



Obr. 18 — Částečná fáze zatmění Měsíce ve 22 h 14 min SELČ, fotografovaná u Slavkova.

V Dobsonu je patrné rudé zabarvení stínu už po prvních deseti minutách. Občas kolem projede auto a jakmile vidí na okraji silnice moje velké bílé „dělo“, vypíná dálková světla a pomalu projíždí. Experimentuji i s kamerou a zkouším nějaké statické snímky. Měsíc do stínu vplouvá poměrně rychle a kolem desáté večerní je znát barva stínu bez problému i pouhýma očima. Co je ovšem nemilé, jsou houstnoucí vrstvy oblaků, které jakoby chtěly nade mnou zpomalovat, zakrýt Měsíc a provokativně nechat škvíru jasného nebe jen nízko nad obzorem. Zprvu tomu nedávám příliš velkou váhu, ale postupně je to horší a horší. Do maximální fáze nezbyvá ani hodina a Měsíc definitivně mizí za neprůsvitnou oponou. Když se otočím za sebe, vidím Kleť a na spodní ploše oblaků jasně zářící žlutý koláč od Českého Krumlova. Oblačnost, zdá se, zahaluje skutečně velkou oblast. Tak se slovy: „Když už se sem táhnu takovou dálku...“ urychleně balím kameru i dalekohled a vyjždím poslepu za jasnem. Držíc směr k jasné obloze, vyhazuje mne to na jakousi lesní cestu, kde se snažím, aby se auto nerozsyvalo. Po pěti kilometrech se konečně dostávám na nějaký hlavní tah a odbočuji na jih, kde je vidět ona škvíra. Z malého městečka Světlík pak pádím tak, že se sám sobě divím.

Do maximální fáze zbývá deset minut a dálková světla se občas odrážejí v mlze. Přesto se však na mne začíná usmívat štěstí a spatřuji kousek Mléčné dráhy u obzoru. Podle toho jsou mi jasné dvě věci — obloha jižních Čech musí být skvostná a Měsíc už musí zářit vážně málo. Samotný Měsíc ale pořád nevidím. Rádio Faktor místy šumí, takže nejspíš už budu hodně blízko Lipna. A je to tu! Srpek Měsíce prosvítá z mraků a zbytek oblohy je jasný. Vjíždím do temného lesa za vesničkou Blatnou.

Zastavuji, vytahuji kameru, Dobsona, šteluji, čekám... Je to nádherná. Mrak nejdřív osvobozuje osvětlenou část Měsíce a později i tu utopenou v zemském stínu. V Dobsonu je kontrastně červená a s mým podivem je stín velmi tmavý. Dokonce ani v Dobsonu nedokážu pořádně rozeznat menší útvary, jakoby se ta temná rudá barva slila s ještě tmavšími měsíčními moři. Zato okraj stínu je velmi kontrastní a plynule přechází do osvětlené části Měsíce. Na jižní straně kotouče

Obsah

Miroslav Brož: <i>Astronomický kurz (7) — Problém tří těles</i>	4
Petr Horálek: <i>V expedice SAROS</i>	18
Petr Horálek: <i>Tak jsem spatřil i třetí letošní zatmění</i>	25
Martin Lehký: <i>Ze starých tisků XVII</i>	27



Obr. 1 — Úplné zatmění Slunce v Novosibirsku 1. 8. 2008. Snímek s krátkou expoziční dobou 1/250 s, vhodnou pro zachycení protuberanci. Použitý přístroj Canon Eos 300D s objektivem Rubinar 5,6/500. Foto Dalibor Hanžl.

Titulní strana: Bailyho perla a koróna při úplném zatmění Slunce 1. 8. 2008, v 10 h 46 min a 10 h 47 min UT. Pořízeno kamerou Nikon a objektivem Rubinar 10/1000, při expoziční době 1/500 s a 1/8 s na filmový materiál. Foto Martin Lehký. K článku na str. 18.

Naším cílem je nahlédnout, jak se pohybují Slunce, Jupiter a kometa (tělesa 1, 2, 3). Abychom si problém zjednodušili na únosnou úroveň, budeme předpokládat, že kometa má hmotnost $m_3 = 0$ a že Jupiter se okolo Slunce pohybuje nerušeně po kružnici (jako v problému dvou těles s excentricitou $e = 0$). Takovou úlohu nazýváme *kruhový omezený problém tří těles*. Omezený proto, že kometa nepůsobí gravitací na Jupiter a Slunce, pouze Slunce a Jupiter působí na kometu a na sebe navzájem. (Beztak by kometa neměla šanci obíhat Jupitera ovlivnit.)

