

používat takoveto gramatické obludy nebo si pro ně mám vymýšlet vlastní názvy, a tím zvětšovat i tak již obrovský počet názvů? Někomu mohou nahánět hrůzu mnohoslabičné řecké latinské nebo kombinované názvy jako „ p -krát kovariantní a q -krát kontravariantní souřadnice tenzoru $p + q$ -tého řádu“. Leckterá vznešená společnost by ti spíše odpustila mnohé sprosté slovo než abys používal výrazy jako „algoritmus“, „determinant“ nebo „asociativnost“, zejména v přítomnosti humanistů.

Monstra. Nejen názvy, leč i matematické objekty samé, nevoli u různých fajnovek vzbuditi mohou. Jsou to zejména monstra, objekty, které neslouží k řešení praktických úloh, které však pouze blamují předchůdce a varují začátečníky, že by se mohli octnout na silně nakloněné rovině, kdyby se snad třeba jen v myšlenkách odvážili vyhnout krkolomnému teoretickému úvodu moderně pojatého výkladu některé třeba i staré disciplíny. Patří sem funkce spojité, postrádající derivaci v každém bodě. Dále je to funkce potrhleho tanečníka (function of dizzy dancer). Konec konců, je to věc vkusu. Jeden čtenář či posluchač by raději poslal autora či přednášejícího někam, zatímco v tom jiný najde zalíbení: Möbiův pruh, Kleinova láhev. A nejen zalíbení. Vždyť by zde mohl vzniknout námět pro detektivku „Smrt v Kleinově lahvi“ nebo pro esej „Etika na Möbiově pruhu“.

Past. Matematika je nebezpečnou pastí na majitele výborné paměti, ochuzené sudičkami o objevitelskou zvědavost a o touhu hledat souvislosti. A tak, co může být s počátku výhodou, se později vymstí, když se věty a formule, množíce se mezi sebou, začnou na studenta hrnout jako vodopád nebo lavina. Oč lépe je na tom lenoch, který sám přijde na to, že je zbytečné pamatovat si vzorce pro plochu lichoběžníka, když jej může přefíknout úhlopříčkou a rozložit na dva trojúhelníky, se kterými si už poradí. Dokonce to jde dvěma způsoby. Také by mohl vynásobit střední příčku výškou. Důležité je že musí vždy dostat totéž, byť třeba i jinak napsané.

Neúprosná. Mnohému je na matematice protivné, že je neúprosná, že se tam nedá nic okecat jako na příklad ve filozofii, politice nebo v poetice. Žádné „Co chtěl básník říci“! Leckterý takový se pojednou cítí jako boxer, který by místo proti živému soupeři měl boxovat holýma rukama proti betonovému sloupu. To přece není žádná legrace! Dána-li axiomatická soustava spolu s odvozovacími pravidly, je zbytečno hlasovat o platnosti nějaké domněnky. Jediné důkaz platí.⁴

⁴ Chtěl jsem si po sobě přečíst, co jsem včera naškrábal. Kus papíru s textem sežrala myš. Tak vida. Už i myším vadí, co píše. A já kdo to v noci tak vztekle chroustal. Nejvic jí vadila poznámka, že mám doporučit knihu Daniela Golemana o emoční inteligenci a otevřít český překlad na straně 83.

Kosmologický princip

*

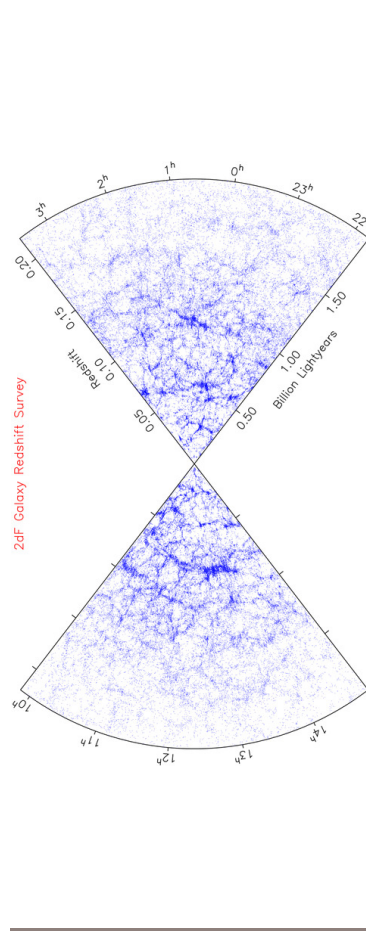
Základním východiskem pro náš nejjednodušší model vesmíru je pozorování, že na velkých měřítkách je vesmír *izotropní*. Ve všech směrech vidíme například téměř stejné množství galaxií (viz obr. 1) nebo kosmické mikrovlnné pozadí má na směru téměř nezávislou intenzitu.

Tato pozorovaná izotropie a *kopernikovský princip*, to jest víra, že nejsme na ni jak významném místě vesmíru, znamenají, že vesmír je *homogenní* (všude stejný).

Na druhou stranu musíme zmínit *Keplerův–Olbersův paradox*. Pokud by vesmír byl nekonečný a zároveň věčný, hvězdy v něm rozmístěné s koncentrací n a se zářivým výkonu L , by produkovaly celkově

$$\int_0^{\infty} \frac{L}{4\pi r^2} n 4\pi r^2 dr = Ln \int_0^{\infty} dr = \infty, \quad (1)$$

ale v noci je tma. Znamená to tedy, že vesmír měl nějaký počátek a *není statický*.



Obr. 1 — Velkoškálová struktura vesmíru pozorovaná přehlídkou 2dF.

Einsteinovy rovnice pole

*

Abychom vystihli všechny podstatné vlastnosti vesmíru, musíme pracovat se zakřiveným čtyřrozměrným časoprostorem, Jde vlastně o zobecnění obvyklého třírozměrného Euklidova prostoru, v němž vzdálenosti mezi body měříme jednoduše

pomocí Pythagorovy věty $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$. Infinitesimální vzdálenost mezi událostmi („body“) v časoprostoru je popisována obdobně metrickým tenzorem g_{ik} :

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{00}(dx^0)^2 + g_{01} dx^0 dx^1 + \dots,$$

přičemž přes opakující se indexy i a $k = 0 \dots 3$ podle sumačního pravidla počítáme. Časoprostor je totiž varieta, čili je lokálně plochý, obdobně jako povrch Země-koule viděný zblízka. Pro plochý (Minkowského) časoprostor by matice g_{ik} byla jednoduchá:

$$g_{ik} \equiv \eta_{ik} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ale v obecném případě je $g_{ik}(t, x, y, z)$ zde jiné než $g_{ik}(t', x', y', z')$ jinde. — potřebovali bychom zjistit $4 \times 4 = 16$ funkcí času a souřadnic (respektive jen 10, kvůli symetrii $g_{ik} = g_{ki}$).

Právě k tomu slouží Einsteinovy rovnice (EFE), které popisují vztah mezi křivostí časoprostoru (metrikou g_{ik}) a „obsahem“ vesmíru (tenzorem energie a hybnosti T_{ik}), který je zdrojem gravitace:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (2)$$

Přestože tyto rovnice vypadají „hroznivě“, hned v následující kapitole je velmi zjednodušíme, protože náš vesmír je přece homogenní a izotropní (v g_{ik} nejsou funkce prostorových souřadnic ani význačné směry).

