

karlovarské oblasti a že má bohaté vědomosti o vlastním lázeňství. Zde se ovšem nalézá i z našeho hlediska důležitý artefakt — co jiného než sluneční hodiny. Nejsou to však hodiny běžné, ale vícenásobné. Hodiny se nacházejí ve spodní části náměstí Míru, kde jsou postavené na metrovém sloupku. Jak vyplývá z označení, obsahují několik číselníků vyrytých v mramorovém bloku. Konkrétně jsou zde jedny svíslé a jedny vodorovné hodiny, pak troje rovinné a troje polární. Hodiny jsou v dosti zanedbaném stavu, porostlé lišejníky a zanesené vrstvou prachu, navíc zde chybí ukazatel rovinných hodin. (Příště je nutno vzít s sebou kartáč!)

Když už jsme ve Františkových Lázních, nemůžeme minout samotného Františka, za kterým chodí hlavně ženy, ale není to podmínkou. Samotné město působí klidným a spokojeným dojmem, čímž se značně odlišuje od Karlových Varů. Po krátké prohlídce kolonády a přilehlého parku jsme pokračovali do Chebu. Zde jsme udělali první zastávku u gymnázia v Nerudově ulici, na jehož stěně se nacházejí rozměrné JV svíslé sluneční hodiny.

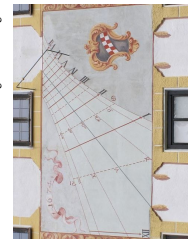
Za dalšími hodinami jsme šli do františkánského kláštera, kde jsme se po projití křížové chodby a prohlídce klášterní knihovny dostali do vnitřního atria. Svíslé sluneční hodiny se zde nacházejí na JV stěně. Jsou malované, s krajinařským motivem, a mají rozsah 6–12–1.

Nakonec jsme se vydali na prohlídku městského centra, kde se naše cesty častěji rozdělily. Někdo šel do restaurace na oběd, zatímco já se synem jsme spolu s pány Traugottem a Pfortnerem vydali historickými uličkami k autu a odjeli směrem do Plzně, a odtud vlakem dále do Prahy, Ostravy, Opavy a domů. Závěrem chci poděkovat pořadatelům za skvěle připravenou akci i ostatním zúčastněným za příjemný víkend.

Sluneční hodiny 3. kvartálu

Jaromír Ciesla

Tři měsíce uplynuly a máme tady zase hodnocení o nejlepší přírůstky do katalogu slunečních hodin. V průběhu minulého kvartálu se katalog rozrostl o 114 nových záznamů. Podle územního zastoupení pochází nejvíce, a to 25 nových slunečních hodin, z České republiky. S počtem 23 následuje Itálie, 18 Francie, 11 Španělsko, 10 Rakousko, 9 Německo, po 7 Itálie a Švýcarsko a po dvou přírůstcích pochází z Dánska a ze Španělska. Hlasování se zúčastnilo celkem pět členů, kteří dohromady rozdali 64 bodů mezi nejlepšími 9 domácích a 13 zahraničních přírůstků. Toliko suchá statistika a nyní se podíváme, jak se jednotlivé hodiny líbily.



Ze zahraničních přírůstků získaly nejvíce bodů svíslé sluneční hodiny z rakouského města Stams (ev. č. AT IM 2). Ve skutečnosti zde jsou dvoje sluneční hodiny pocházející z roku 1674, přičemž každé se nacházejí na jiné stěně budovy. Konkrétně tyto mají azimut stěny 75°, čemuž odpovídá i provedení lomeného ukazatele s nodem a provedení

Galileiho a Lorentzova transformace

Zásadním poznatkem *speciální teorie relativity (STR)* je, že „přirozeně“ vypa-
dající *Galileova transformace* souřadnic, mezi dvěma inerciálními soustavami S
a S' pohybujícími se vzájemnou rychlostí V podél osy X , je špatně:

$$T' = T, \quad X' = X - VT, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \quad (1)$$

Prostor a čas se prostě chová jinak a my musíme používat *Lorentzovu transformaci*:

$$T' = \frac{T - \frac{VX}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad X' = \frac{X - VT}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z. \quad (2)$$

kde je prostor a čas „podivně“ provázán; c označuje rychlost světla ve vakuu. Jak uvidíme dále, z této transformace vyplývají pozoruhodné důsledky. Poznamenejme, že pro zkrácení zápisu se často používají zkratky:

$$\beta = \frac{V}{c} \leq 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \geq 1. \quad (3)$$

Ekvivalentně k (2) bychom mohli přijmout postuláty, že: i) fyzikální zákony platí ve všech inerciálních soustavách stejně a ii) rychlost světla c je konstantní.

Dilatace času a Dopplerův jev

Mějme v soustavě S jedny nehybné hodiny a v pohybující se soustavě S' pozorovatele. Dva tilky hodin jsou události souměrné v S , tzn. $X_1 = X_2$, které nastaly v rozdílných časech $T_2 - T_1 \equiv \tau$. Co uvidí pozorovatel v S' ? Podle (2) je:

$$\tau' \equiv T'_2 - T'_1 = \gamma \left(T_2 - \frac{VX_2}{c^2} - T_1 + \frac{VX_1}{c^2} \right) = \gamma\tau > \tau. \quad (4)$$

Pohybující se pozorovatel tedy vždy změří delší časový interval mezi událostmi! Tomuto jevu říkáme *dilatace času*. Mimochoodem, čas τ , měřený nehybnými hodinami (vzhledem k pozorovateli v S), nazýváme *vlastní čas*.

Nyní si představme v S zdroj, který vysílá vlnění s periodou τ_z . Pozorovatel letí spolu s S' rychlostí V pryč; vlnění od zdroje se v S' šíří rychlostí u . Ze soustavy pozorovatele se ovšem perioda zdroje jeví delší — podle (4) je $\tau'_z = \gamma\tau_z$. Ovšem

Titulní strana: Simulace pádu pozorovatele do Schwarzschildovy černé díry. Převzato ze stránky (<http://jila.colorado.edu/~ajsh/insidebh/schw.html>). K článku na str. 3.

pozor, toto není perioda, kterou změní pozorovatel! Během τ'_z se totiž vzdálenost zdroj-pozorovatel zvětší o $V \cos \alpha \tau'_z$, tudíž pozorovatel bude registrovat vlnění se změněnou vlnovou délkou:

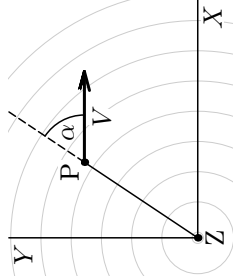
$$\lambda \equiv u\tau'_p = u\tau'_z + V \cos \alpha \tau'_z.$$

Výsledná perioda τ'_p měřená pozorovatelem v S' je:

$$\tau'_p = \frac{\lambda}{u} = \left(1 + \frac{V \cos \alpha}{u}\right) \gamma \tau_z. \quad (5)$$

Tato změna periody vlnění se nazývá *Dopplerův jev*. I v případě, kdyby se pozorovatel pohyboval kolmo ke směru zdroj-pozorovatel ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), by nastalo určité prodloužení periody $\tau'_p = \gamma \tau_z$, neboli čistě relativistický *příčný Dopplerův jev*. Pokud je vlněním světlo ($u = c$) a pozorovatel letí radiálně od zdroje ($\alpha = 0$), pak zřejmě:

$$\tau'_p = \tau_z \frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \tau_z \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}. \quad (6)$$



Obr. 1 — Zdroj Z, vlnění a pozorovatel P v soustavě S. Pozorovatel se pohybuje rychlostí V pod úhlem α vzhledem ke směru Z-P.

