

Lenka Trojanová, Miroslav Brož, Miroslav Krejčí: <i>Gravitační trychtýř</i>	4
Adam Zákravský: <i>Geminidy 2009</i>	13
Jaromír Čiesla: <i>Byzantské sluneční hodiny s kalendářem</i>	14
Jaromír Čiesla: <i>Sluneční hodiny 4. kvartálu</i>	18
Martin Lehký: <i>Zpráva o činnosti JST za rok 2009</i>	19
<i>Program Hvězdárny a planetária v Hradci Králové</i>	20

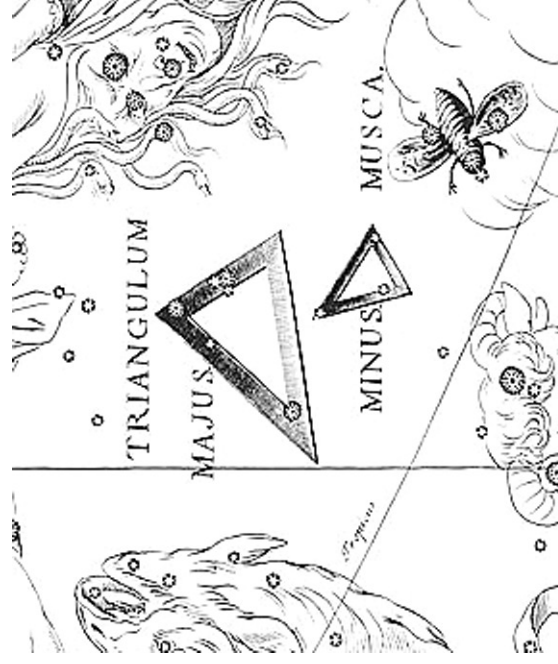
Dnem 25. prosince 2009 skončilo další kolo soutěže o hodiny kvartálu, kterého se zúčastnilo sedm hlasujících. I tentokrát bylo opravdu z čeho vybírat, a to zejména zaslouhou manželů Uhrinových, kteří nás stále ještě zásobují novými a mnohdy velice pěknými úlovkami ze své dovolené. Za uplynulé období přibýlo nebo bylo aktualizováno téměř sto záznamů, z nichž se do užšího výběru dostalo 15 domácích a 16 zahraničních.

V zahraniční části tentokrát na čele tabulky bodovala výlučně Itálie, a to se svíslými slunečními hodinami. Hned první nalezneme ve Strassoldo, Via Taglilio (IT XX 63). Tyto se umístily s osmi body na třetím místě. Nacházejí se na stěně domu mírně natočené k východu. Zajímavě řešené provedení číselníku na dvou rozvinutých svítících, spojených rovnodennostní přímkou, ohraničeného obratníky a se Sluncem v pozadí. Číselník je navíc doplněn tabulkou s časovou rovníčkou.

Za hodinami, které se umístily na druhém místě, je-li naši „lovci“ do městečka San Vito al Torre (IT XX 64); získaly 9 bodů. Zde jsou sluneční hodiny umístěné na východní stěně a navíc mají zajímavě řešený úchyt ukazatele. Číselník je ohraničen hyperbolami obratníků a je značen pro pravý i pro letní čas. Součástí číselníku je také graf časové rovnice.

Překvapivě se na první místo nedostaly hodiny mistrné zdobené či bohatě gnómonicky vybavené. Nicméně s přispěním třech hlasujících získaly deset bodů možná na první pohled obyčejné sluneční hodiny v Bressonne (IT BZ 27). Skloubení dvojitých různých hodin je však opravdu neobvyklé. Podívejme se na to ale ještě jinak. Historie těchto hodin mohla být docela zajímavá. Původně se totiž na církevních budovách objevovaly výlučné hodiny sluneční. Až s rozvojem mechanických byly sluneční hodiny nahrazeny. Přesnost prvních mechanických hodin ale byla poměrně malá, tudíž mnohdy sluneční hodiny zůstaly z důvodu seřizování přesného času. Mechanické hodiny zde zajišťovaly přehled o čase v době, kdy nesvítilo Slunce. Na věži Dom zu Brixen můžeme vidět takovou zajímavou kombinaci velkých mechanických hodin, pod kterými se nachází menší číselník rozdělený po čtvrt hodinách. Tento malý ciferník, jenž zde zastupuje minutovou ručičku, je umístěn v ploše jižních svíslých slunečních hodin.

V domácí části soutěže se umístily na třetím místě se ziskem deseti bodů hodiny z Vrchlabí, Vančurovy ulice čp. 1547 (TU 37). Svíslé sluneční hodiny na JV stěně jsou konstruované tak, aby konec stínu ukazatele ukazoval polohu Slunce mezi



Titulní strana: Gravitační trychtýř na hvězdárně v Hradci Králové, u kterého školní skupina sleduje spirálující kuličku. Experimentu přihlíží v pozadí Kepler a Einstein, ale první se tváří zcela nezájemně a druhý má oči v sloup a sprásknuté ruce. K článku na str. 4.

Na hvězdárnu jsme nedávno pořídili „gravitační trychtýř“ (viz obrázek na titulní straně). O jeho funkci pojednává následující článek; začneme však zeshora, fyzikálními souvislostmi. . .