Riccioho tenzor R_{ik} a Ricciho skálár R jsou první a druhé parciální derivace metriky podle souřadnic:

$$R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{ik} = R^l_{ik},$$

přičemž Riemannův tenzor:

$$R^i_{kln} = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial x^l \partial x^n} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{nl}}{\partial x^k \partial x^m} + \Gamma^i_{nl} \Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm} \Gamma^n_{kl}$$

a Christoffelovy symboly:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right).$$

Botvinnik. Všechno konečně napadne, že ani v šachovém klubu by nebyl vítán věřelec, který by chtěl vykládat o teorii grafů jakožto základů pro programování této hry, zejména knihovny zabíjení a koncovek. Ledaže by to byl Botvinnik. Ale ten by musel kvůli tomu vstát z hrobu.

Vzorná žákyně. Učitel peskuje svou nejlepší žákyni A. V.: „No to je nadělení! Já vždycky říkám ženě: ‚Podívej se, co vyšlo žákyni A. V. a oprav podle toho ostatní úlohy.‘ A Ty se spleteš a teď je u těch druhých skoro všechno červeně přeškrтанé, i ty správné výsledky, ovšem s výjimkou Tvé práce a prací těch, co to od Tebe opsali!“

Lupiči. Katka se chtěla vyučit kadernicí. Jaké však bylo její překvapení, když zjistila, že pro přijetí do odborného učiliště ji očekává přijímací zkouška z češtiny a z matematiky, ve které na základní škole nijak nevynikala. Není příliš nezdravě říle přirovnávat češtináře a matematiky v této pozici k lupičům, přepadajícím poutníky na cestách k vyšším vzdělkům? Ale proč se poutníci rozhodují pro pouť k vyšším vzdělkům a ne pro pouť k vyšší moudrosti?

Kuchař a vektory. „Nač jsou mi teď v mém řemesle všechny ty axiomy, theorem a formule, do kterých nás na základce nutili?“ Snažím se ho dožrat: „Aby sis podle Pythagorovy věty dovedl spočítat, zda vařečka padne na dno hrnce, zda se bude opírat o jeho stěnu nebo zda bude vyčuhovat.“ „Tak ji do toho hrnce mrsknu a uvidím.“ Prokoukl, že si z něho chce vystřílet, ale to, co následuje, myslím smrtelně vážně: „Recept na nějaký pokrm je vlastně vektor. Představ si, že máš vyzkoušený nějaký recept na jídlo pro 8 osob, ale že máš vařit jen pro 5 hostů. Není nic jednoduššího, než ten starý osvědčený vektor vynásobit skalárem rovným pěti osminám.“ Tu se ozvala jeho kolegyně a přítelkyně: „Fuj, nech toho nebo mě přestane bavit vařit i chutnat jíst!“ A kuchtík mě dorazil: „Na takové výpočty nemám čas! Představ si, že dělám omáčku. Napustím vodu do hrnce, postavím na oheň, házím tam jedno po druhém a pořád ochutnávám. To šéf cení, že jsem vždycky včas hotov a že to nezkažím!“ Kapituluji.

Názvoslovní. Nedovedete si představit, jak mě štve, že někdo — a já se to dozvím, kdo — nazval jistou množinu „spočetná“. Vždyť je nekonečná! Není to vrtoch pouze českého názvosloví (abzählbare Menge, countable set). Je to spíše contra-dictio in adiecto čili protimluv v přívlastku. Pohromou pro ty, kteří si nedovedou představit, o čem mluví, neb se o to patrně po léta nesnaží, může být i věta: „Mez stínu vrženého je vrženým stínem meze stínu vlastního.“ Vždyť to přišlo i do karety. Věta, věta! Některá věta je na půl stránky! A co s výrazy jako „množina Grundyho čísel následovníků pevně zvoleného uzlu“. Chci-li si s někým popovídat o vyhrávající strategii deskové hry, hrané na několika deskách najednou, mám

Pedagogika s didaktikami

*

Špalůvky. „Co to děláš?“ „Šmirgluju tyto kvádry.“ „A co to bude?“ „Stavebnice, která bude učit algebru.“ „To snad ne, algebra je abstraktní věda. To je počítání s písmeny. Ta s čísly nemá co dělat, natož s těmito špalůvkami!“

Týráná dětí. Matematiku vymysleli matematikové, jen proto, aby bylo čím týrat děti. Jinak to k ničemu není.

Výhubení. Již v prvním ročníku vyhubili matematikové spoustu mých kolegů. Někteří z nich byli technicky velmi nadaní. * Student vyššího ročníku techniky.

Kombinace. Další ročník kombinace M a Vv už nebude. Matematikové vystříleli naše výtvarníky. Kombinace s dějepisem na tom nebyla lépe.

Osvobození. Ve školách se učilo, že celou naši republiku osvobodila Rudá armáda a že už v osmáctátém byla připravena pomoci a stála na naší společný hranici. Tak jsem to klukovi řekl, jak to vopravdu bylo. To nebylo tak zlé. Horší byly ty množiny.

Názor. Docent: „Na názor se nesmíme spoléhat. Názor nás klame. U všech všudy, už je to umyvadlo zase ucpané!“ Student po přednášce: „Jak jste poznal, že je to umyvadlo ucpané, když se nesmíme podle Vás na názor spoléhat?“ Co by tomu řekl zastávce školy Bourbaki? A co obdivovatelé a následovníci paní Montessori?

Vznešenost. Na seminář z didaktiky matematiky přijel učitel školy, která věnovala velkou péči výuce hudby. Jistý všetečka ho bombardoval návrhy, jak spojit obojí: rozdělení hmatníku kytary, flagioletty, výpočet frekvence tónů chromatické stupnice, grafické a mechanické znázornění křížků a béček různých stupnic. Nakonec dal vzácný host přece jen velice taktně a skrytě na jeho svůj názor, že by se vznešená hudba takto zneuctila (besudeln).

Bridge. Na gymnáziu probíhá kurs karetní hry bridge. Instruktor rozdál učebnice. Vzadu je tabulka pravděpodobností rozdělení karet (všechny stejné barvy, 4 od jedné barvy, ostatní barvy po třech kartách, ...). Týž všetečka si učebnici prolisoval a teď přihlíží, jak žáci o přestávce hrají. Podotkne, že je škoda, že v učebnici není ani formule pro výpočet zmíněných pravděpodobností, natož jejich odvození. „To je dobře!“, odseknu hráči a mastí dál.

*

Λ označuje kosmologickou konstantu (číslo), G gravitační konstantu, c rychlost světla ve vakuu. Složkami T_{ik} mohou být obecně opět funkce času, souřadnic nebo rychlostí, nicméně pro ideální kapalinu s hustotou ρ a tlakem p platí (v lokální inerciální soustavě):

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p/c^2 \end{pmatrix}.$$

Z matematického hlediska jde o soustavu 10 (nezávislých) nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Není řešitelná analyticky, až na několik speciálních případů.

FLRW metrika

*

Při hledání homogenní metriky si položíme si otázku, lze popsat křivost jedním číslem? Vezměme jako příklad povrch koule o poloměru R , na níž vyznačíme kružnici o poloměru r . Na rovné ploše bychom očekávali obvod o_o čekávaný $= 2\pi r$, ale zde bychom naměřili:

$$O_{zmeřený} = 2\pi R \sin \vartheta = 2\pi R \sin \frac{r}{R} \doteq 2\pi R \left[\frac{r}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \dots \right].$$

Křivost je pak definována pomocí těchto obvodů jako:

$$K \equiv \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{O_{o}čekávaný - O_{zmeřený}}{r^3}, \quad (3)$$

což pro výše uvedenou kouli dává:

$$K_{koule} = \frac{1}{R^2}.$$

Nyní přejdeme k měření vzdáleností. Ve dvourozměrné euklidovské geometrii a v polárních souřadnicích bychom měli prostě $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\varphi)^2$. Avšak na kulové ploše je (viz obr. 2):

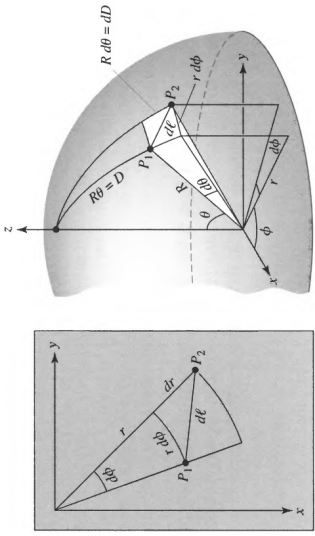
$$(ds)^2 = (Rd\vartheta)^2 + (rd\phi)^2,$$

kde

$$Rd\vartheta = \frac{dr}{\cos \vartheta} = \frac{dr}{\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}} = \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}} = \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}.$$

Zobecnění na třírozměrný prostor provedeme záměnou $rd\phi$ za $r \sin \theta d\phi$.