Kontrakce délek a relativnost současnosti

Mějme pro změnu v soustavě S nehybnou tyč o délce $X_2 - X_1 \equiv L$ a v pohybující se soustavě S' pozorovatele. Co změní pozorovatel v S' , bude-li konce tyče měřit logicky ve stejných časech $T'_2 = T'_1$? Podle inverzní Lorentzovy transformace (dosazení $-V$ do (2)):

$$L \equiv X_2 - X_1 = \gamma (X'_2 + VT'_2 - X'_1 - VT'_1) = \gamma (X'_2 - X'_1) \equiv \gamma L'$$

čili:

$$L' = \frac{L}{\gamma} < L. \quad (7)$$

a efektně se vyrovnal se zadáním a možnostmi místa určeným pro tyto hodiny. Rovněž zajímavý byl jeho příspěvek o použití programu Sketchup při 3D návrhu slunečních hodin.

V posledním příspěvku jsem se věnoval projektu Sundial Atlas, kde jsem přitomně seznámil s možnostmi, jak se aktivně do tohoto projektu zapojit. Po pásmu přednášek následovala diskuze o pořadání dalších akcí v příštím roce.

Jelikož přišlo celý den i noc, vůbec nás nepřekvapilo, že špatné počasí pokračovalo i v neděli ráno, když jsme vyjžděli za dalšími hodinami. První se nacházely na domě v Těšovicích. Na téměř západní stěně se pod číselníkem s rozsahem XI–XII–V nalézá kresba motoristy jedoucího na historickém motocyklu se sajdkou a spolujezdcem. S podobným motivem jsme se zatím nikdo neseťkali.

Další cesta vedla ve směru na Kynšperk, konkrétně do obce Kolová v Libavském Údolí. Zde jsme viděli nejpěknější hodiny z námi navštívených. Hodiny jsou velice vkusně namalované na jižní stěně domku. Kromě slunečního času ukazují také čas od východu a do západu Slunce, délku dne a noci, mají analemu pro pravé poledne a sedm datových čar s vyznačenými znaky zodiaku. Chápeme, že „Tempus Fugit“, jak hlásí jeden z textů na číselníku, ale přivítání majitelem a autorem panem Řezníčkem je tak vřelé, že neodoláme a přijímáme pozvání dále. Zde jsme bohatě pohostění čerstvě upečenou bábovkou (respektive dvěma), domácím moštem a dalšími dobrotami. Paní Řezníčková velice ochotně odpovídá na všetečné otázky, až ji závidíme pohodu, která z ní vyzařuje. Pan Řezníček nám podrobně vysvětluje funkci i jednotlivé doplňky jeho slunečních hodin, seznamuje nás i s jeho způsobem měření azimutu stěny, s návrhem a vlastní konstrukcí hodin.

Řezníčkovi mají ještě jednu sluneční hodiny, a to na nedaleké stodole, ke které nás velice ochotně doprovázejí. Hodiny jsou velice podobné, liší se jen orientací stěny a tématem pozadí. Na rozloučenou si přijíme domácí slivovičku a jsme pozváni, ať se zase někdy zastavíme.

Nejedeme daleko, jen do Kynšperku nad Ohří, do ulice M. Tyrše k domu pana Duška, který nás hned vítá a ukazuje nám své sluneční hodiny a zahradu. Jedny hodiny se nacházejí přímo na domě, konkrétně na téměř jižní stěně nad verandou, mají rozsah V–XII–III. Druhé, polární válcové, jsou na zahradě kousek nad domem. Zde jsme ještě seznámeni se dvěma typy barometrů, několika ze dřeva vyhotovenými bájnými postavíčkami a se zkušenostmi s pěstováním hroznového vína.

Dál jedeme do Františkových Lázní. Nejdříve si jdeme prohlédnout pěkně vylakované hodiny v ulici Na Vrchu, které jsou viditelné pouze ze zahrady. I přesto, že přijždíme mnohem později než bylo domluveno, jsme vpuštěni do prostoru zahrady, odkud je možno si hodiny vyfotit.

Autá necháváme na místním placeném parkovišti a vydáváme se pěšky do lázeňského centra. Zde opět posloucháme vyčerpávající výklad pana Fischera, ze kterého je vidět, že je velice dobře obeznámen s historií a architekturou celé

hodiny umístěné na sloupku. Během návštěvy jsme byli mimo jiné obeznámeni s restauračním pracem na zdejším kostele.

Po této návštěvě jsme pokračovali zpět do Karlových Varů. Auta jsme nechali na parkovišti u Tržnice a absolvovali malý městský okruh. Cestou jsme mimuli sochu, kterou někteří cizinci pokládají za Lenina nebo Dvořáka, s nimiž má nápadnou podobu. Naštěstí je zde cedulka, která nás ujistila, že se opravdu jedná o T. G. Masaryka. Na skutečnou sochu Lenina jsme narazili také, ale až v Chebu. Procházíme ulicemi lemovanými honosnými vilami k naší další zastávce, kterou je pravoslavný kostel sv. Petra a Pavla s pěti pozlacenými cibulemi, postavený podle vzoru stojícího nedaleko od Moskvy. Zde obdivujeme úžasnou architekturu a výzdobu; je to vskutku jedna z památek, kterou nelze přehlédnout.

Nedaleko pod kostelem se v ulici Sadová nacházejí na věži lázeňského domu Chopin svíslé sluneční hodiny konstruované na válcové ploše s rozsahem od 5. do 12. hodiny s půlhodinovým dělením.

Po obědě v 15 km vzdálené restauraci Pod kaštanem v obci Hory jsme pokračovali v procházce po Karlových Varech prohlídkou lázeňského centra, vřídelní kolonády a podzemního vřídla. Ovšem hlavní věcí, kvůli které jsme zde byli, jsou nádherné provedené analematické hodiny. Rozměr jejich číselníku je 3,6 krát 2,8 m a je vyhotoven jako bronzová plastika v dláždění chodníku. Po obvodu číselníku jsou ztvárněné tři vznášející se výly jako symbol jednotlivých složek vyvěrajícího pramene, kterými jsou minerály, voda a plyny. Plastika je doplněna texty vztahujícími se k časům pro užívání vody. Uprostřed vlastní plastiky je kamenná datová deska sloužící k určení místa, kde je třeba se v závislosti na datu postavit, aby náš stín ukazoval správný čas.

Po vyčerpávajícím výkladu, kterého se nám dostalo od bývalého ředitele Správy přírodních léčivých zdrojů a kolonád RNDr. Tomáše Vylita, jsme pokračovali prohlídkou karlovarského podzemí, konkrétně podzemního vřídla, která pro nás byla rovněž velice poučná. Zde jsme viděli výrobu tradičních karlovarských suvenýrů — kamenných růží. Setkání se zúčastnil rovněž současný ředitel SPLZaK ing. Trnka. Zbytek tohoto deštivého dne jsme strávili individuální prohlídkou města, ochutnáním jednotlivých pramenů, nákupem suvenýrů a oplátků.

Náš večerní program byl věnován přednáškám o slunečních hodinách. Jako první vystoupil Vratislav Zíka, který nás druhým pokračováním povídání o nevyklých slunečních hodinách uvedl do problematiky projekce rovníkového číselníku do různých rovin. Zde jsme se dozvěděli o možnosti konstrukce analematických hodin tak, aby výsledný číselník byl na kružnici. Tyto hodiny se též nazývají Foster-Lambertovy. Samozřejmě se tato konstrukce dotýká i vlastního ukazatele, který nejenže není kolmý, ale dokonce může být i dvojitý. Další zajímavostí, se kterou jsme byli seznámeni, byly sluneční hodiny ukazující hvězdný čas.