Newtonův gravitační zákon a cesta k němu

Už od pradávna se naši předci pokoušeli pochopit pohyb planet. Nicméně až do 16. století byly tyto snahy spíše filozofického charakteru. Na svou dobu revoluční myšlenka dánského astronoma Tycho Brahe (* 1546, † 1601), tedy že pouze pravidelný a přesným měřením pohyb planet po obloze bude možné rozhodnout, jakou trajektorii planety opisují, odstartovala rozvoj nebeské mechaniky.

Náštestí nezůstalo jen u myšlenky. Tycho Brahe po dlouhá léta zaznamenával polohy planet. Jeho měření byla natolik přesná, že když je studoval mladý matematik Johannes Kepler (* 1571, † 1630), dokázal z nich odvodit *tři zákony*:

1. planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách. Slunce se nachází v ohnísku těchto elips;
2. plochy opsané průvodícím planety za jednotkovou dobu jsou konstantní;
3. oběžné doby T_1 , T_2 a velké poloosy a_1 , a_2 drah dvou planet splňují vztah:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}. \quad (1)$$

V té samé době Galileo Galilei (* 1564, † 1642) objevil pozoruhodnou vlastnost pohybu, *princip setrvačnosti*. Těleso setravá v pohybu rovnoměrném (nemění velikost rychlosti) a přímočařem (nemění směr svého pohybu). Samozřejmě pokud na těleso nepůsobí žádné síly, které by případně měnily jeho rychlost nebo směr. Proč pohyb neustane, to nevíme. Víme však, že to tak je.

Čelou tuto dosavadní práci, tedy tři zákony Keplerovy a Galileiho princip setrvačnosti, dokonale pochopil a rozšířil Isaac Newton (* 1643, † 1727), což mu ve svém velkolepém důsledku umožnilo formulovat gravitační zákon. Myšlenku Galileovu, princip setrvačnosti, chápal tak, že síla je potřebná k změně velikosti rychlosti nebo směru pohybu tělesa. Tato síla F je úměrná součinu hmotnosti m a zrychlení a tělesa:

$$F = ma. \quad (2)$$

Máme-li tedy pohybující se planetu, její „přirozenost“ je polybovat se přímočaře. Polybovat se přímočaře ale znamená odletět od Slunce pryč. K tomu, aby planeta kolem Slunce kroužila, musí existovat síla směřující ke Slunci, která působí kolmo ke směru pohybu planety (obr. 1).

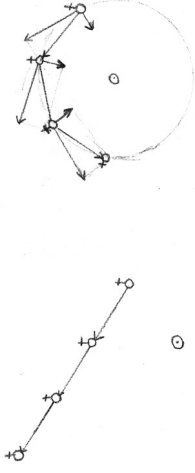
a D2 s 59 a 24 zuby na sluneční kolo E s 48 zuby, jež se otočí jednou za 366,42 dne. Točí se ukazatel na zadní straně ukazuje polohu Slunce ve zvěrokruhu.

Celková konstrukce, datována do 6. století svědčí o vysoké technické zručnosti a vzdělanosti v období Byzantské říše. Byzantské sluneční hodiny s ozubeným kalendarářem jsou často přirovnávané k jinému objevu, k mechanismu z Antikythery, oproti kterému jsou ale podstatně jednodušší. Funkční repliku tohoto přístroje zhotovil dle dostupných pramenů pan Michael T. Wright z Londýna.



Obr. 14 — Zadní strana repliky od pana Michaela T. Wrighta [5]. Kruhová stupnice v levé části se znaky zvěrokruhu a symbolem Slunce a v pravé části stejná stupnice, ale se symbolem Měsíce, ukazují aktuální polohu těles na ekliptice. V kruhovém otvoru ve spodní části je vidět aktuální fázi Měsíce a v přílehlém okénku vlevo se zobrazuje stáří Měsíce. Obrázek přední strany je dostupný v [1].

- [1] Anonymous Byzantine sundial-cum-calendar [online]. [cit. 2010-01-29]. (<http://brunelleschi.ims.fi.it/galileoalazzostrozzi/object/AnonymousByzantineSundialcumcalendar.html>).
- [2] FIELD, J.V., WRIGHT, M.T. Gears from the Byzantines: a Portable Sundial with Calendarical Gearing. *Annals of Science*, 42, 2, s. 87–138, 1985.
- [3] History of Science and Technology in Islam [online]. [cit. 2010-01-29]. (<http://www.history-science-technology.com/articles/articles/2071.htm>).
- [4] KOETSER, T. Mechanical Modeling of Astronomical Phenomena. in Yan, H.-S., Ceccarelli, M., International Symposium on History of Machines and Mechanisms, s. 270–274, 2008.
- [5] WRIGHT, M.T. The Antikythera Mechanism and the early history of the Moon-Phase Display. *Antiquarian Horology*, 29, s. 319–320, 2006.



Obr. 1 — (a) Bez působení síly se těleso pohybuje po přímce. (b) Síla vhodné velikosti působící stále kolmo k vektoru rychlosti, způsobí pohyb po kružnici.