*



Obr. 2 — Geometrie na ploše a na kouli. Převzato z [2]

Nyní jsme teoreticky připraveni napsat obecnou metriku pro zakřivený časoprostor:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (4)$$

která se nazývá Fridmannova–Lemáitrova–Robertsonova–Walkerova, neboli zkráceně FLRW. Kromě (zatím neznámé) křivosti K jsme do ní doplnili i (zatím neznámou) funkci času $a(t)$, zvanou expanzní parametr, jež umožní popisovat rozpínání nebo smršťování vesmíru. Pochopitelně v metrice nejsou žádné funkce prostorových souřadnic, protože náš vesmír je všude stejný. V maticovém zápisu je:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Expanzní parametr lze libovolně škálovat, nicméně pro přehlednost se volí obvykle $a(t_0) = 1$ dnes, pak K je křivost, anebo $K = -1, 0$ nebo $+1$, pak $a(t)$ je křivost.

Fridmannovy rce

Dosažením FLRW metriky (5) do Einsteinových rovnic (2) získáme rovnice pro expanzní parametr $a(t)$ a křivost K . Namísto ručního výpočtu použijeme algebraický manipulátor Reduce (mat() deklaruje matici a df() provádí derivaci funkce podle parametru):

```

% oznaceni souradnic (x^0, x^1, x^2, x^3) <=> (t, r, theta, phi)
matrix coords(1,4);
coords := mat((t,r,theta,phi));

```



Obr. 19 — Katedros aikšte, Vilnius, Litva (LV XX 01).

Na bohatě zdobené fasádě domu v Mnichově, v ulici Sendlinger se našlo místo pro svislé sluneční hodiny z roku 1734. V naší soutěži si našly místo na třetí příčce. Na číselníku jsou vyznačeny hodiny VI–XII–II a jako ukazatel je použit polos.



Obr. 20 — München, Sendlinger Strasse 34, Německo (DE BA 85).

Velmi neobvyklé a také zajímavé řešení slunečních hodin můžeme spatřit na Baleárech v přístavním městě Port Alcúdia. Se získanými dvanácti body se umístily na prvním místě mezi zahraničními hodinami. Jedná se o svislé jižní sluneční hodiny, jejichž číselník je vynesena na válcové ploše. Kromě hodinových čar od 6. do 18. hodiny jsou zde vynesena i datové čáry. Jako ukazatel je použita trojúhelníková kulisa. Za pozornost zde stojí hlavně tvary jednotlivých datových a hodinových čar, vytvořené projekcí číselníku na válcovou plochu.



Obr. 18 — Baleares, Port Alcúdia, Španělsko (ES BA 8).

Na druhé přičce se umístily velice pěkné provedené sluneční hodiny na JJV stěné budovy velkověvodského paláce na Katedrálním náměstí ve Vilniusu, které v současnosti slouží jako muzeum — Zemutines Pilies Muziejus. Římskými číslicemi VI–XII–IV, umístěnými na stuze, jsou vyznačené hodiny a tečkami na jejím lemu půlky hodin. Číselník je doplněn rovněž datovými čarami s vyznačením znaků zvěrokruhu. U hodin je použit kolmý ukazatel s nodem. V takovém případě není pata ukazatele v průsečíku hodinových čar. Při odcítání času se řídíme polohou stínu nodu na ploše číselníku.

```

procedure x(i); coords(1,i+1); % matice se indexují od 1, nikoli od 0!
%% FLRW metrika g_ik
a(t); Y; % obecna fce t
g := mat(
(-c^2, 0, 0, 0, 0),
(0, (a(t))^2/(1-k*r^2), 0, 0, 0),
(0, 0, (a(t))^2 r^2, 0, 0),
(0, 0, 0, (a(t))^2 r^2 sin(theta)^2, 0)
);
g_ := 1/g; % kontravariantni metrika g^ik <=> inverzni matice
%% Christoffelovy symboly
procedure Christoffel(i,k,l); begin
scalar Ch;
Ch:=0;
for m := 0:3 do begin
Ch:=Ch + 1/2 * g_-(i+1,m+1) *
(df(g(m+1,k+1), x(1)) + df(g(m+1,l+1), x(k)) - df(g(k+1,l+1), x(m)))
end;
return trigsimp(Ch); % zjednodusi goniometricke fce
end;
for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
for l := 0:3 do begin
Gamma(i,k,l) := Christoffel(i,k,l); % ulozeni do pole setri CPU time
if (Gamma(i,k,l) neq 0) then begin
write "Gamma^",i,"_",k,l," = ",Gamma(i,k,l);
end;
end;
end;
end;
%% Riemannuv tenzor
procedure Riemann(i,k,l,m); begin
scalar Ri,n;
Ri := df(Gamma(i,k,m), x(1)) - df(Gamma(i,k,l), x(m));
for n := 0:3 do begin
Ri:=Ri + Gamma(i,n,l)*Gamma(n,k,m) - Gamma(i,n,m)*Gamma(n,k,l);
end;
return trigsimp(Ri);
end;
for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
for l := 0:3 do begin
for m := 0:3 do begin
Ri := Riemann(i,k,l,m);
end;
end;
end;
end;

```



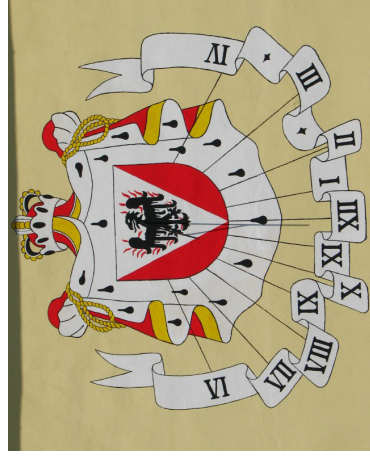

Obr. 14 — Závěrečný pohled na Žebrák.

Sluneční hodiny prvního kvartálu roku 2014

Jaromír Ciesla

Za první kvartál roku 2014 přibylo do katalogu slunečních hodin 45 nových záznamů. Z tohoto počtu jich 33 pochází ze zahraničí.

Již z dálky jsou dobře vidět svíslé sluneční hodiny na fasádě Obecního úřadu ve Staré Vráži. Ve středu číselníku se nachází znak obce. Ve znaku obce je svatováclavská orlice jako symbol zasvěcení místní kapličky Svatému Václavovi. Použitá červená a bílá barva je symbolem české státnosti a křín ve tvaru V značí Vráž. Podle pozadí, na kterém je znak umístěn (královský plášť s korunou), by se dalo usuzovat, že se jedná o královské sídlo.