I druhá přednáška byla velice poučná. Zde nás Jindřich Traugott seznámil s řešením slunečních hodin na budově gymnázia Nový PORG v Krči. Vtipně

Pohybující se pozorovatel tedy vždy naměří kratší vzdálenost! Jedná se o relativistický jev *kontrakce délek*.

Konečně mějme v S dvojce synchronizované nelybné hodiny a v S' pozorovatele. Tiknutí hodin jsou události současně v S , tzn. $T_1 = T_2$, které však nastaly na různých místech $X_2 - X_1 \neq 0$. Co uvidí pozorovatel v S' ?

$$T_2' - T_1' = \gamma \left[T_2 - \frac{V}{c^2} X_2 - T_1 + \frac{V}{c^2} X_1 \right] = -\gamma \frac{V}{c^2} (X_2 - X_1) \neq 0. \quad (8)$$

Události, které evidentně byly současně v S , nejsou současně v S' ! Důsledkem Lorentzovy transformace je tedy *relativnost současnosti* (neexistence absolutního času).

Relativistická dynamika

Newtonovské pohybové zákony je potřeba upravit, aby vyhovovaly Lorentzově transformaci. Osvědčilo se zavést hybnost jako:¹

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (9)$$

kde m označuje relativistickou hmotnost, jež souvisí s klidovou hmotností m_0 vztahem:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma_v m_0, \quad (10)$$

a definovat sílu jako:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (11)$$

Pamatujme přitom, že obecně neplatí klasický vztah $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Uvažujme nyní o zavedení kinetické energie E_k . Stejně jako v klasické mechanice bude přírůstek energie dE_k roven práci $W = F dr$ vykonané silou F na dráze dr , čili:

$$\begin{aligned} dE_k &= F dr = \frac{dp}{dt} dr = dp v = \frac{dp}{dv} dv v = \left[\frac{dm}{dv} v + m \frac{dv}{dv} \right] v dv = \\ &= \left[m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2} v + m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] v dv = \\ &= m_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} v dv. \end{aligned}$$

¹ Jak lze ověřit myšlenkovými experimenty s rázy, zůstává pak v platnosti zákon zachování hybnosti, avšak musíme rezignovat na zachování hmotnosti, viz např. [9].

$$E_k = \int_v dE_k = m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C = \underbrace{m^2 c^2}_{E_0} - m_0 c^2,$$

kde integrační konstantu $C = -m_0 c^2$ jsme volili tak, aby pro $v = 0$ vycházelo $E_k = 0$. Na první člen výrazu lze nahlížet jako na celkovou energii E , druhý reprezentuje klidovou energii E_0 . Obdrželi jsme tak ekvivalenci hmoty a energie:

$$E = m c^2. \quad (12)$$

Užitečný je též vztah energie a hybnosti (ověřitelný dosazením z (9) a (12)):

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (13)$$

Vrátíme se však k transformacím. Transformační vztahy pro rychlosti odvodíme přímo z definice rychlosti:

$$\mathbf{v} \equiv \left(\frac{dX}{dT}, \frac{dY}{dT}, \frac{dZ}{dT} \right),$$

totéž napíšeme s čárkovanými souřadnicemi, zderivujeme Lorentzovu transformaci (2), přičemž vyjádříme i dT/dT' a posléze v'_x . Vychází:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}. \quad (14)$$

Mimochoodem po dosazení za $v_x = c$, dostaneme $c' = c$, čili rychlost světla je invariant ve všech inerciálních soustavách. Totéž bychom mohli udělat pro energii a hybnost:

$$E' = \gamma(E - V p_x), \quad p'_x = \gamma \left(p_x - \frac{V E}{c^2} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z. \quad (15)$$

Pro sílu bychom postupovali takto:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dT}, \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dT'} = \frac{d\mathbf{p}}{dT} \frac{dT}{dT'},$$

využijeme $E = m c^2$, $\frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ a pak vyjde:

$$F'_x = F_x - \frac{V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \frac{v_y F_y + v_z F_z}{c^2}, \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)},$$

$$F'_z = \frac{F_z}{\gamma \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)}. \quad (16)$$

Podzimní setkání přátel slunečních hodin se konalo ve dnech 25. a 26. září v Karlových Varech. Organizace této akce se velice úspěšně zhostili pan Bruno Fischer s paní Marií Hellerovou. Z důvodů značné odlehlosti jsem se já i většina dalších účastníků rozhodli přijet již v pátek, čehož jsme hodlali využít k neformálnímu setkání, kde bychom měli dostatek času na probírání některých otázek ohledně zlepšení práce našeho spolku.

Tentokrát jsem se rozhodl absolvovat cestu do Karlových Varů vlakem a autobusem, ale nakonec jsem byl nucen ji absolvovat celou vlakem. Do Karlových Varů jsme tak přijeli až se šestou hodinou večerní, a to jsem při pohledu na zdejší nádraží dlouho nechtěl věřit, že jsem v onom proslulém městě! Po sedmé hodině jsme se s ostatními členy spolku sešli v restauraci penzionu Hestia, kde se při lehké večeři rozproudila bohatá diskuze, jak ohledně plánu našeho výletu i kolem činností spolku.

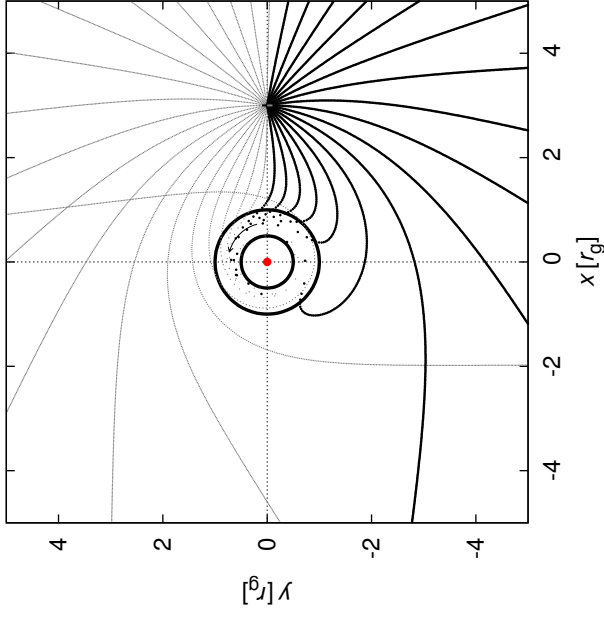
Jelikož byl oficiální začátek až v sobotu dopoledne, využil jsem právě probíhající akce „Noc vědců“, v rámci které byla místní hvězdárna otevřena nepřetržitě 24 hodin. Na hvězdárně, na níž jsem dorazil brzy nad ránem, jsem byl přivítán a ochotně proveden sympatickou dvojicí zdejší astronomické omladiny. Tato síce menší, ale velice útulná hvězdárna, je situována vysoko nad městem, kde je schovaná mezi stromy. Hvězdárna se může pyšnit bohatou popularizační činností a slušnou návštěvností, čemuž určitě nemálo přispívá i poměrně snadná dostupnost autobusem městské hromadné dopravy. Bohužel jsem se zde nemohl zdržet déle a zakrátko jsem spěchal zpět na místo srazu. Úderem deváté se nás sešlo celkem 12 účastníků a podle plánu jsme vyjeli čtyřmi auty do deštivého dne za slunečními hodinami a dalšími zajímavostmi Karlovarska.

