; není to tvoření  $e^-$ ). Nesmím ovšem zapomenout na koncentraci  $n$ ! Kdyby  $n \rightarrow 0$ , nikde nic (ani i., ani r.). A samozřejmě stupeň ionizace  $X \equiv \frac{n_e}{n}$ ; uvažíme jen 2 stavy:  $X = 0$  neutrální,  $X = 1$  úplně ionizovaný. Kromě číselného faktoru ( $10^0$ ) tam horko-těžko může být něco jiného...

Ve statistické fyzice se ukazuje, že se v rovnováze realizuje nejpravděpodobnější rozdělení, obvykle obsahující exponenciály. V našem případě jde o  $e^{-\frac{E_i}{kT}}$ , neboť pro  $T \rightarrow 0$ , jde  $e \dots \rightarrow 0$  a  $X \rightarrow 0$ , jak má. Naopak pro  $T \rightarrow \infty$ ,  $e \dots \rightarrow 1$ ,  $X \rightarrow 1$ . Že by tedy  $X = e^{-\frac{E_i}{kT}}$ ? Nikoliv! Exponenciála sama nikdy není pravděpodobnost.

Na levé straně musí být *poměr* stavů  $\frac{X}{1-X}$ . Pro  $X \rightarrow 1$  (úplnou ionizaci) však diverguje, tzn. že v čitateli musí být něco divergujícího ( $T$ ). Otázka pak je, v jaké mocnině? Alternativně ve jmenovateli něco jdoucího k nule ( $n$ ). Než se provede jednotková (těž rozměrová) analýza, sepíšu si jednotky:  $[kT] = \text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ ,  $[n] = \text{m}^{-3}$ ,  $[h] = \text{J s}$ ,  $[hc] = \text{J m}$ ,  $[mc^2] = \text{J}$ .

Začnu koncentrací. Ne, začnu chemickou reakcí:



podle které mohou vidět, že ionizace  $\propto n$ , rekombinace  $\propto n_p n_e = n_e^2$  (spec. pro dvouhladinový vodík). Tj. zcela zásadní! Ionizace je zde zářivá (předpokládáme, že záření je vždy v rovnováze s látkou; viz Planck), je tedy úměrná přímo. Rekombinace závisí na kvadrátu, protože se musejí potkat dvě částice. Máme-li vlevo (bezrozměrný)  $\frac{X}{1-X}$ , musíme mít vpravo  $\frac{n}{n_e^2}$ . Rozměrově to odpovídá  $[n^{-1}] = \text{m}^3$ . Původně jsem uvažoval, že je pokrátím výrazem  $(kT/hc)^3$ , ale nechci nelogické  $c$ . Krom toho si matně pamatuji mocninu  $^{3/2}$ , proto postupuji takto:

$$\begin{aligned} [(kT)^{3/2} n^{-1}] &= \text{kg}^{3/2} \text{m}^6 \text{s}^{-3}, \\ [(m_e kT)^{3/2} n^{-1}] &= \text{kg}^3 \text{m}^6 \text{s}^{-3}, \\ [(m_e kT)^{3/2} n^{-1} h^{-3}] &= 1. \end{aligned}$$

---

1.  $1 \text{ eV} = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (přesně; viz SI 2019)

Nakonec doplním faktor  $2\pi$  (viz de Broglie):

$$\frac{X}{1-X} = \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \frac{n}{n_e^2} e^{-\frac{E_i}{kT}}. \quad (2)$$

Kdo chce, převede všechna  $n$  vlevo a upraví na  $\frac{X^2}{1-X} n_e$  (tzn. kvadratickou rovnici), ale ať to nedělá, protože pak není dobře vidět role koncentrací!