Obr. 15 — Hodiny ve Staré Vráži (ev. č. PI 70).

```
% Einsteinovy rce pole
```

```
write "EFE: ", R_ik - 1/2 * R() * g - Lambda_ * g, " = ", (8*pi*capG/c^4) * T_ik;
bye;
```

Výsledná složka 00 Einsteinových rovnic se nazývá Fridmannova rovnice:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \right) a^2. \quad (6)$$

Ze stopy EFE vychází ještě druhá Fridmannova rovnice:

$$\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2 = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} + \frac{\Lambda c^2}{2\pi G} \right) a^2.$$

Za předpokladu platnosti rovnice kontinuity:

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -\frac{p}{c^2} \frac{d(a^3)}{dt}$$

Lze odvodit i jiný uživatelný tvar Fridmannovy rovnice (6); nejprve ji násobíme a :

$$\dot{a}^2 a + Kc^2 a = \frac{8\pi G}{3} \rho a^3,$$

pak derivujeme podle času:

$$2\dot{a}\ddot{a}a + \dot{a}^2 \dot{a} + Kc^2 \dot{a} = \frac{8\pi G}{3} \frac{d(\rho a^3)}{dt},$$

odkud ihned plyne rovnice pro zrychlení:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) a.$$

Abychom mohli vypočítat konkrétní průběh $a(t)$, potažmo $\rho(t)$, musíme znát ještě *stavové rovnice*, respektive závislosti $\rho(a)$ pro různé substance, což shrnuje následující tabulka:

$$\text{hmota (prach):} \quad p_m = 0 \quad \rho_m = \rho_{m0} a^{-3} \quad (7)$$

$$\text{záření, neutrina:} \quad p_{rel} = \frac{1}{3} \rho_{rel} c^2 \quad \rho_{rel} = \rho_{rel0} a^{-4} \quad (8)$$

$$\text{A (temná energie):} \quad p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 \quad \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda0} = \text{konst.} \quad (9)$$

Hmota (ať už ve formě hvězd/galaxií nebo jako temná hmota), je strhávána rozpínajícím se prostorem a její hustota přirozeně klesá jako $1/a^3$. Pro fotony se však kromě poklesu jejich koncentrace uplatňuje ještě prodlužování vlnové délky, které ovlivňuje energii podle vztahu $E = hc/\lambda$, takže výsledná úměra je $1/a^4$. Hustota odpovídající kosmologické konstantě naopak zůstává konstantní; pokud ji převedeme na pravou stranu EFE hovoříme též o *temné energii*.

Pro popis rozpínání se kromě expanzního parametru $a(t)$ používá také *Hubbleův parametr*:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (10)$$

Pro dnešek (z blízkých objektů) je změřena hodnota $H_0 \doteq 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, což „numerologicky“ zhruba odpovídá rychlosti vzdalování Měsíce od Země. Dále zavedeme *decelerační parametr*:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (11)$$

pro posouzení toho, kdy se rozpínání zpomaluje ($q > 0$) a kdy zrychluje ($q < 0$). Měřitelnou veličinou je *rudý posuv* (angl. redshift), jeho definice a vztah k $a(t)$ je:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{dnes pozorované}} - \lambda_{\text{emitované}}}{\lambda_{\text{emitované}}}, \quad 1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (12)$$

Z důvodů, které budou zřejmé záhy, zavedeme *kritickou hustotu* jako:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (13)$$

Pro výpočetní účely Fridmannovu rovnici (6) upravíme s využitím stavových rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 + Kc^2 &= \frac{H_0^2}{3} \underbrace{\left(\frac{\rho_{m0}}{a^3} + \frac{\rho_{re10}}{a^4} + \rho_{\Lambda 0} \right)}_{\rho_{re0}} a^2, \end{aligned}$$

definujeme bezrozměrné veličiny Ω jako:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c},$$

pak

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{re10}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 \right)$$



Obr. 13 — Dalekohled Newton 350 mm.

dnes. Jsou zde pořádané zajímavé akce, kterými se sdružení pozitivně zviditelňuje v očích veřejnosti. Mezi oblíbené akce patří podzimní drakiády, účasti na muzejních nocích, veřejná pozorování z hradu Točínk, výšlapy po stopách meteoritu, přednášky v muzeu a další. Aktuální informace o aktivitě hvězdárny lze nalézt na přehledně vedených webových stránkách (<http://www.hvezdarnazebrak.cz>).

Na pozemku hvězdárny se nachází meteorologická stanice sledující počasí. Naměřená data jsou přenášena prostřednictvím internetu. Na budově je umístěna webová kamera, která přenáší online pohled na město Žebrák.

Hlavním plánem hvězdárny do budoucna je přístavba hvězdárny a dokonce vybudování planetária. První zdárné kroky má již hvězdárna za sebou. Ve spolupráci s arch. Josefem Pánkem byl vypracován projekt, který prošel připomínkovým řízením. V dohledné době by tak zde mohlo vzniknout přírodovědné a informační centrum, které by poskytlo dostatečné prostory pro důstojnou popularizaci vědy jako zdroj vzdělávání, poučení a zábavy na Berounsku.

Závěrem děkuji mému průvodci, kterým byl Václav Keberle.



Obr. 11 — Přednášková místnost.

V přízemí budovy o půdorysu asi 6×6 m se nachází malá přednášková místnost pro 16 lidí, vybavená moderní audiovizuální technikou. Po dřevěném schodišti se vstupuje do prostoru kopule, která má průměr 5,5 m. Zde se nachází hlavní dalekohled hvězdárny, kterým je Newton s průměrem hlavního zrcadla 350 mm o ohniskové vzdálenosti 2150 mm. Jelikož byla kvalita původního zrcadla nevhovující, bylo nejdříve v roce 2005 přebroušeno a nakonec v roce 2007 vyměněno za nové. Dalekohled je usazen v parabolické vidlicové montáži, u které se konstruktéři nechali inspirovat v té době největším dalekohledem na světě, a tak svou stavbou nápadně připomíná velký pětimetrový dalekohled na hoře Mt. Palomar v USA. Ovšem v mnohem menším měřítku.

Pohon dalekohledu byl doplněn elektronikou, čili nedělá velké těžkosti zaměření na pozorovaný objekt a také plynulé sledování po obloze. Součástí dalekohledu byla i fotokomora, která se nyní rekonstruuje. Plánuje se zakoupení slunečního dalekohledu.

Pro pozorování je používáno i několik přenosných dalekohledů, k nimž patří refraktor Meade na azimutální montáži s automatickým naváděním a zrcadlový Newton 150 mm na německé parabolické montáži.

Na hvězdárně se pravidelně konají astronomické přednášky a pozorování pro veřejnost, schází se zde astronomický kroužek a je vydáván zpravodaj Astronomie



Obr. 12 — Schody pod kopuli.

a člen Kc^2 vyloučíme pomocí téže rovnice, ale napsané pro čas $t = t_0$, kdy je $a_0 = 1$, $\dot{a}_0 = H_0 \dot{a}_0 = H_0$:

$$H_0^2 + Kc^2 = H_0^2 (\Omega_{m0} + \Omega_{rel0} + \Omega_{\Lambda 0}),$$

čili:

$$\dot{a}^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m0}}{a} + \frac{\Omega_{rel0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} a^2 + 1 - \Omega_{m0} - \Omega_{rel0} - \Omega_{\Lambda 0} \right), \quad (14)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu pro $a(t)$, kterou můžeme snadno řešit numericky (viz podstatnou část kódu programu fridmann ve Fortranu 77):

```

c počateční podmínky
  t = 0.d0
  a = a_0
  tout = t

c hlavní cyklus
  do while ((t.lt.tstop).and.(a.gt.0d0))

c stavove rovnice pro hmotu (prach), zarení a vakuum => skalovani hustot
  Omega_m = Omega_m0 / a
  Omega_rel = Omega_rel0 / a**2
  Omega_lambda = Omega_lambda0 * a**2

c rudy posuv
  z = a_0/a - 1.d0

c standardní vystup
  if (t.ge.tout) then
    write(*,*) (t_0+sign*t)/Gyr, a, z, Omega_m, Omega_rel,
      : Omega_lambda
    tout = t + dtout
  endif

c Fridmannova rovnice
  da_dt = sqrt(H_0**2 * (Omega_m + Omega_rel + Omega_lambda
    : + 1.d0 - Omega_m0 - Omega_rel0 - Omega_lambda0))

c jednoduchy Euleruv integrator
  a = a + da_dt*dt*sign
  t = t + dt
enddo