Naše první zastávka byla v Nejdku, kde jsme pěšky obešli celkem troje sluneční hodiny. První byly hned na začátku Dvořákovy ulice na JV stěně rodinného domu. Číslice v rozsahu VIII–XII–II jsou nakreslené na plastové stuze a připevněné na zdi ze strany ulice, pod šikmým ukazatelem ozdobeným vytepaným sluníčkem.

Kousek dále v Poštovní ulici jsme obdivovali velice pěkné sluneční hodiny situované na JJZ stěně právě rekonstruovaného domu. Výmalba číselníku se skládá ze čtyř obrazů reprezentujících zemědělské práce čtyř ročních období. Číslice, které nebyly nikdy patrné, se pravděpodobně nacházely na stuze ve spodní části. Ukazatel byl v době naší návštěvy demontován z důvodu jeho renovace.

Za třetími hodinami jsme museli jít ještě kus cesty do ulice Dukelská. Hodiny jsou zhotovené z lišt připevněných na ZSZ stěně domu, avšak bez viditelných číslic.

Asi po půl hodině jsme pokračovali k hodinám, jež se se nacházejí v části Karlových Varů zvané Sedlec. Zde jsme byli přivítáni panem Kůrkou a jeho synem. Tito si na zahrádě společně navrhli a vytvořili pěkné polární prstencové sluneční



Obr. 9 — Rotující černá díra a trajektorie fotonů letících ve směru (šedě) a proti směru rotace (černě), vypočtené integrací geodetických rovnic v Kerrově metrice. Hodnota parametru momentu hybnosti byla zvolena mezní, $a = r_g/2$. Pro $a \leq r_g/2$ totiž existují v řešení dva horizonty, vnitřní a vnější: $r_{\text{inner}} = \frac{1}{2}(r_g + (r_g^2 - 4a^2)^{1/2})$, $r_{\text{outer}} = \frac{1}{2}(r_g + (r_g^2 - 4a^2 \cos^2 \vartheta)^{1/2})$. Pokud by bylo $a > r_g/2$, vznikla by nahá singularita. Prostor mezi horizonty je ergosférou, ze které je teoreticky možné odebírat energii černé díry Penroseovým procesem.

- [1] CARROL, S. M. *Lecture Notes on General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. (<http://preposterousuniverse.com/grnotes/>).
- [2] *Gravity Probe B* [online]. [cit. 2010-04-01]. (<http://einstein.stanford.edu/>).
- [3] HAMILTON, A. *Falling into a black hole* [online]. [cit. 2010-03-17]. (<http://casa.colorado.edu/~ajsh/schw.shtm1>).
- [4] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M. *Mechanika ve fyzice*. Praha: Academia, 2001. ISBN 8020002081.
- [5] CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. New York: Oxford University Press, 1998. ISBN 0198503709.
- [6] KERR, R. P. *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*. *Phys. Rev. Lett.*, **11**, s. 237–238, 1963.
- [7] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.
- [8] *Reduce* [online]. [cit. 2010-03-08]. (<http://www.reduce-algebra.com/>).
- [9] ŠEDIVÝ, P. *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. Hradec Králové: MAFY, 2003. ISBN 8086148653.

Nyní máme všechny potřebné vztahy pro odvození *relativistické pohybové rovnice*:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dT} = \frac{dm}{dT}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dT} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dT}\mathbf{v} + m\mathbf{a},$$

$$\text{neboli:} \quad \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (17)$$

Vyzkoušíme si relativistickou dynamiku na raketě, která zrychluje působením konstantní síly (v systému S spojeném s raketou) $\mathbf{F} = (F, 0, 0)$. Nás samozřejmě zajímá pohled z vnějšího (systému S'). Transformace pro sílu (16) působící *pouze* ve směru x je jednoduchá: $F'_x = F_x$. Použijeme přímo $\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dT'}$ (v tomto případě je to snazší než použití rovnice (17)):

$$F' = \frac{d}{dT'}m'v' = \frac{d}{dT'}\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}v' = F.$$

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}v' = FT', \quad (18)$$

První integrace podle času T' dává:

odkud prostě vyjádříme rychlost v' (a zavedeme klidové zrychlení $a_0 = \frac{F}{m_0}$):

$$v' = \frac{a_0 T'}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 T'}{c}\right)^2}}. \quad (19)$$

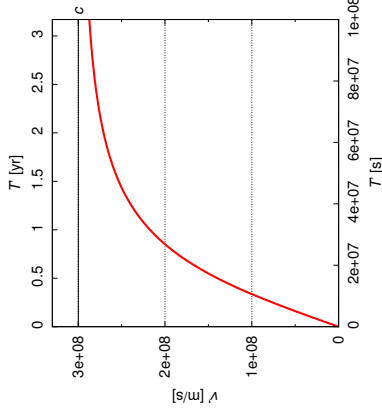
Všimněme si (dle obr. 2): pro $a_0 T' \ll c$ máme klasicky $v' = a_0 T'$; pro $T' \rightarrow \infty$ jde $v' \rightarrow c$. Poznamenejme nakonec, že přísně vzato systém S *není* inerciální, ale protože raketa zrychluje pomalu, můžeme pro aktuální rychlost v považovat S za inerciální a neinerciální členy za zanedbatelné.

Minkovského prostorčas

Interval mezi událostmi definovaný jako:

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (20)$$

je pozoruhodná veličina, neboť je *invariantní* vůči Lorentzově transformaci ($ds^2 = ds'^2$, jenž je vyjádřen pomocí čárkovaných souřadnic).



Obr. 2 — Rychlost rakety v' s klidovou hmotností $m_0 = 1$ kg, na kterou působí síla $F = 10$ N, v závislosti na čase T' .

Abychom relativistické výpočty zjednodušili, zavedeme čtyřrozměrný *Minkowskiho prostoročas* a souřadnice označíme $(X^0, X^1, X^2, X^3) = (cT, X, Y, Z)$. Interval (20) pak počítáme jako:²

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \equiv g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu, \quad (21)$$

příčmenž přes opakující se indexy μ a ν automaticky sčítáme. Metrický tenzor $g_{\mu\nu}$ je v případě plochého prostoročasu a kartézských souřadnic jednoduchý:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Pohyby v prostoročase znázorňujeme *světločárou*. Na Minkovského diagramu (X, cT) se jedná o křivku (viz obr. 3). Na diagramu snadno rozlišíme minulost ($cT < 0$) a budoucnost ($cT > 0$) vzhledem k počáteční události $(0, 0)$. Důležitější je však rozdělit diagram přímkami $cT = X$. Příslušné intervaly ds mezi počáteční událostí $(0, 0)$ a bodem na diagramu nazýváme:

- *časupodobné* (je-li $ds^2 > 0$, tzn. uvnitř kužele, pohybují se po nich reálné částice s $m_0 > 0$);
- *světelné* ($ds^2 = 0$, na kuželi, odpovídají pohybu fotonů s $m_0 = 0$);

² Obdobně máme v Euklidově prostoru vzdálenost vyjádřenu Pythagorovou větou $ds^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2$.