Newton dále rozpoznal, že druhý Keplerův zákon (opisování stejných ploch za stejnou dobu) znamená, že všechna odchýlení od přímočarého pohybu jsou přesně radiální, tzn. směřující k centrálnímu tělesu. Je-li totiž plošná rychlost $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ konstantní, její časová změna (derivace) musí být nulová, čili:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \right) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}| \right) &= \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{a}| = 0. \end{aligned}$$

Aby poslední rovnost předchozí rovnice byla platná, musí se vektorový součin $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ rovnat nule. To nastane pokud alespoň jeden z vektorů roven nule anebo pokud mají vektory stejný (nebo přesně opačný) směr. Při křivočarém pohybu je vektor zrychlení nenulový a vektor polohy (průvodič) je také nenulový. Zbývá tedy aby vektor zrychlení a průvodič obíhajícího tělesa ležely v jedné přímce.

Budeme-li hledat velikosti onoho radiálního zrychlení, vyjdeme pro jednoduchost z oběžného pohybu kruhového, nikoli eliptického — použijeme známý vztah pro dostředivé zrychlení (plynoucí jednoduše z geometrie kružnice):

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r, \quad (3)$$

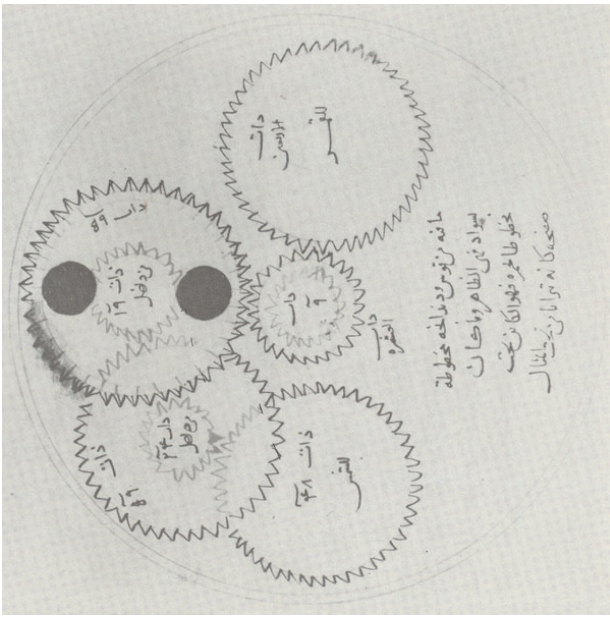
kde T označuje oběžnou dobu. Z třetího Keplerova zákona (1) ovšem víme, že $T^2 \doteq Cr^3$, kde C je konstanta platná pro všechny planety. Zrychlení a síla, kterou působí Slunce na planetu, pak nabývají tvaru:

$$a = \frac{4\pi^2}{Cr^3} r = \frac{4\pi^2}{Cr^2}, \quad F = ma = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2}.$$

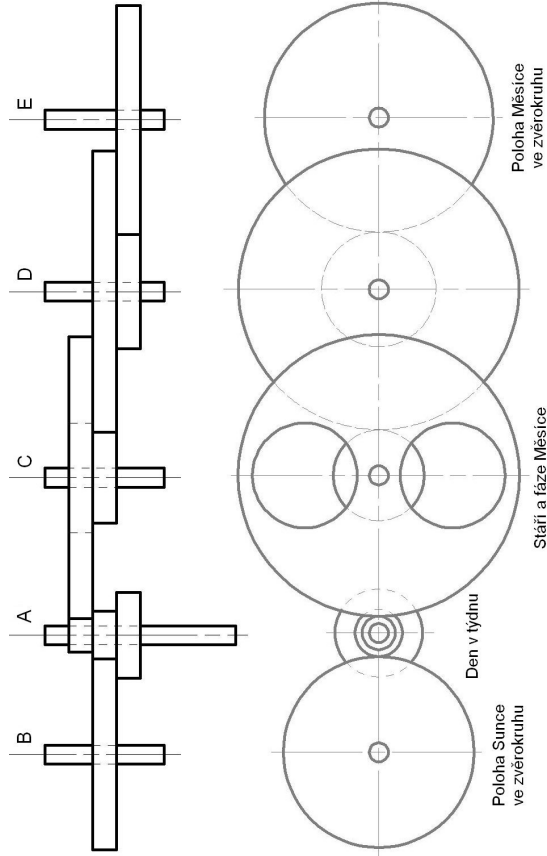
kde m označuje hmotnost planety.

Pozor! Nezapomeňme na sílu F' , kterou působí planeta na Slunce. Podle zákona akce a reakce bude platit:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}'. \quad (4)$$



Obr. 12 — Al-Biruniho mechanický kalendář (British Library, MS OR 5593) [4].



Obr. 13 — Schéma řazení ozubených kol [4].

Zároveň ve výrazu pro F' musí nějak vystupovat hmotnost M Slunce:

$$F' = Ma' = -F = -\frac{4\pi^2 m}{Cr^2}.$$

To lze splnit tehdy, pokud se M „schovává“ v konstantě C :

$$C = \frac{4\pi^2}{GM},$$

kde G je jiná konstanta, nazývaná gravitační. Dospěli jsme ke konečnému tvaru *Newtonova gravitačního zákona*:

$$F = \frac{GMm}{r^2}. \quad (5)$$

Odvození, která jsme doposud provedli, jsou tu pro to, abychom věděli z čeho je zakřivená plocha našeho trychtýře spočítána. Fyzika kterou používáme je docela jednoduchá. Nemusíme shodit z nebe vzoreček a suše prohlásit, že platí!