```

Některé hypotetické vesmíry pochopíme i bez programu:

1. pro *prázdný* vesmír ($T_{ik} = 0$, bez Λ) vychází $\dot{a}^2 = 0$, $a = \text{konst.}$, $H = 0$, $K = 0$, čili je v něm statický Minkowského plochý časoprostor ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$).
2. *de Sitterův* vesmír ($T_{ik} = 0$, pouze $\Lambda > 0$) se vyznačuje exponenciálním rozpínáním $a(t) \propto \exp \chi t$.

3. pro *prach* a *plyn* existuje kritická hustota ρ_c (viz (13)); je-li

$\rho = \rho_c \Rightarrow K = 0$, tzn. vesmír je plochý;

$\rho > \rho_c \Rightarrow K > 0$, je uzavřený, má kulovou geometrii;

$\rho < \rho_c \Rightarrow K < 0$, je otevřený, geometrie je hyperbolická.

Pro podkritický hmotou vyplněný vesmír platí úměra $a \propto t^{2/3}$.

4. vesmír vyplněný *zářením* se rozpíná jako $a \propto t^{1/2}$

5. náš *pozorovaný* vesmír má počáteční podmínky (v čase $t = t_0$) přibližně $\Omega_{m0} = 0,27$, $\Omega_{rel0} = 8,24 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{\Lambda 0} = 0,73$. Na obr. 3 a 4 vidíme jeho vývoj spočtený výše uvedeným programem. Můžeme z něj odečíst okamžik Velkého třesku $t_{BB} = -13,7 \text{ Gyr}$, kdy je $a = 0$, začátek zrychlování v čase $t = -6,7 \text{ Gyr}$, nebo trvání éry záření ($\rho_{rel} > \rho_m$) asi 55 000 roků od Velkého třesku

V další kapitole vysvětlíme, z čeho se odvozují výše uvedené hodnoty Ω .

Jak se měří vesmír?

Parametry našeho vesmíru jsou omezené především dvěma pozorováními: i) měřením fluktuací kosmického mikrovlnného záření (CMB); ii) fotometrií a spektroskopii supernov typu Ia.

Z měřené intenzity kosmického mikrovlnného záření se vypočítává prostorové spektrum fluktuací (příčemž se odečte dipólní složka a rušení Mléčnou dráhou) a ta se fituje kosmologickými modely (viz obr. 5). Není to jednoduchý homogenní model, to bychom pochopitelně nedostali žádné fluktuace CMB.^{1,2}

Luminozita vzdálenosti supernov Ia jsou určované nezávisle pomocí cefeid nebo Tullyho-Fisherovým vztahem a porovnávají se s ručným posuvem mateřských galaxií (viz obr. 6).³

¹ Toto záření vzniklo asi 380 000 roků po Velkém třesku, když došlo k rekombinaci, čili záření se oddělilo od látky a vesmír se stal průhledný. Jedná se vlastně o nejvzdálenější objekt, který můžeme pozorovat. Pozor, není možné tvrdit, že vzdálenost CMB je 13,7 Gly! V okamžiku, kdy došlo k emisi fotonů, byl zdroj od nás (budoucí Země) vzdálen *jen* 40 Mly. Toto záření pak cestovalo 13,7 Gyr skrz rozpínající se prostor, takže souhybná vzdálenost někdějšího zdroje (dnes nějaké galaxie) od současné Země je 48,5 Gly.

² Tvar prostorového spektra se vysvětluje *akustickými oscilacemi* v plazmatu tvořeném baryony a fotony. Největší amplituda okolo $\ell \simeq 200$, čemuž odpovídá úhel na obloze $\varphi = 180^\circ / \ell \simeq 1^\circ$, se proto nazývá *akustický vrchol*. Dalšími jevy, které fotony CMB ovlivňují, jsou difúzní tlumění (též Silkovo; jde o vyrovnávání fluktuací hustoty fotonů během rekombinace), Sunyaevův-Zeldovičův jev (tj. změna tvaru spektra CMB rozptylem na energetických elektronech), Sachsův-Wolfov jev (gravitační rudý nebo modrý posuv fotonů CMB).

³ K extinkci záření dochází zejména v hostitelské galaxii, nikoli v mezigalaktickém prostoru, proto jsou různé vzdálené supernovy zeslabeny stejně. Ostatně se nepozoruje ani výrazné zčervenání spekter vzdálených supernov.

Významným datem byl 24. říjen roku 1824. Ten den byl kolem osmí hodiny zaznamenán let meteoru. Tento jev byl doprovázen hlasitými zvukovými efekty. Krátce před dopadem se meteoroid rozpadl na několik úlomků, které dopadly v oblasti mezi Žebrákem a Praskolesy.

Událost vyvolala značný zájem mezi občany, a tak není divu, že krátce po pádu byly nalezeny hned dva největší úlomky kameného meteoritu (chondritu) o celkové hmotnosti 1873 g. Jejich nálezcem byl žebračský občan F. Kolben. Oba nalezené kusy odkoupil hrabě Eugen z Vrbova. Jeden z nich daroval do sbírek Vlastivědného muzea v Praze. Dnes můžeme tento kus o hmotnosti 861 g spatřit ve sbírkách Národního muzea. Další kusy se nacházejí ve sbírkách Muzea přírodní historie ve Vídni a v Budapešti. Množství drobných úlomků o hmotnostech 1 až 14 g je pak rozseto ve sbírkách muzeí po celém světě.

Přibližně padesát let po této události se zde začíná scházet skupina zájemců o astronomii. Po čase přišli s návrhem na stavbu hvězdárny, který se nakonec, i když jen v polovičním rozsahu, podařilo prosadit. Stavba hvězdárny na snadno dostupném místě na kopci nad městem probíhala v akci „Z“ za účasti členů astronomického kroužku při ZK TOS a občanů města.



Obr. 10 — Model plánované hvězdárny.

Hvězdárna byla slavnostně otevřena v roce 1954. Na hvězdárně se scházel astronomický kroužek, byla prováděna astronomická pozorování, např. proměnných hvězd a slunečních skvrn. Po několika letech aktivního působení však její činnost postupně upadá, až nakonec dochází k uzavření hvězdárny.

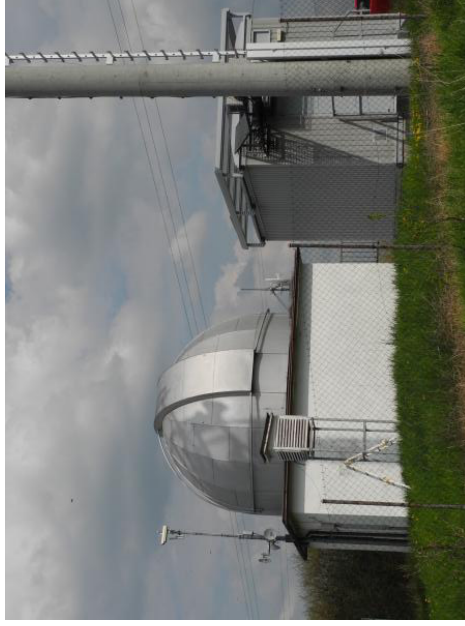
Začátkem 21. století si nevyužitá hvězdárna všimá skupina astronomů amatérů, které její stav není lhostejný. Z toho důvodu zakládají v roce 2004 Sdružení Hvězdárna Žebrák, které se aktivně zapojuje do kulturního dění města. Svoji činností se těší nejen velkému zájmu občanů, ale i významných osobností, které tuto hvězdárnu navštívily.