Třetí jev se nazývá gravitační *rudý posuv*, neboť jde o změnu periody při porovnáání ze dvou míst s různými gravitačními potenciály.⁶

$$\Delta\tau_B = \sqrt{\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)}} \Delta\tau_A \doteq \left[1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \right] \Delta\tau_A. \quad (48)$$

Relativní změna frekvence ve spektru Slunce je řádově $\Delta\nu/\nu \doteq -2 \cdot 10^{-6}$.

Kerrové řešení a Lensův–Thirringův jev

Kerr (1963) našel řešení Einsteinových rovnic pro případ *rotujícího* objektu:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_g r}{\varrho^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\varrho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{r_g r a \sin^2 \vartheta}{\varrho^2} & 0 & 0 & -\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2 \vartheta}{\varrho^2} \right) \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (49)$$

kde funkce:

$$\varrho^2(r, \vartheta) = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta, \quad (50)$$

$$\Delta(r) = r^2 - r_g r + a^2, \quad (51)$$

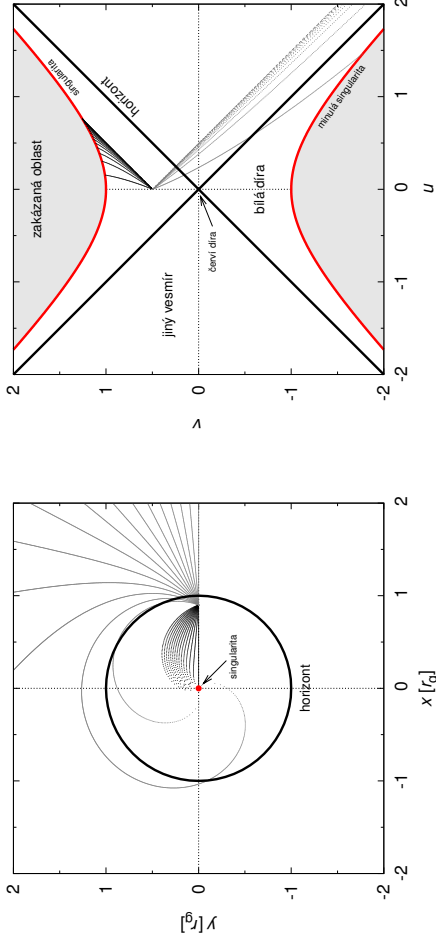
a konstanta a zahrnuje moment hybnosti L centrálního objektu:

$$a = \frac{L}{Mc}, \quad [a] = \text{m}. \quad (52)$$

Je podstatně složitější než řešení Schwarzschildovo, neboť zde neplatí sférická symetrie, ale pouze axiální. Rovnice pro světločáry bychom však zkonstruovali zcela stejným postupem jako v kap. 0.0.

Novým jevem v Kerrově řešení je prostoročasový „vír“ strhávající trajektorie částic, nazývaný *Lensův–Thirringův jev*. Obzvlášť dobře je vidět na částicích, které nalétávají proti směru rotace (obr. 9). Měření tohoto jevu na oběžné dráze kolem Země se uskutečnilo pomocí dokonalého setrvačnicku na sondě Gravity Probe B [2].

⁶ Na metriku lze lokálně nahlížet jako na gravitační potenciál v daném místě. Dle aproximace slabého pole je např. $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$.



Obr. 8 — Pohyb fotonů pod horizontem černé díry. Začneme-li integraci na $r = 0,9 r_g < r_g$, $u^i = (\frac{dx^i}{ds}, \frac{v}{c})$, $|\mathbf{v}| = c$, všechny *budoucí* světločáry nevyhnutelně směřují k singularitě v centru. Nenecháme se zmýlit světločárami, které zdánlivě směřují ven z černé díry! Pokud zkontrolujeme Kruskalův diagram vpravo, okamžitě rozpoznáme, že tyto fotony přilétají z minulosti. Jinými slovy: Einsteiny rovnice, potažmo rovnice geodetik, dovolují i řešení, ve kterém fotony (nebo částice) vylétují z *minimální* singularity, vynořují se zpod horizontu bílé díry, letí normálním vesmírem a nakonec padají do černé díry. Toto matematické řešení se ale v přírodě patrně vůbec nerealizuje, protože by porušovalo druhý termodynamický zákon.

Ohyb světla, precese perihelia a rudý posuv

Analytické řešení geodetických rovnic pro Schwarzschildovu metriku [4] přímo poskytuje vztahy pro tři důležité relativistické jevy, které se uplatňují i ve sluneční soustavě. První je zmiňovaná *precese perihelia*, čili změna délky perihelia za 1 oběh o úhel:

$$\delta\varpi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (46)$$

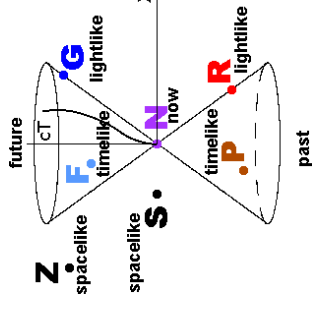
kde a označuje velkou poloosu dráhy, e excentricitu. Pro Merkur obíhající Slunce vychází $\delta\varpi \doteq 0,1''$ a za celé století $43''$.

Druhý je gravitační *ohyb světla*:

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{c^2 r_0}, \quad (47)$$

kde $\delta\varphi$ je úhel, o který se odchýlí paprsek procházející okolo tělesa o hmotnosti M , ve vzdálenosti r_0 . Pro Slunce vychází $\delta\varphi \doteq 1,7''$.

– *prostorupodobné* ($ds^2 < 0$, vně kužele, spojují absolutně odlehle události, které nemohou mít žádnou příčinnou souvislost).



Obr. 3 — Minkowského diagram se znázorněním světelného kužele, jedné světločáry a příklady událostí.

Délku světločáry lze poměřovat vlastním časem τ , který je měřen hodinami pohybujícími se podél světločáry (spolu s objektem):

$$ds = \sqrt{c^2 dT^2 - (dX^2 + dY^2 + dZ^2)} \frac{dT}{dT} = \sqrt{c^2 - v^2} dT = c \frac{dT}{\gamma_v} = c d\tau. \quad (23)$$

Namísto obvyklých fyzikálních veličin je vhodné zavést *čtyřvektory*, které se transformují stejně jako souřadnice X^i podle (2). Výhody to má dvě: i) nemůžeme si pamatovat mnoho transformačních vztahů, nýbrž jen jeden; ii) velikost čtyřvektoru je invariant, stejně jako interval ds (20). Základními čtyřvektory jsou čtyřrychlost:

$$\mathbf{u} = u^i = \frac{dX^i}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dX^i}{dT} = \frac{\gamma_v}{c} (c, \mathbf{v}), \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq \gamma, \quad (24)$$

čtyřhybnost:

$$\mathbf{P} = P^i = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{P} \right),$$

čtyřzrychlení:

$$\mathbf{w} = w^i = \frac{dw^i}{ds} = \frac{d^2 X^i}{ds^2}$$

a Minkowského čtyřsila:

$$\mathbf{F}_M = F_M^i = \gamma v \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}, \mathbf{F} \right). \quad (25)$$

Pohybové rovnice pak nabývají povědomý tvar:

$$\frac{dP^i}{dt} = F_M^i. \quad (26)$$

Úlohu o raketě bychom pomocí čtyřvektorů řešili takto: v soustavě S spojené s raketou je $v = 0$, $\gamma_v = 1$ a Minkowského čtyřsila (25) tedy $F_M^i \equiv (F_M^0, F_M^1, F_M^2, F_M^3) = (0, F, 0, 0)$. Tato se transformuje stejně jako souřadnice dle (2), čili v soustavě S' pohybující se rychlostí $V = -v$ máme:

$$F_M^{\prime i} = \left(\gamma \left[F_M^0 - \frac{V}{c^2} F_M^1 \right], \gamma \left[F_M^1 - V F_M^0 \right], F_M^2, F_M^3 \right) = \left(\frac{v}{c^2} F, \gamma F, 0, 0 \right).$$