Model zakřiveného prostoročasu

Abychom pomohli naší pokulhávající představitivosti, zakoupili jsme model gravitační síly ve tvaru hyperbolického trychtýře. Vyrobila jej pro nás společnost Labyrinth Bohemia, která v Liberci provozuje velmi pěkné vědecko-zábavní centrum IQ park [1].

Většina vzdělávacích institucí vlastních takový model ho prezentuje jako černou díru. Vhodte minci a podívejte se, jakým způsobem je hmota černou dírou pohlcována. My však na černou díru zapomeneme a představíme si, že nálevka (trychtýř) zobrazuje *prostoročas*, zakřivený gravitačním polem Slunce. V dosahu gravitačního pole Slunce se pohybují po eliptických drahách s malou výstředností planety, po elipsách s větší výstředností planetky a po velmi protáhlých drahách (až hyperbolických) komety. Zkusme všechny tyto pohyby předvést na našem modelu.

Posleme-li malou kuličku přiměřenou rychlostí tečným směrem k největšímu spádu (je ukázáno na obr. 2), začne kulička kroužit a pomalu spirálovat do jámy. Právě tento pohyb nejlépe odpovídá pohybu planet sluneční soustavy, ovšem s tím rozdíllem, že planety *nespirálují*, protože se pohybují ve vakuu bez tření. To, že naše kulička nesetrává na jedné stabilní dráze je způsobeno třením kuličky o povrch trychtýře a o okolní vzduch. Přesto je jeden oběh docela pěkná kružnice.



Obr. 11 — Snímek dochovaných dílů byzantských hodin převzatý z [1].

Nastavený přístroj svíslé zavěsíme za úchyt a nasměrujeme vzhledem ke Slunci tak, aby stín vržený ukazatelem padal celou svou šířkou na plochu číselníku. Hodinu odečteme podle polohy konce stínu mezi hodinovými rýskami.

Hodiny ukazují *temporární* hodiny, které jsou nerovnoměrné a jejichž délka je závislá na délce světlé části dne. Chyba měření dosahuje v našich zeměpisných šířkách asi 20 minut. V době, kdy byly tyto hodiny používány, se jednalo o velice přesné zařízení, používané nejspíš učenci. Běžnému člověku na velké přesnosti nezáleželo.

Neméně zajímavá byla zadní strana a vnitřek tohoto přístroje. Jak bylo již uvedeno výše, dochovala se toliko přední strana a dvě soukolí. I přes tento nedostatek můžeme provést rekonstrukci celého zařízení, a to díky podrobnému popisu včetně náčrtku, který nám zanechal al-Biruni v knize přibližně z roku 1000. Vnitřek zařízení skýval důmyslnou sestavu ozubených kol, která byla ovládaná prostřednictvím otočného knoflíku s ručkou, ukazující den v týdnu na přední straně. Tento knoflík je upevněn na osičce uclycené ve vnitřní části, kde je napravo spojená s rotačným mechanismem A3 o sedmi zubech, umožňujícím otáčení jen v jednom směru, co zub to den. Pomocí dvou pastorků A1 a A2 je rozváděn točivý pohyb z hřídelky na dvě velká ozubená kola. Pastorek A2 s deseti zuby pohání kolo B se 40 zuby, jež ukazuje v otvoru na zadní stěně polohu Měsíce ve zvěrokruhu. Druhý pastorek A1 o 7 zubech otáčí velkým kolem C1 s 59 zuby. Po obvodu tohoto kola jsou vyryté znaky ukazující stáří Měsíce. Kolo se otočí jednou za dva synodické měsíce a prostřednictvím dvou kruhových otvorů v tomto kole, jež byly pravděpodobně vyplněné nějakou tmavou hmotou, znázorňují v kruhovém výřezu zadní strany fázi Měsíce. Přes kolo C2 s 19 zuby je další pohyb veden přes soukolí D1

Obr. 10 — Geminidy bývají občas tak jasné, že prosvítí i skrz mraky! Takhle by to mohlo vypadat...



Byzantské sluneční hodiny s kalendářem

Jaromír Čiesla

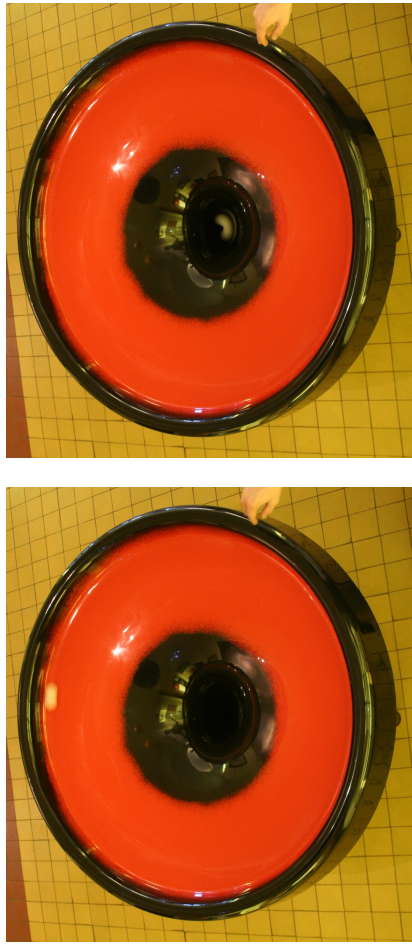
Z 5. až 6. století pocházejí přenosné sluneční hodiny s kalendářem poháněným ozubeným mechanismem. Tělo přístroje sestává z přední a zadní kruhové desky, po obvodu je spojené obrubou a opatřené závěsným okem.