- [5] *Supernova Cosmology Project* [online]. [cit. 2012-01-27]. (<http://supernova.lbl.gov/>).
 [6] WEINBERG S. *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press, 2008. ISBN 0198526822.
 [7] WRIGHT, E. *Cosmology Calculator*. [online] [cit. 2012-01-31]. (<http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html>).

Hvězdárna Žebrák

Jaromír Ciesla

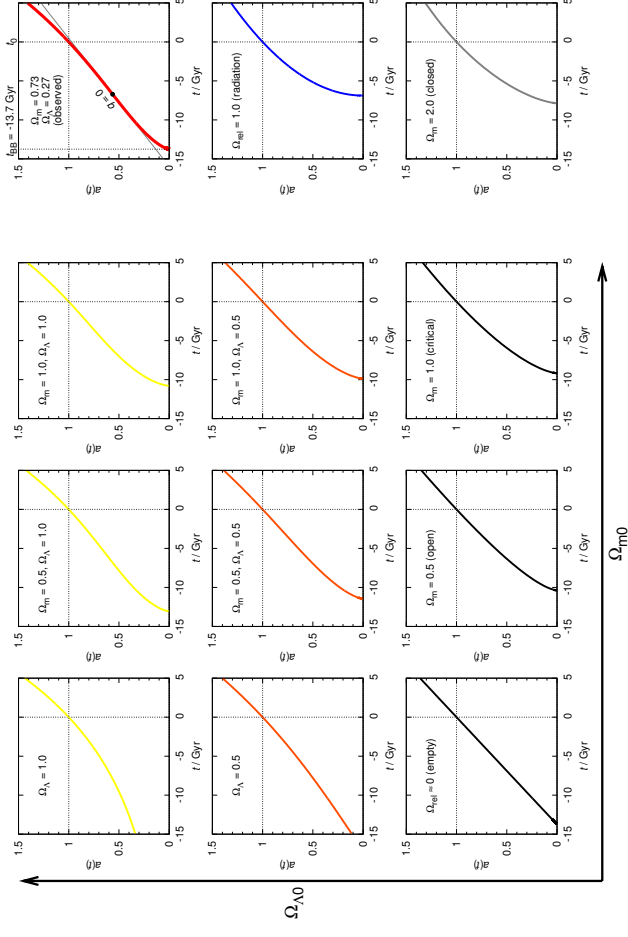
Na konci dubna 2014 jsem navštívil jednu z malých a dnes zase živých hvězdáren, hvězdárnu v Žebráku. Jelikož jsem projížděl kolem mimo návštěvní dobu, obrátil jsem se v předstihu na členy Sdružení Hvězdárna Žebrák. Obratem mi byla nabídnuta možnost prohlídky hvězdárny ve vhodném čase.



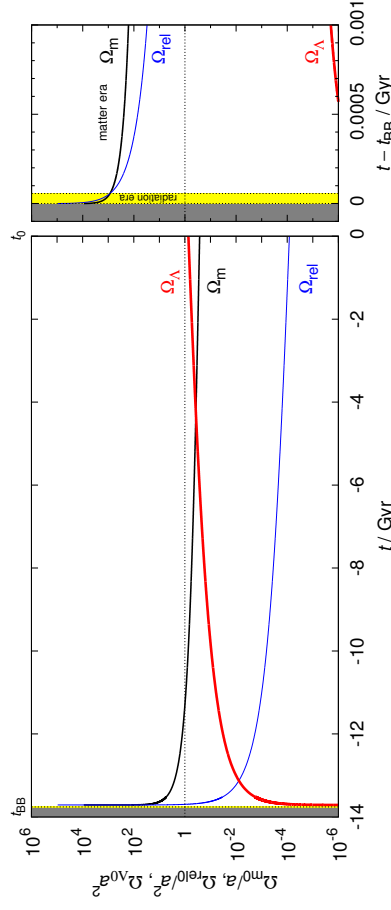
Obr. 9 — Hvězdárna Žebrák.

Kromě hvězdárny samotné je zajímavá i historie místa, kde se nachází královské komorní město Žebrák. První písemné zprávy o Žebráku pocházejí z roku 1280, avšak archeologické vykopávky dokládají osídlení již před sedmi tisíci lety, kdy se zde nacházela rozsáhlá osada. Je docela možné, že již tehdy se zde našli jedinci, kterým jasná obloha posetá tisíci hvězdami nedala v noci spát.

Osada Žebrák byla založena asi ve 12. století a od století 13. byla rušným tržištěm na obchodní cestě mezi Prahou a Plzní. V roce 1396 byla obec Žebrák povýšena dekretem krále Václava IV. na město. Dominantou města je zřícenina hradu Točnick, který byl založen v roce 1390 králem Václavem IV. Kousek pod ním se nacházejí zbytky hradu Žebrák, který byl postaven kolem roku 1280 Oldřichem Zajícem z Valdeka. Hrad je od roku 1552 opuštěn a do dnešní doby se z něj dochovala pouze válcová věž, ze které je pěkná vyhlídka.



Obr. 3 — Vývoj expanzního parametru $a(t)$ pro různé hodnoty Ω_{m0} , $\Omega_{\Lambda 0}$, Ω_{rel0} . Hodnota Hubbleova parametru je ve všech případech $H_0 = 70,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.



Obr. 4 — Časové závislosti relativních hustot $\Omega' = \frac{\rho}{\rho_0}$ pro náš pozorovaný vesmír. Rozlišujeme přítom příspěvky od kosmologické konstanty, temné hmoty + baryonů a od záření. Na detailu vpravo je patrné období od Velkého třesku do 1 Myr.

Luminozitní vzdálenost d_L je definována jako:

$$d_L^2 \equiv \frac{L}{4\pi F}, \quad (15)$$

kde L označuje luminozitu zdroje a F měřený tok. Předpokládáme, že zdroj je v počátku *souhvězných* souřadnicové soustavy a emituje fotony do sféry o poloměru r . Plocha sféry je $4\pi [a(t)r]^2$ (i když $a(t)r$ není poloměr při $K \neq 0$).

Tok je však kromě obvyklého zákona čtverců ovlivněn dalšími dvěma jevy: i) fotony mají kvůli expanzi menší energii $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$, $\lambda \propto a(t)$; ii) fotony kvůli dilataci času přicházejí s většími „přestávkami“. Oba se projeví faktorem $1/(1+z)$:

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{1}{1+z},$$

což po dosazení do (15) dává vztah:

$$d_L = r(1+z). \quad (16)$$

Souhvěbné souřadnice r lze (bez důkazu) vypočítat jako:

$$r(z) = \frac{c}{H_0} S(z), \quad (17)$$

kde funkce:

$$\begin{aligned} S(z) &= I(z) \quad \text{pro } \Omega_0 = 1, \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_0 - 1}} \sin \left[I(z) \sqrt{\Omega_0 - 1} \right] \quad \text{pro } \Omega_0 > 1, \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_0}} \sinh \left[I(z) \sqrt{1 - \Omega_0} \right] \quad \text{pro } \Omega_0 < 1, \end{aligned} \quad (18)$$

a integrál:

$$I(z) = H_0 \int_0^{r^z} \frac{dz'}{H(z')}, \quad (19)$$

který lze počítat numericky z výstupu programu *fridman*.