Pro Slunce a pro Jupiter ani nemusíme psát pohybové rovnice, protože jejich řešení známe — v inerciální soustavě s počátkem v hmotném středu jsou to rovnice kružnice:

$$\mathbf{r}_1 = \left(-a_J \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}}_{1-\mu} \cos nt, -a_J \frac{m_2}{m_1+m_2} \sin nt, 0 \right),$$

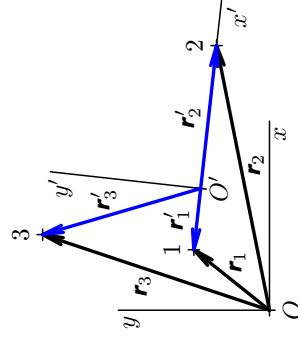
$$\mathbf{r}_2 = \left(a_J \underbrace{\frac{m_1}{m_1+m_2}}_{1-\mu} \cos nt, a_J \frac{m_1}{m_1+m_2} \sin nt, 0 \right),$$

kde $a_J \doteq 5,2 \text{ AU}$ je vzdálenost Slunce–Jupiter a $n = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a_J^3}} \doteq 0,00145 \frac{\text{rad}}{\text{den}}$ jeho střední pohyb (neboli úhlová frekvence vzájemného obíhání).

Pro kometu platí pohybová rovnice (odvozená z Newtonových zákonů):

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2). \quad (1)$$

Bohužel, v těchto třech diferenciálních rovnicích 2. řádu vystupují explicitní funkce času $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$ a jejich průběh neznáme. Naštěstí se ale můžeme t zbavit. . .



Obř. 2 — Náčrt tří těles v inerciální vztážené soustavě O_{xyz} s počátkem ve hmotném středu a definice vektorů \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}'_1 , \mathbf{r}'_2 , \mathbf{r}'_3 . Naznačena je též otočená souřadnicová soustava $O'_{x'y'z'}$.

„A nezbláznil jsi se? Jet za zatměním Měsíce až někam blůvřkam, když je to ke všemu jenom částečné? Zatmění Slunce chápu, ale tohle je trochu ujetý.“ Tak přesně tohle mi znělo v uších jako echo při cestě autem za jasným počasím do jižních Čech, když jsem se rozhodl, že to letošní třetí zatmění musím vidět.

Vlastně za tuhle vášeň může moje maminka, která mi řekla před zatměním v lednu roku 2000 (kdy bylo nad naším územím úplně jasno), že mám jít v osm večer domů a spát. Zatmění tehdy proběhlo nad střechou naší bytovky a já jen další den ráno smutně poslouchal od svých přátel, jak to bylo skvělé. Od té doby mám jakousi vnitřní potřebu dohnat tenhle nedohmatelný deficit a ženu se za každým dalším zatměním Měsíce, klidně i za hranice republiky.

Původně jsem měl v plánu pozorovat zatmění na chalupě s mým dědou a babičkou. Ostatně právě oni nemalou mírou mohou za to, že mě dnes hvězdy zajímají. Bohužel, podle nejnovější předpovědi meteorologického modelu Aladin, se měla oblačnost trhat na jihozápadě a největší šance na spatření úkazu byly v jižních Čechách. Naopak u Sečské přehrady se měla držet ještě dlouho do noci.