Dochovala se pouze přední strana, na jejímž povrchu je vyryto několik stupnic a soustava třech ozubených kol. Středovou ryskou je tato deska rozdělena na severní a jižní polovinu. Podél této roviny jsou vynesené úhlové výseče pro výšky Slunce s vyznačenými měsíci pro leden až červen na levé straně a červenec až prosinec na straně pravé. Každý měsíc je navíc rozdělen na tři díly po deseti dnech. Ve zbývajícím prostoru nad a z části i pod touto stupnicí je seznam šestnácti měst s udáním zeměpisné šířky. Všechny texty jsou psány řeckými znaky.

Ve středu kružnice je na čepu otočně uchycen číselník s ukazatelem. Plocha číselníku je tvořena zakřivenou plochou a jednotlivé hodiny jsou vyznačené ryskami bez čísel. Na začátku stupnice je kolný ukazatel, který při správném nastavení vzhledem ke Slunci vrhá stín na plochu číselníku. V levém horním kvadrantu je po obvodu vyryta stupnice v rozsahu 0 až 90°, s hrubým dělením po 5° a jemným dělením po 1°, sloužící k nastavení zeměpisné šířky stanoviště.

Ve spodní části se nachází stupnice se sedmi piktogramy. Jednotlivé piktogramy v mezikruží rozděleném na sedm dílů symbolizují jednotlivé dny. V otvoru ve středu kružnic je otočně zasazen čep s ručičkou, sloužící k nastavení dne v týdnu.

Před použitím slunečních hodin musíme nejdříve nastavit záves na hodnotu příslušné zeměpisné šířky. Dále musíme natočit ukazatel s číselníkem podle aktuálního data.



Obr. 2 — Pohyb kuličky po kruhové trajektorii: (a) ve velké vzdálenosti od centra (Slunce); (b) těsně u centra. Při stejné expoziční době je zřejmé zvýšení rychlosti kuličky a samozřejmě podstatné zkrácení periody oběhu, neboť se postupně zmenšuje obvod trajektorie.

Zkusme poslat kuličku znovu, tentokrát trochu větší rychlostí nebo trochu zešíkma. Kulička se pohybuje po velice „šišaté“ elipse, říkáme, po elipse s velkou excentricitou.

Nyní se přesvědčme, že je možné z gravitačního pole Slunce uniknout a odletět pryč do vesmíru. Udělme kuličce ještě větší rychlost a pustíme ji pod ještě strmějším úhlem (obr. 3a). Kulička se bude velkou rychlostí přibližovat dnu jámy (ke Slunci) a ejhle, v jednom okamžiku začne z jámy unikat směrem vzhůru, až ji úplně opustí, i když v jiném směru než do ní padala. Dráha, po které se kulička pohybovala při tomto pokusu, byla hyperbolická. Vidíme, že stačí mít dostatečnou rychlost a správný směr k tomu, abychom se přiblížili těsně ke Slunci, a přesto na něj nespadli.

Čeká nás poslední pokus s trajektorii. Položme kuličku na horní okraj, aniž bychom ji udělili jakoukoliv rychlost. Kulička po přímce zmizí v jámě (obr. 3b).

Právě popsané pokusy jsou nejjednodušší a ukazujeme je nejčastěji. Naši návštěvníci, kteří pozorují svět nadšenými očima, dokáží vidět pozoruhodné věci. Pojdme se tedy podívat na další zajímavosti.

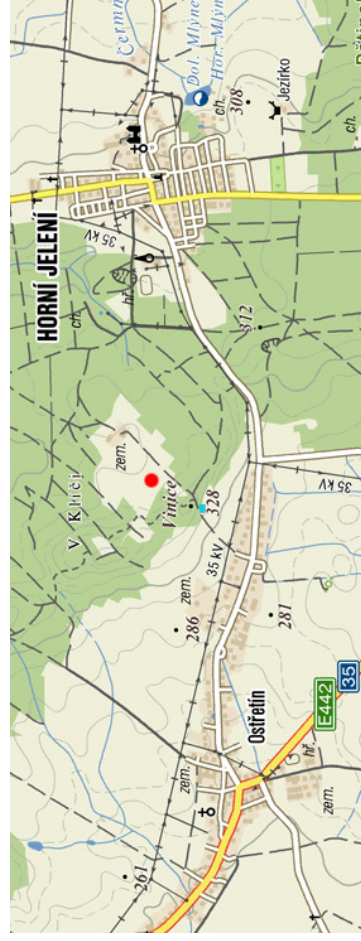
Co kdybychom použili dvě kuličky a nechali je obíhat po skoro kruhových dráhách s různými poloměry? Pomocí fixu a kruhových šablon nakreslíme na stěnu trychtýře kružnice. Až se spirálující kulička dotkne 1. kružnice, spustíme stopky a změříme dobu jednoho oběhu. Poloměr dráhy změříme jednoduše na šabloně. Počkáme až kulička „dospiráluje“ k druhé namalované čáře a měření zopakujeme. Poměry oběžných dob a poloměrů by měly splňovat 3. Keplerův zákon (1). Při provádění experimentu nezapomejme měřící nástroje rozdat mezi dobrovolníky z přihlížejícího davu, určitě se je tak povede do pokusu vtáhnout.