Dosadíme do pohybové rovnice (26) napsané pro čárkovanou soustavu:

$$\frac{dP^{\prime i}}{d\tau'} \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{dE'}{d\tau'}, \frac{dp'_x}{d\tau'}, \frac{dp'_y}{d\tau'}, \frac{dp'_z}{d\tau'} \right) = F_M^{\prime i} = \left(\frac{v}{c^2} F, \gamma F, 0, 0 \right).$$

Její složka 1 je (s uvážením (23)) $ds = c d\tau = c \frac{dT}{\gamma_v}$ a $\gamma_v = \gamma$):

$$\frac{dp'_x}{d\tau'} = \frac{dp'_x}{dT'} = \gamma F,$$

což je velmi jednoduchá diferenciální rovnice, jejíž první integrál:

$$p'_x = FT'$$

je zcela shodný s rovnicí (18), neboť hybnost je definována jako $p'_x \equiv \gamma m_0 v'_x$.

Setrvačná a gravitační hmotnost

Gravitace je unikátní — je to jediná síla, pro kterou lze v klasických pohybových rovnicích:

$$F_s = \cancel{m} a = F_g = \frac{GM \cancel{m}}{r^2} \quad (27)$$

zkrátit $m_{\text{setrvačná}}$ a $m_{\text{gravitační}}$, protože jsou si rovny (s přesností lepší než 10^{-11}). Je možné, že setrvačnost (Newtonovy pohybové zákony) nějak souvisí s rozložením vzdálených hmot ve vesmíru? Podle *Machova principu* tomu tak je, ale princip není možné ověřit.³

³ Mimo jiné by to znamenalo, že ve vědru by vznikla parabolická hladina, kdybychom roztočili okolní vesmír. Globální pohyb by tak způsobil lokální změnu.

$r > r_g$):

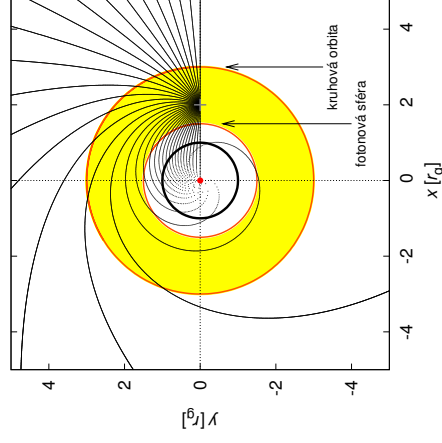
$$u = \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} \exp\left(\frac{r}{2r_g}\right) \cosh\left(\frac{ct}{2r_g}\right),$$

$$v = \sqrt{\frac{r}{r_g} - 1} \exp\left(\frac{r}{2r_g}\right) \sinh\left(\frac{ct}{2r_g}\right).$$

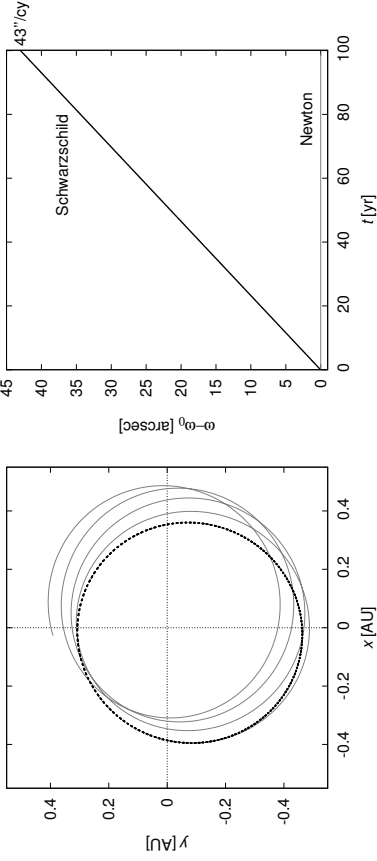
Pro $r < r_g$ musíme prohodit členy pod odmocninou a hyperbolické siny s kosiny. Drobnou překážkou je, že funkci $r(u, v)$ nelze vyjádřit explicitně. Existují však algoritmy, které funkci inverzní k $f(r) = r \exp(r)$, nazývanou Lambertova funkce $W \equiv f^{-1}(r)$, vyčíslují numericky. Pak je:

$$r = r_g \left[1 + W\left(\frac{u^2 - v^2}{e}\right) \right].$$

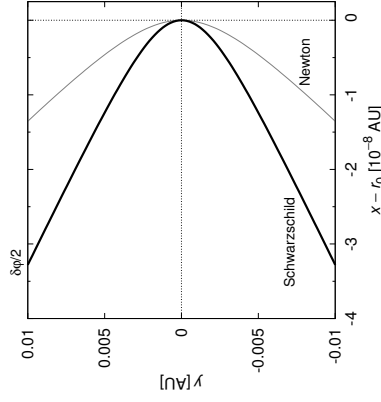
Příklady výpočtů v Kruskalových souřadnicích ukazují obr. 7 a 8. Zároveň demonstrují zásadní odchylky od newtonovské dynamiky, která v blízkosti $r \simeq r_g$ vůbec neplatí.



Obr. 7 — Pohyb částic v okolí černé díry. Počáteční souřadnice $x^i = (0, 2r_g, 0, 0)$, čtyřrychlost $u^i = (\frac{dct}{ds}, \frac{2x}{c}, \mathbf{v})$, kde rychlost $|\mathbf{v}| = 0,7c$ směřuje ve směru $\varphi \in (0, 180^\circ)$, s krokem 5° , a souřadnice $\vartheta = 0$. Integrace rovnic geodetik byla provedena buď v souřadnicích sférických (pokud částice odletávají pryč), nebo v Kruskalových (pokud se přibližují centru). (a) Graf $(r, \varphi) \equiv (x, y)$. Horizont $r = r_g$ je zobrazen kružnicí; navíc je znázorněna fotonová sféra $r = 1,5 r_g$, kde mohou obíhat fotony rychlostí světla c , poslední stabilní kruhová orbita na $r = 3 r_g$ a oblast nestabilních kruhových orbit $r \in (1,5 r_g, 3 r_g)$. Pod $r < 1,5 r_g$ žádné volné kruhové orbity neexistují, leda by na částice působila určitá síla ve směru r . (b) Tatáž situace na *Kruskalově diagramu* (u, v) . Horizont v těchto souřadnicích nabývá tvar přímky $u = v$, singularita v centru $r = 0$ je zobrazena jako hyperbola. Výhodou tohoto diagramu mimo jiné je, že lze snadno kreslit světelné kužele, které vymezují oblast, kam se mohou dostat reálné částice nebo fotony (po časopodobných respektive světelných geodetikách).



Obř. 5 — Orbitální vývoj planety Merkur počítaný ve Schwarzschildově prostoročase. Relativistické stáčení argumentu perihelia ve směru oběhu o 43'' za století je patrné na grafu $\omega(t)$. Tenkou čarou je na grafu (x, y) naznačena i trajektorie, jakou bychom viděli, kdyby rychlost světla byla $10^{-3}c$ (tzn. relativistické jevy o tři řády větší).