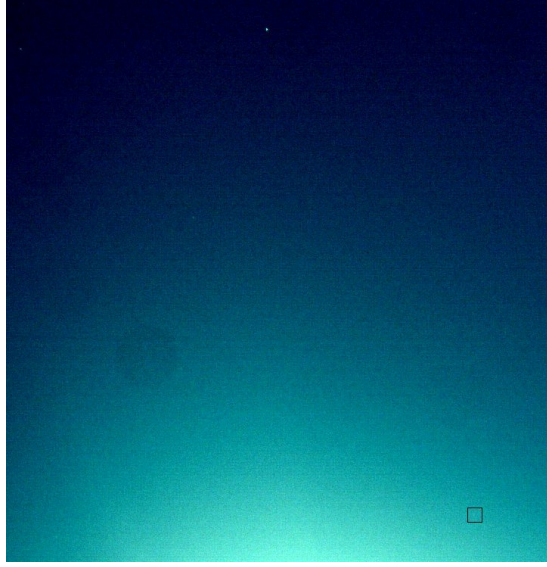
Zadní sedadla modrého Peugeotu 306 (přijíčeného od rodičů) zalehl tubus mého Dobsona (0,25 m, $f/5$), sedadlo spolyjezdce jeho montáž a kdesi na podlaze ležel stativ a kamera, bunda a nějaký přehrávač hudby do samoty. Z destivé a zamížené krajiny jsem vyrazil se smutnými vzpomínkami na zklamaného dědu. Cestu jsem volil přes Chotěboř do Havlíčkova Brodu směr Humpolec, Jindřichův Hradec a Český Krumlov. Už jsem ji dobře znal, neboť touto trasou jezdíváme několikrát do roka s Pardubáky na víťaviny. Společnost mi dělalo poprvé v životě jen rádio. Naštěstí víc bláznů silnice nebrázdilo, tudíž jízda byla vcelku svižná. Úkaz mi pak kousek před Chotěboří připomenul Pavel Suchan z vln rádia Impuls, přičemž lidi zasvětili do principu zatmění při seřazení Slunce, Země a Měsíce. Vtom jsem si představil, jak se ta chladná, krátery rozvrásněná koule rychle řítí do kulového želovitého zemského stínu a jak nicotná je proti tomu rychlost Peugeotu řítícího se za jasným nebem do jižních Čech. Čas se mi začal krátit, do startu částečné fáze zatmění zbývaly tři hodiny.

S koncem písniček na přání se párkrát ukázal v podélných mracích úplňkový Měsíc, ze spodního okraje už zjevně „začouzený“ zemským polostínem. Do úkazu zbývalo půl hodiny, takže jsem se za Českým Krumlovem otočil vlevo, pryč z hlavního tahu, a lesní silničkou hledal v polích a lesích nějakou vhodnější lokalitu k zastavení. Až za vískou Mezipotočí, nedaleko Slavkova, nacházím malou cestičku vedoucí k táborové základně. Auto stavím k okraji, rychle vytahuji Dobsona i kameru a žužlám přitom bagetu jak hladový vlk. Úplňkový Měsíc pomalu stoupá a je markantně oslaben zemským polostínem. Nad obzorem září také Jupiter a v Dobsonu, necelý stupeň od Měsíce, planeta Neptun. Mraky se sice táhnou, ale obloha je krásná, polojasná. Než zamknu auto je 21 h 35 min a začíná částečné zatmění.

návštěvu v Čechách a že se pokusí naučit trochu česky. A mně tu pořád leží to číslo...

Vzpomínám i na dokonale sehranou partu lidí, kteří prožili zatmění naplno a hrdě s českou vlajkou tyčící se na nábreží řeky Ob zpívali před posledním kon-
takterem naší českou hymnu. Samozřejmě přišla řada i na slovenskou a pouze Alex se o španělskou moc nepokusil. Česká vlajka byla nakonec slavnostně předána jedné J (potažmo i druhé J), která se vydává s Petrem Skalákem a Alexem dál do Mongolska. Malá česká i slovenská země uprostřed velkoměsta si díky této partě získala skutečně velkou přízeň, byli jsme pochváleni za naše expediční trička. Já byl dokonce donucen mluvit před kamerou místní televize. No, moc jsem toho neřekl, jen jméno, stát a pak pár slov okolo mých pocitů v anglickém jazyce. Teď už nás čeká cesta vlakem domů (se zastávkou v Moskvě) a jak to vidím, budu pod vlivem srdcervoucí hudby Enigmy koukat do své dlaně na papírek s telefonním číslem krásné Anji... Tolik k nejzajímavějším momentům cesty za zatměním Slunce do Ruska.

Nutno poznamenat, že i v rámci činnosti pro SMPH byla expedice úspěšná. Po zpracování snímků se Daliboru Hanzlovi totiž podařilo na dlouho exponované fotografii objevit avizovanou kometu C/2008 O1 (SOHO), jejíž jasnost se v době zatmění pohybovala okolo 5. magnitudy. Na obr. 17 je označena malým čtveř-
rečkem vlevo dole. Snímek byl pořízen pomocí Canonu Eos 20Da s objektivem Sonnar 3,5/135, expozicí 8 s. Identifikace komety je zatím předběžná z dosud neredukovaného jednoho samostatného snímku (k datu 8. srpna 2008).



Obr. 17 — Kometu C/2008 O1 (SOHO) během zatmění Slunce. Foto Dalibor Hanzl.