Dne 13. 12. 2009 proběhlo pozorování meteorického roje Geminid. V 18:00 se na hradecké hvězdárně sešlo několik členů ASHK a také pár astronomických kroužků. Ovšem počasí nám nepřálo, a proto jsme se po posouzení meteorologických snímků dohodli, že pojedeme do nedalekého Ostřetína. V této vesnici mělo být snad jasno.

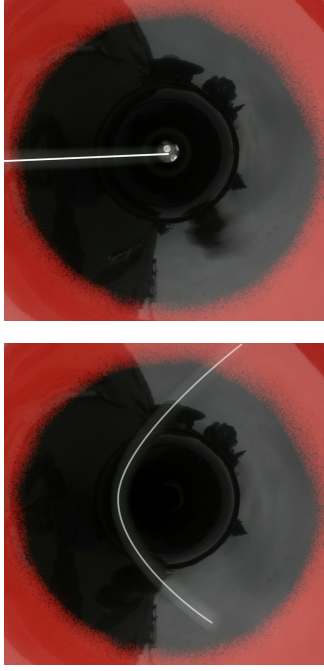
Po příjezdu a následném půlkilometrovém pochodu na naše vyhlédnuté stanoviště jsme zjistili, že se překvapení nekoná. Stanoviště bylo sice pěkné, ale i zde se zatáhlo. Rozhodli jsme se, že zůstaneme a uvidíme, zda se počasí vylepší. Nestalo se tak. Aby nám nebyla dlouhá chvíle, zkoušeli jsme různé experimenty s fotoaparáty, které jsme měli s sebou. Například jsme vytvářeli umělé meteory — viz fotografie na (<http://www.astrohk.cz/krouzkar/>). Odjžděli jsme domů bez jediného spatřeného meteoru, ale s přesvědčením, že příště pojedeme zas!



Obr. 8 — Účastníci výpravy do Ostřetína.



Obr. 9 — Mapa s vyznačeným pozorovacím stanovištěm. Na rozlehlé mýtině je dosti nízký obzor a přitom je zcela stíněné přímé světlo od okolních obcí. Převzato z (<http://www.mapy.cz/>).



Obr. 3 — Fotografovaný pohyb kuličky: (a) po hyperbole, (b) po přímce. Trajektorie byla zvyrazněna tenkou linkou přidávanou v počítači.

Další problém hodný diskuse je celková mechanická energie kutálející se kuličky. Tření kuličky o povrch trychtýře a o vzduch evidentně způsobuje, že energie kuličky klesá (zvyšuje se teplota kuličky i jejího okolí). Rychlost kuličky se ale během spirálování očividně zvětšuje! Kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ sice roste, ale gravitační potenciální energie $E_p = mgh$ se naopak zmenšuje (úměrně zmenšující se výšce h kuličky), a to více než E_k .

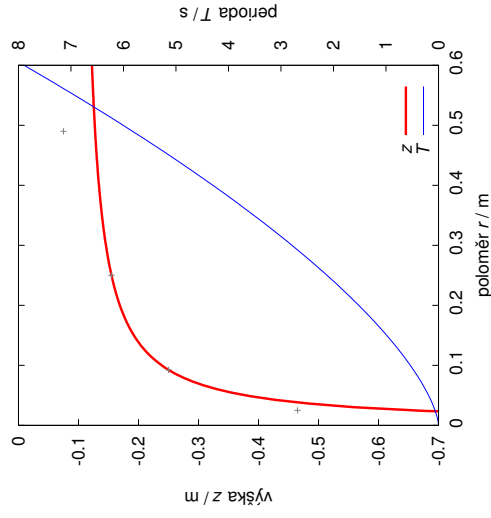
S trochou nadsázky by se dalo říct, že náš model je „topením“. Výkon tohoto topení dokážeme určit z celkové doby trvání pohybu při spirálování, neb platí:

$$P = -\frac{\Delta E_k + \Delta E_p}{t} = -\frac{\frac{1}{2}m\Delta(v^2) + mg\Delta h}{t}. \quad (6)$$

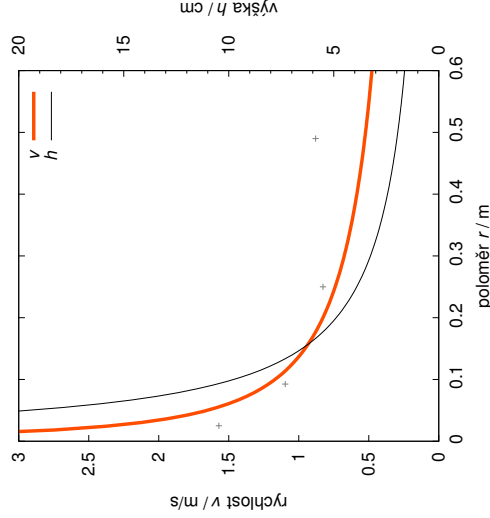
Rychlost kuličky v nejvyšším a nejnižším místě spirálního pohybu je možno odvodit z měření oběžné doby. Přírůstek kinetické energie je $\Delta E_k \approx 0,05 \text{ J}$. Celkovou změnu výšky při pohybu dokážeme změřit přímo a úbytek potenciální energie pak je $\Delta E_p \approx -0,15 \text{ J}$. Nakonec je třeba změřit, jak dlouhou dobu to kulička trvá než zmizne v kasičce, $t \approx 50 \text{ s}$. A dostáváme výkon našeho topení, $P \approx 0,002 \text{ W}$.