Obř. 6 — Ohyb světla ve Schwarzschildově metrice počítaný podle rovnic (40)–(43). Osa x má zcela jiné měřítko, aby byla vidět asymptotická odchylka směru o $\delta\varphi = 1,75''$. Tenkou čarou je pro porovnání vyneseno pohyby fotonu počítaný chybně „newtonovsky“, který vede k dvakrát menší hodnotě.

Při výpočtech si musíme dávat pozor na *souřadnicové singularity*. V našem problému jsou dvě: $r = r_g$ a $\theta = 0$ nebo π . Pohyb v okolí singularit bychom spočetli zcela chybně! Můžeme je nicméně odstranit vhodnější volbou souřadnic; třetí singularita v $r = 0$ je ovšem reálná a neodstranitelná. Problém s $r = r_g$ lze obejít například *Kruskalovými souřadnicemi* (pro

Gravitace působí na všechna testovací tělesa v daném místě stejným zrychlením a , tudíž ji lze vyjádřit jako křivost, pod vlivem které se pak tělesa pohybují *bez vlivu gravitační síly* (ale pod vlivem ostatních sil ano). To je východisko obecné relativity.

Einsteiny rovnice pole

Obecná teorie relativity (OTR) by se dala nejstručněji shrnout takto:

1. prostoročas je zakřivená pseudo-riemannovská varieta⁴ se signaturou metricky $(+---)$. Varietu používáme proto, že *lokálně* platí STR v plochém prostoročase;
2. vztah mezi křivostí prostoročasu a hmotou je dán *Einsteiny rovnícemi pole* (EFE):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (28)$$

kde $g_{\mu\nu}$ označuje metrický tenzor (zapsaný jako matice 4×4), $R_{\mu\nu}$ Ricciho tenzor, R Ricciho skalár (oba jsou jisté první a druhé parciální derivace metricky podle souřadnic), Λ kosmologickou konstantu, $T_{\mu\nu}$ tenzor energie a hybnosti a G, c obvyklé konstanty. Jde o soustavu 10 nezávislých nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. Jejím řešením je metrika $g_{\mu\nu}(x^m)$, tj. 10 neznámých funkcí 4 prostoročasných souřadnic. Analytické řešení bohužel neznáme, až na několik speciálních případů.

Přesnější definice jednotlivých veličin následují. Místo indexů $\mu\nu$ jsou zde použity ik , na konkrétním označení beztak nezáleží. Je nicméně důležité následně rozlišovat indexy horní a dolní. Mějme také na paměti Einsteiny sumační pravidlo, že přes opakující indexy v součinu se automaticky sčítá (od 0 do 3).

Horní indexy $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v^i$ označují *kontravariantní* složky vektoru v^i v kovariantní bázi: $\mathbf{e}_0 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 0, 1)$. Typickými kontravariantními vektory jsou poloha vzhledem k pozorovateli, rychlost, zrychlení. Souřadnice vektoru se transformují se opačně než báze; zvětšíme-li bázi, zmenší se souřadnice rychlosti (i když vektor samotný zůstane nezměněn).

Naopak dolní indexy $\mathbf{v} = \mathbf{e}'_i v_i$ označují *kovariantní* souřadnice vektoru v_i v kontravariantní bázi: $\mathbf{e}'^0 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}'^1 = (0, -1, 0, 0)$, $\mathbf{e}'^2 = (0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{e}'^3 = (0, 0, 0, -1)$. Příkladem kovariantního vektoru je gradient funkce nebo 1/rychlost. Transformují se stejně jako báze: zvětšíme-li bázi, zvětší se hodnota gradientu.

Tenzory mohou mít indexy smíšené. Pro metrický tenzor platí vztah: $g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i$, kde δ^j_i označuje Kroneckerovo delta (pro $i = j$ je $\delta = 1$, jinak $\delta = 0$); g^{ik} je vlastně inverzní matice k g_{ik} . Přechod mezi kovariantními a kontravariantními indexy (zvysňování a snižování indexů) lze zajistit násobením metrickým tenzorem:

$$T_{ij} = g_{ik}T^k_j = g_{ik}g_{jl}T^{kl}. \quad (29)$$

⁴ Např. na kružnici se mohou dívat jako na 1-rozměrnou varietu — zblízka vypadá jako přímka, ale při celkovém pohledu ve 2-rozměrném prostoru je tato zakřivená.

Ricciho skalární křivost (1 číslo) je:

$$R = g^{ik} R_{ik}, \quad (30)$$

Ricciho tenzor křivosti (10 nezávislých složek):

$$R_{ik} = R^l{}_{ilk}, \quad (31)$$

Riemannův tenzor křivosti (20 nezávislých složek):

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{lm}}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{nl} \Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{nm} \Gamma^n{}_{kl}, \quad (32)$$

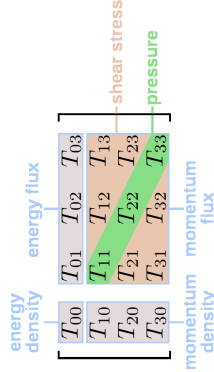
Christoffelovy symboly (40 funkcí prostorčasových souřadnic):

$$\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (33)$$

Komponentami tenzoru energie a hybnosti T_{ik} jsou hustota hmoty/energie ρ , tlak p , tok energie, smykové napětí, hustota hybnosti a tok hybnosti (viz obr. 4). Jednoduché T^{ik} má ideální tekutina:

$$T^{ik} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^k + p g^{ik}, \quad (34)$$

kde u^i je čtyřrychlost (24). Pro prach (tj. dobré přiblížení hvězd) je dokonce $p = 0$. Pro získání T_{ik} lze využít vztah (29).



Obr. 4 — Tenzor energie a hybnosti v obecné podobě. Převzato z ??.

Pozor, ve skutečnosti je problém ještě složitější — musíme totiž zároveň řešit vývoj T_{ik} , který může být ovlivněn g_{ik} ! To znamená dalších 10 neznámých funkcí. Soustavu musíme doplnit o rovnici kontinuity (resp. 4 rovnice):

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{mk} T^{mk} + \Gamma^k{}_{mk} T^{im} = 0 \quad (35)$$

end;
write df(x(i),s,2), " + ", Ch, " = 0";
end;

Konkrétně pro čtyři souřadnice $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, r, \vartheta, \varphi)$ obdržíme:

$$\frac{d^2 ct}{ds^2} = -\frac{A'}{A} \frac{dr}{ds} \frac{dct}{ds}, \quad (40)$$

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\frac{1}{2} A A' \left(\frac{dct}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + A r \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + A r \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\vartheta}{ds} + \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2, \quad (42)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} = -2 \cotg \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} \frac{d\varphi}{ds} - \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds}. \quad (43)$$

Tyto rovnice geodetik lze řešit analyticky či numericky. Snadno například upravíme integrátor RK4 z kap. ?? — cykly od 1 do $3n$ přepíšeme na $1 \dots 4n$, aby pracovaly se čtyřmi souřadnicemi, a namísto subrutiny pro newtonovské gravitační zrychlení prostě použijeme výše uvedené rovnice (40)–(43). Nezapomejme, že počáteční čtyřrychlost musí být normovaná ($|\mathbf{u}| = \sqrt{g_{ik} u^i u^k} = 1$), z čehož odvozujeme její složku u^0 .

$$\frac{dct}{ds} = \sqrt{\frac{1}{A} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 1 \right]}. \quad (44)$$

Příklad pro pohyb Merkuru je uveden na obr. 5.