Parametry vesmíru a jejich nejistoty odvozené z dat WMAP, SN Ia a SDSS (Spergel aj. 2006) jsou uvedeny v tab. 1.

V současnosti je kritická hustota rovna $\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \doteq 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \simeq 6$ protonů $\cdot \text{m}^{-3}$, ale nejsou to protony! Většinu obsahu vesmíru tvoří kosmologická konstanta alias temná energie, zbytek temná hmota a „zanedbatelnou“ menšinu (4%) baryony. O leptonech, fotonech nebo neutrinech ani nemluvě. Na titulním obrázku vidíme, jak důležité je pozorování různými metodami, protože každá má jiné nejistoty, přičemž výše uvedené přesné hodnoty Ω jsou v jejich průsečíku.

Mějme jednu virtuální částici o hmotnosti $m \simeq \frac{\Delta E}{c^2}$ v boxu o rozměru $L \simeq \Delta x$. Její životní doba plyne z Heisenbergova principu neurčitosti:

$$\Delta t \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} \simeq \frac{\hbar}{mc^2}.$$

Protože nejistota hybnosti $\Delta p \geq 0$ i hybnost $p \geq 0$, musí minimální hodnota hybnosti být řádu $p_{\min} \simeq \Delta p$. Z principu neurčitosti víme zároveň, že:

$$\Delta p \simeq \frac{\hbar}{\Delta x},$$

takže rychlost částice vyjádříme jako:

$$v \simeq \frac{p_{\min}}{m} \simeq \frac{\hbar}{mL}.$$

Největší vzdálenost, kterou částice může proletět, aby nevyletěla z boxu, je $L = v\Delta t$. Po dosažení:

$$L = \frac{\hbar}{mL} \frac{\hbar}{mc^2}, \quad L^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 c^2}, \quad L \simeq \frac{\hbar}{mc}.$$

Abychom vytvořili *pár* virtuálních částic, musí hustota energie vakua být:

$$u_{\text{vac}} \simeq \frac{2mc^2}{L^3} \simeq \frac{2m^4 c^5}{\hbar^3}.$$

Největší hmotnost, která přichází v úvahu, je Planckova hmotnost:

$$m_{\text{p}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 10^{19} \text{ GeV},$$

odkud plyne:

$$u_{\text{vac}} \simeq \frac{2m_{\text{p}}^4 c^5}{\hbar^3} \simeq \frac{2c^7}{G^2 \hbar} \simeq 10^{114} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Přesnější teorie dává $u_{\text{vac}} \simeq 10^{111} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}$. To je v příkrém rozporu s měřenou hodnotou:

$$u_{\Lambda} = \rho_{\Lambda} c^2 = \rho_{\Lambda} \Omega_{\Lambda} c^2 = 6,22 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Nelze vyloučit možnost, že ve vesmíru existuje nějaké další skalární pole, jako je zmiňovaná kvintesence.

[1] CARROL S. M. A *No-Nonsense Introduction to General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. (<http://preposterousuniverse.com/grnotes/grtiny.pdf>).

[2] CARROL B. W., OSTLIE D. A. *An Introduction to Modern Astrophysics*. San Francisco: Pearson, Addison Wesley, 2007. ISBN 0321442849.

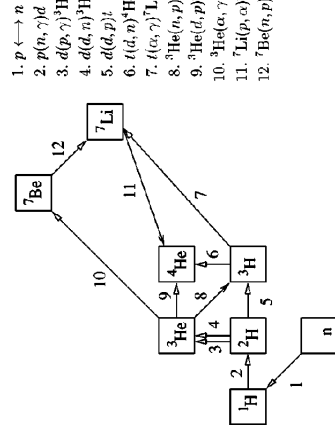
[3] NOLLET K. M., BURLET S. *Estimating reaction rates and uncertainties for primordial nucleosynthesis* Phys. Rev. D, 61, 123505, 2000.

[4] *Reduce*. [online] [cit. 2010-03-08]. (<http://www.reduce-algebra.com/>).

Oblaka horkého mezigalaktického plynu zářícího v rentgenovém oboru, která se pozorují v kupách galaxií, se vyznačují velkou rychlostí emitujících částic, jež přesahuje rychlost únikovou (počítanou ze svítící látky). Protože plyn navzdory tomu pozorujeme, musí být kupy celkově asi 10 krát hmotnější než svítící látka. Temnou hmotou nemohou být stelární černé díry, ty byly vyvráceny negativním pozorováním gravitačních čoček ve Velkém Magellanově mraku.

Temná hmota musí být *nebaryonická*, protože jinak by nukleosyntéza po Velkém třesku proběhla odlišně, byla by překonána berylová bariéra a vzniklo by mnoho primordiálního železa (viz obr. 8). Nesmí ani interagovat elektromagneticky, protože by se prozradila nějakým zářením.

Proto se uvažuje o hmotných neutrálních elementárních částicích interagujících pouze slabě a gravitačně. Mimo jiné byly navrhovány axiony nebo neutralina (superpartneři neutrin v supersymetrických teoriích), nicméně zatím neexistuje experimentální potvrzení těchto hypotéz.

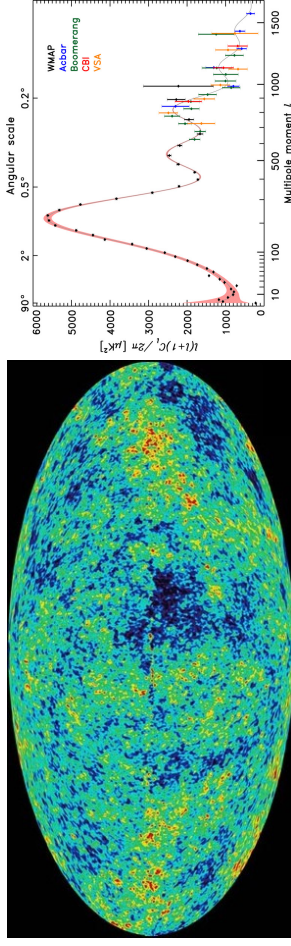


Obr. 8 — Schematické znázornění jaderných reakcí, které se uplatňovaly během nukleosyntézy po Velkém třesku. Převzato z [3].

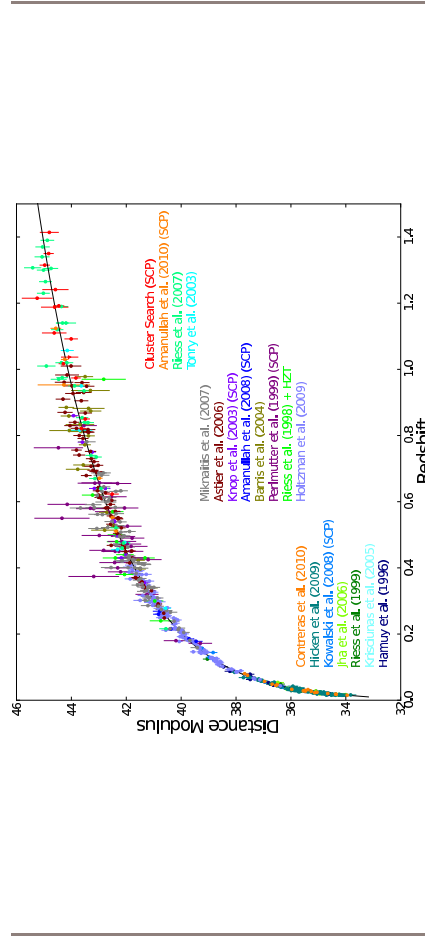
Co je zdrojem temné energie?