Pamatujete na doby, kdy se pořádaly expedice za zatměním Slunce, za účelem měření polohy hvězd v blízkosti slunečního kotouče, motivovány snahou o potvrzení Einsteinovy teorie relativity, která předpovídala změnu směru šíření světla vlivem zakřivení prostoročasu v blízkosti hmotných těles? My na to nepamatujeme, protože nejsme dostatečně staří. Tím spíše zkusíme následující pokus. V každé učebnici optiky najdeme poučku, že světlo se z bodu A do bodu B šíří po *nejkratší* spojnici těchto dvou bodů. Máme-li body A a B namalovány na tabuli (rovině) je jejich nejkratší spojnici přímkou. Ale zde jsou body A a B na stěnách trychtýře a světlo tak musí postupovat s určitou úhýlkou (obr. 4).

Konkrétní příklad pro trychtýř o poloměru 60 cm a výšce 65 cm je ukázán na obr. 6 a 7. Konstanty byly voleny takto: $K_0 = 0,3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$, $K_1 = 0,7 \text{ m}$.

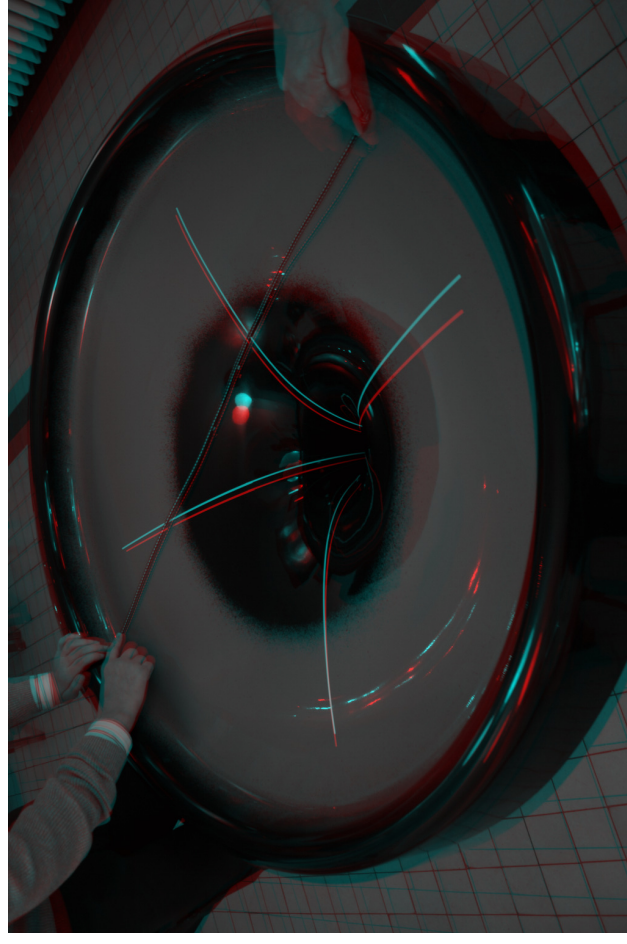
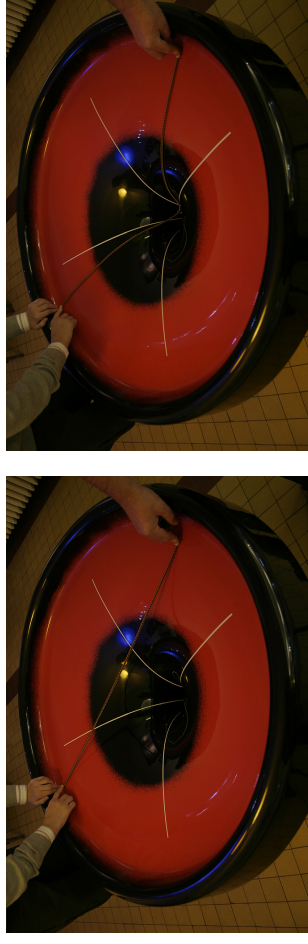


Obr. 6 — Tvar trychtýře v souřadnicích (r, z) a odpovídající perioda $T(r)$ oběhu kuličky. Tvar vyrobeného trychtýře (křížky) téměř výpočtům neodpovídá zcela přesně.



Obr. 7 — Rychlost $v(r)$ kuličky v závislosti na poloměru r trajektorie v trychtýři a výška $h(r)$, potřebná pro udělení takové rychlosti (v případě valivého pohybu).

[1] *IQ park* [online]. [cit. 2009-01-12]. (<http://www.iqpark.cz>).