Pokud bychom nepočítali pohyb částic, ale *fotonů* s nulovou klidovou hmotností, kterým odpovídají světelné geodetiky s $ds = 0$, museli bychom počáteční derivaci ct nastavit podle této podmínky (a na $ds \neq 0$ pak nahlížet jako na zobecněný parametr křivky):

$$\frac{dct}{ds} = \sqrt{\frac{1}{A} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{ds} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right]}. \quad (45)$$

Příklad výpočtu ohybu světla ukazuje obr. 6.

Riemannův tenzor:

$$R_{101}^0 = -R_{110}^0 = -\frac{1}{2}A'', \quad R_{202}^0 = -R_{220}^0 = -\frac{1}{2}A'r,$$

$$R_{303}^0 = -R_{330}^0 = -\frac{1}{2}A'r \sin^2 \vartheta, \quad \dots \quad \text{má celkem 24 nenulových složek.}$$

Ricciho tenzor je pochopitelně symetrický (jako g_{ik}):

$$R_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}AA'' + A'r^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A'' - \frac{A'}{r}r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-A-A'r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-A-A'r) \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}$$

a křivost

$$R = 2Ar^{-2} + 4A'r^{-1} + A'' - 2r^{-2}.$$

Dosadíme-li nakonec za $A = 1 - r_g r^{-1}$, $A' = r_g r^{-2}$, $A'' = -2r_g r^{-3}$, obdržíme všechny $R_{ik} = 0$ i $R = 0$, čili se skutečně jedná o vakuumé řešení Einsteinových rovnic (36).

Světotočary

Nalezení světočar, po kterých se pohybují testovací „nehmotné“ částice v zakřiveném prostoročase, je *další* úloha, kterou ještě budeme muset udělat! Zatím máme pouze popsání křivost pomocí metriky g_{ik} . Využijeme pro to *rovnice geodetiky* (která je určená metrikou, respektive Christoffelovými symboly):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (39)$$

Získáme tak polybové rovnice pro částice, přesněji diferenciální rovnice 2. řádu, které když vyřešíme, získáme trajektorie těchto částic. Nezávislá proměnná $s = c\tau$ zde parametrizuje křivku obdobně jako čas t v newtonovské teorii. Prakticky lze rovnice vyjádřit tak, že k předchozímu kódu v Reduce doplníme pár řádků:

```
ct(s); Y;           % souradnice jako zavisle promenne
r(s); Y;
theta(s); Y;
phi(s); Y;
coords := mat((ct(s), r(s), theta(s), phi(s)));

for i := 0:3 do begin
  Ch:=0;
  for j := 0:3 do begin
    for k := 0:3 do begin
      Ch:=Ch + Gamma(i,j,k) * df(x(j), s) * df(x(k), s);
    end;
  end;
```

a stavovou rovnici (resp. 6 rovnic), aby byl problém plně určený.

Schwarzschildovo řešení

Nejjednodušší možná situace, jakou si vůbec dokážeme představit, je osamocený hmotný bod ve vesmíru. Jak vypadá okolní časoprostor? Vzhledem k tomu, že okolo je vakuum ($T_{ik} = 0$), zjednoduší se Einsteinovy rovnice na ($\Lambda = 0$, hraje roli pouze v kosmologických aplikacích):

$$R_{iik} = 0. \quad (36)$$

My rovnice řešit nebudeme, ale rovnou napíšeme sféricky symetrické *Schwarzschildovo řešení*:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (37)$$

kde jsme zavedli gravitační poloměr:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (38)$$

a dosazením do EFE ověříme jeho platnost. Pro přehlednost označme $A(r) \equiv 1 - \frac{r_g}{r}$. Odpovídající metrický tenzor je zřejmě:⁵

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Derivace metriky nebudeme počítat „ručně“, nýbrž si ukážeme výpočet pomocí algebraického manipulátoru Reduce [8]. V programu `schwarzschild.red` se používají v podstatě dva příkazy, `mat()` pro deklaraci matice a `df(fce, promenna)` pro derivaci funkce:

```
%% oznaceni souradnic (x^0,x^1,x^2,x^3) <=> (c*t,r,theta,phi)
matrix coords(1,4);
coords := mat((ct,r,theta,phi));
procedure x(i); coords(1,i+1);           % matice se indexuji od 1, nikoli od 0!
%% Schwarzschildova metrika g_ik
A(r); Y;                                 % obecna fce r namisto 1-r_g/r
```

⁵ Provedeme-li $\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1$, dostaneme metricku (22) *plochého* Minkowského prostoročasu, pouze zapsanou ve sférických souřadnicích.

```

%A(r) := 1-r_g/r;
% konkretni tvar A(r), zakomentovano

g := mat(
(A(r), 0 , 0 , 0 ),
(0 , -(A(r))^-1, 0 , 0 ),
(0 , 0 , -r^2, 0 ),
(0 , 0 , 0 , -r^2 sin(theta)^2)
);

g_ := 1/g; % kontravariantni metrika g^ik <=> inverzni matice
%% Christoffelovy symboly

procedure Christoffel(i,k,l); begin
scalar Ch;
Ch:=0;
for m := 0:3 do begin
Ch:=Ch + 1/2 * g_-(i+1,m+1) *
( df(g(m+1,k+1), x(1)) + df(g(1+1,m+1), x(k)) - df(g(k+1,l+1), x(m)) )
end;
return trigsimp(Ch) % zjednodusi goniometricke fce
end;

for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
for l := 0:3 do begin
Gamma(i,k,l) := Christoffel(i,k,l); % ulozeni do pole setri CPU time
if (Gamma(i,k,l) neq 0) then begin
write "Gamma",i,"_",k,l," = ",Gamma(i,k,l);
end;
end;
end;
end;

%% Riemannuv tenzor

procedure Riemann(i,k,l,m); begin
scalar Ri,n;
Ri := df(Gamma(i,k,m), x(1)) - df(Gamma(i,k,l), x(m));
for n := 0:3 do begin
Ri:=Ri + Gamma(i,n,l)*Gamma(n,k,m) - Gamma(i,n,m)*Gamma(n,k,l);
end;
return trigsimp(Ri);
end;

for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
for l := 0:3 do begin
for m := 0:3 do begin
Ri := Riemann(i,k,l,m);
if (Ri neq 0) then begin
write "R",i,"-",k,l,m," = ",Ri;
end;
end;
end;
end;
end;

end;
end;
end;

end;
end;
end;

%% Ricciho tenzor

procedure Ricci(i,k); begin
scalar Rc,l;
Rc:=0;
for l := 0:3 do begin
Rc:=Rc + Riemann(l,i,l,k);
end;
return trigsimp(Rc);
end;

for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
Rc := Ricci(i,k);
write "R_",i,k," = ",Rc;
end;
end;

%% Ricciho skalar

procedure R(); begin
scalar R,i,k;
R:=0;
for i := 0:3 do begin
for k := 0:3 do begin
R:=R + g_-(i+1,k+1) * Ricci(i,k);
end;
end;
return trigsimp(R);
end;

write "R = ", R();

showtime;
bye;

```

Spustíme-li reduce < schwarzschild.red, obdržíme tento výstup (po pře-
psání do \TeXu ; A' , A'' označují derivace $A(r)$ dle r):

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{A'}{A},$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} A A', \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2} \frac{A'}{A}, \quad \Gamma_{22}^1 = -A r, \quad \Gamma_{33}^1 = -A r \sin \vartheta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r^{-1}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = r^{-1}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cotg \vartheta.$$