Nejjednodušším vysvětlením by mohlo být, že v Einsteimových rovnicích prostě musí být uvedena kosmologická konstanta Λ , nicméně není uspokojivé, když nemáme teorii vysvětlující její velikost.

Přirozeným vysvětlením by byla *energie vakua*, na než v kvantové mechanice nahlížíme jako na prostor plný virtuálních částic. Problém je, že z kvantové teorie vychází o 120 řádů větší hodnota než pozorovaná ρ_Λ ! Těžko pak takové interpretaci věřit.



Obr. 5 — Vlevo fluktuace intenzity mikrovlnného záření znázorněné barevnou škálou na mapě oblohy. Vpravo odpovídající prostorové spektrum, čili závislost amplitudy na prostorové frekvenci (multipólovém momentu l). Největší amplitudu vykazují fluktuace s úhlovým rozměrem okolo 1° .



Obr. 6 — Vztah mezi modulem vzdálenosti a rudým posuvem pro velký vzorek supernov typu Ia. Převzato z [5].

Pozorujeme tedy $\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{CDM}} + \Omega_{\text{baryonů}} + (\text{nepatrné příspěvky } e^-, \gamma, \nu) = (1,00 \pm 0,04)$, čili plochý vesmír je v souladu s pozorováním. Uvědomme si ale, že v principu *nelze* nikdy prokázat přesnou plochost!

Poznamenejme, že Λ přispívá svou hustotou ke zpomalování rozpínání (a vyrovnává jeho křivost na nulu), *ale* zároveň svým záporným tlakem rozpínání zrychluje. Existují samozřejmě i jiné hypotézy, hovoří se například o *kvintesenci*, která má odlišnou stavovou rovnici, proměnnou v čase. Parametry kosmologického modelu by se pak do jisté míry změnily.

H_0	$= 70,9^{+2,4}_{-3,2} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$	Hubbleův parametr
ρ_0	$= 0,94^{+0,06}_{-0,09} \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	kritická hustota
Ω_b	$= 0,0444^{+0,0042}_{-0,0035}$	hustota baryonů
$\Omega_{\text{CDM}+\text{b}}$	$= 0,266^{+0,025}_{-0,040}$	hustota temné hmoty + baryonů
Ω_Λ	$= 0,732^{+0,040}_{-0,025}$	hustota temné energie
z_{ion}	$= 10,5^{+2,6}_{-2,9}$	rudý posuv reionizace
τ	$= 0,079^{+0,029}_{-0,032}$	optická hloubka reionizace
t_0	$= 13,73^{+0,13}_{-0,17} \text{ Gyr}$	stáří vesmíru

Tab. 1 — Parametry vesmíru a jejich nejistoty odvozené z dat WMAP, SN Ia a SDSS (Spergel aj. 2006).

Teplota záření

Spektrum kosmického pozadového záření je planckovské, což svědčí o tom, že záření je (bylo) v termodynamické rovnováze. Za rovnovážného stavu máme ovšem podle Stefanova–Boltzmannova zákona hustotu energie záření rovnou:

$$u = \frac{\sigma}{4c} T^4. \quad (20)$$

Pro záření zároveň platí kosmologické škálování $\rho_{\text{rel}} = \rho_{\text{rel}0} a^{-4}$, tudíž:

$$\frac{\sigma}{4c} T^4 = \frac{\sigma}{4c} T_0^4 a^{-4},$$

odkud snadno vyjádříme závislost teploty na expanzním parametru:

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}. \quad (21)$$

Dosadíme-li pozorovanou hodnotu $T_0 = 2,7 \text{ K}$, můžeme odhadovat teplotu záření v minulosti (viz obr. 7). V éře záření (i před rekombinací) navíc lze předpokládat, že i látka byla v rovnováze se zářením, čili měla stejnou teplotu.

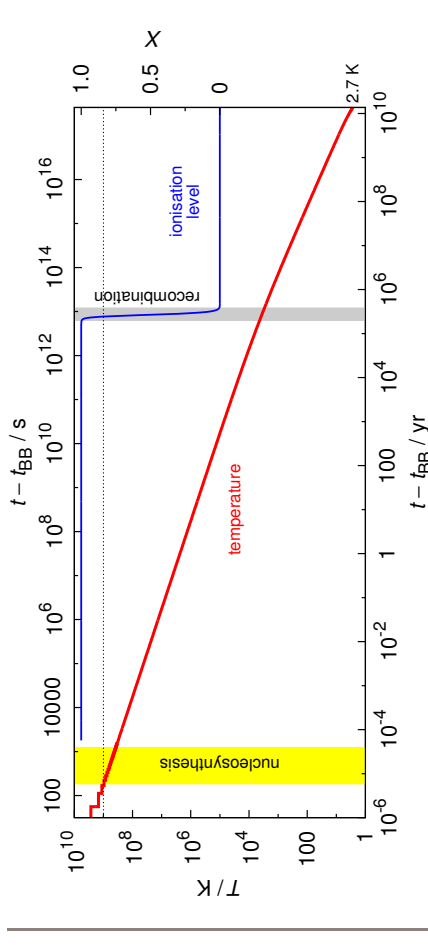
Zásadním poznatkem je, že nukleosyntéza ve hvězdách není schopna vysvětlit pozorovaný velký obsah *helia* ve vesíru ($Y \simeq 0,25$), vzhledem k relativně malému obsahu uhlíku nebo kyslíku ($Z \simeq 0,02$). Syntéza helia přitom vyžaduje teploty řádově $T \simeq 10^9 \text{ K}$, aby mohla být překonána coulombická bariéra (s pomocí tunelového jevu).

Budeme-li tedy předpokládat, že „nadbytečné“ helium byl syntetizováno v horkém raném vesmíru, v tu dobu muselo být $a(t) = \frac{T_0}{T} a_0 \simeq 3 \cdot 10^{-9}$. Z průběhu $a(t)$ pak vyplývá, že nukleosyntéza musela probíhat v prvních *minutách* po Velkém třesku, ale ne dříve, protože by docházelo k fotodisintegraci jader.

Atomy vznikly až mnohem později, když teplota záření a odpovídající energie fotonů byla nižší než ionizační energie atomů. Výpočet můžeme provést pomocí Sahovy rovnice:

$$\frac{X^2}{1-X} n_e = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right), \quad (22)$$

kde $X \equiv \frac{n_\alpha}{n}$ označuje ionizační stupeň, n_e koncentraci elektronů (odvozenou z $\rho_b = \rho_{b0} a^{-3}$), m_e hmotnost elektronu, k Boltzmannovu konstantu, h Planckovu konstantu a χ ionizační energii atomu. Období, kdy probíhala *rekombinace*, vychází přibližně od 210 000 roků ($X = 0,99$) do 420 000 roků ($X = 10^{-3}$) po Velkém třesku.



Obr. 7 — Teplota záření v závislosti na čase a stupeň ionizace vypočtený dle Sahovy rovnice.

Úvahy o průběhu teploty ve velmi raném období ($T > 10^{10} \text{ K}$) jsou složitější, protože dochází k fázovým přechodům (např. anihilaci párů, oddělení neutron) nebo je rychlost expanze tak velká, že procesy probíhají nerovnovážně.

Co je zdrojem temné hmoty?

Pro existenci temné hmoty svědčí pozorování nezávislá na jakýchkoli kosmologických modelech. Jde zejména o nekeplerovskou rotaci vnějších částí galaxií (plochá rotační křivka $v(r)$), způsobená halem nesvítilící hmoty.