Obr. 4 — Pokus na šíření světla: (a) bez zakřivení prostoročasu by postup světla zobrazovaly přímočaré paprsky. Ale to zde není možné; (b) pokud papírek (gumičku) prohneme rovnou dolů, je cesta světla příliš dlouhá; (c) nejkratší cesta, po které se světlo skutečně šíří, získáme pokud změníme směr do strany. Poslední obrázek je „trojrozměrný“ — jde o stereoskopický snímek (anaglyf) pro pozorování červeně-modrými brýlemi.

Na začátku jsme si předsevzali dívat se na trychtýř jako na model gravitačního pole Slunce. Nakonec si ale přece jen představme černou díru. Kdybychom do ní padali po spirále, ohromný gravitační spád by nás roztrhal. Na naše nohy, které by byly k černé díře blííž, by působila mnohem větší gravitační síla než na naši hlavu, od černé díry poněkud dále. Obdobný osud čeká hvězdu, která se náhodou dostane

do těsné blízkosti černé díry. Vyzkoušejme, jak se několik kuliček, představující jedno těleso a vypuštěných stejnou rychlostí těsně vedle sebe, v průběhu oběhu od sebe vzdálí (roztrhají se). Takto vznikají akreční disky okolo černých děr, které ve vesmíru skutečně pozorujeme.

Výpočet tvaru trychtýře

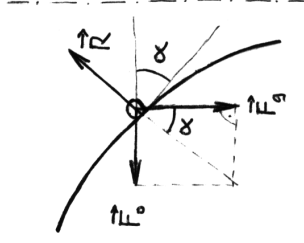
Naším cílem je vypočítat tvar trychtýře tak, aby se pohyb kuličky podobal pohybu planet okolo Slunce. Nejprve budeme uvažovat pohyb kuličky po kružnici, bez valení a bez tření; kulička bude pouze klouzat po trychtýři. Chceme, aby se pohyb kuličky řídil třetím Keplerovým zákonem (v přesném znění):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_{\text{Slunce}} + M_{\text{planety}})}{4\pi^2}, \quad (7)$$

kde a označuje velkou poloosu dráhy, T oběžnou periodu. Pro naše účely to můžeme zjednodušit ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ označuje úhlovou frekvenci a K_0 konstantu):

$$r^3 \omega^2 \doteq GM_{\odot} = K_0. \quad (8)$$

V neinerciální vztažné soustavě spojené s středem kuličky jsou v rovnováze tři síly působící na kuličku: gravitační, reakce podložky a odstředivá (obr. 5).



Obr. 5 — Rovinný „řez jámou“: síly působící na kuličku (bodovou hmotnost) v neinerciální soustavě spojené se středem kuličky.

Reakce podložky (stěny trychtýře) směřuje vždy kolmo k povrchu. (Jedná se vlastně o elektromagnetickou odpudivou sílu mezi molekulami podložky a molekulami kuličky.) Úhel α , který stěna trychtýře svírá s vodorovnou rovinou, tedy musí být dán poměrem:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{F_{\text{odstředivá}}}{F_{\text{gravitační}}} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Dosadíme náš požadavek z Keplerova zákona (8) a obdržíme:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{K_0}{gr^2}, \quad (9)$$

což je obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu pro funkci $z(r)$, popisující tvar stěny trychtýře. Jejím obecným řešením je:

$$z(r) = -\frac{K_0}{gr} + K_1, \quad (10)$$

tzv. rovnice hyperboly. Konstanty K_0 a K_1 mohou volit podle požadavku na oběžnou periodu kuličky a na výšku trychtýře. Všimněme si, že sklon stěny trychtýře má vlastně předepisuje rychlost, jakou musím kuličku vyslat, aby se udržela na kruhové dráze:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{K_0}{r}}. \quad (11)$$

To odpovídá rychlosti, kterou by kulička získala při volném pádu z výšky:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{K_0}{2gr}.$$

Případ valení kuličky

Valení je takový pohyb, při kterém je v souladu posuvný a otáčivý pohyb: kulička posouvající se rychlostí v se musí otáčet úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v}{R}$ okolo středu, přičemž R označuje poloměr kuličky.

Rozdíl mezi kuličkou valící se a klouzající se je v jejich kinetických energiích (E_K klouzání je $\frac{1}{2}mv^2$):

$$E_K \text{ valení} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{5}mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}mv^2. \quad (12)$$

Hybnosti jsou naproti tomu stejné, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, (protože otáčející se body kuličky „nahore“ mají opačnou rychlost než ty „dole“).

Budeme-li analyzovat pohyb kuličky valící se v trychtýři, obdržíme pro tvar trychtýře totožný vztah jako (10) — lineární hybnost kuličky totiž na rotaci kuličky nezávisí. Pro změnu směru stejné hybnosti (neboli zakřívování trajektorie v inerciální vztažné soustavě) je třeba stejná dostředivá síla ($\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$).

Liší se ovšem bude vztah pro potřebnou startovací výšku, protože urychlování valící se kuličky je obtížnější: gravitační potenciální energie se musí přeměnit nejen na kinetickou energii posuvného pohybu, ale také na kinetickou energii otáčivého pohybu ($\Delta E_G = mgh = E_K = \frac{7}{10}mv^2$), čili:

$$h = \frac{7}{5} \frac{v^2}{2g} = \frac{7}{5} \frac{K_0}{2gr}. \quad (13)$$