Otáčející se souřadnicová soustava. Coriolisovo a odstředivé zrychlení

Otočíme-li souřadnicovou soustavu okolo osy z o úhel $\varphi = nt$, Slunce a Jupiter se v nových čárkovaných souřadnicích nehnu z místa:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= (-\bar{\mu}a_J, 0, 0), \\ \mathbf{r}'_2 &= ((1 - \bar{\mu})a_J, 0, 0). \end{aligned}$$

Tuto transformaci souřadnic můžeme zapsat maticově jako $\mathbf{r}' = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{r}$, resp. $\mathbf{r} = \mathbf{R}_z(-\varphi) \mathbf{r}'$, čili ve složkách (viz Povětroň 3/2007, str. 12):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cos nt - y' \sin nt \\ x' \sin nt + y' \cos nt \\ z' \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Pro dosazení do pohybové rovnice (1) budeme ovšem potřebovat také druhé derivace souřadnic podle času, které teď musíme vypočítat. Nejprve rychlosti:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x}' \cos nt - x' n \sin nt - \dot{y}' \sin nt - y' n \cos nt \\ \dot{x}' \sin nt + x' n \cos nt + \dot{y}' \cos nt - y' n \sin nt \\ \dot{z}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\dot{x}' - ny') \cos nt - (\dot{y}' + nx') \sin nt \\ (\dot{y}' + nx') \cos nt + (\dot{x}' - ny') \sin nt \\ \dot{z}' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

poté zrychlení:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (\ddot{x}' - n\dot{y}') \cos nt - (\dot{x}' - ny') n \sin nt - (\ddot{y}' + n\dot{x}') \sin nt - (\dot{y}' + nx') n \cos nt \\ (\ddot{y}' + n\dot{x}') \cos nt - (\dot{y}' + nx') n \sin nt + (\ddot{x}' - n\dot{y}') \sin nt + (\dot{x}' - ny') n \cos nt \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x}' - 2n\dot{y}' - n^2x' \\ \ddot{y}' + 2n\dot{x}' - n^2y' \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}_{\text{Coriolisovo}} \mathbf{a}_{\text{odstředivé}}} \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dot{y}' + 2nx' - n^2x' \\ \dot{x}' - 2ny' - n^2y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin nt \\ \cos nt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{z}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Vidíme, jak se nám zde „vyloupá“ dvě nová zrychlení: *Coriolisovo* a *odstředivé*; první závisí na rychlosti jako $-2\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ (zde je vektorový součin) a druhé na souřadnicích jako $n^2 \mathbf{r}_{\perp}$ od osy otáčení — přesně jak jsme u odstředivé síly zvyklí. Jejich podstatou není nějaké fyzikální působení (jako je třeba gravitace), ale objevují se pouze z důvodu transformace souřadnic do neinerciálního systému. Proto jim ostatně říkáme zrychlení *zdánlivá*.

Dosazení provedeme nejprve pro složku x (vzdálenosti se při otáčení zachovávají, tudíž jsme je ve jmenovatelích napsali rovnou v nových souřadnicích):

$$\begin{aligned} & (\ddot{x}'_3 - 2n\dot{y}'_3 - n^2x'_3) \cos nt - (\dot{y}'_3 + 2n\dot{x}'_3 - n^2y'_3) \sin nt = \\ & = - \frac{Gm_1}{[(x'_3 + \bar{\mu}a_1)^2 + y_3^2 + z_3^2]^{3/2}} \cdot [(x'_3 + \bar{\mu}a_1) \cos nt - y'_3 \sin nt] - \\ & - \frac{Gm_2}{[(x'_3 - (1-\bar{\mu})a_1)^2 + y_3^2 + z_3^2]^{3/2}} \cdot [(x'_3 - (1-\bar{\mu})a_1) \cos nt - y'_3 \sin nt]. \end{aligned}$$

Použijeme teď dva triky:

1. sdružíme členy s $\cos nt$ a členy se $\sin nt$ a uvědomíme si, že mají-li rovnice platit pro *libovolné* t , musejí se rovnat koeficienty u těch \sin ů a \cos ůnů;
2. vynecháme čárky a index 3, abychom se z nich nezbláznili (beztak tam nic jiného než x'_3 , y'_3 a z'_3 nevystupuje).

Výsledkem jsou tyto *pohybové rovnice pro kometu v korotujícím systému*:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -G \left[m_1 \frac{x + \bar{\mu}a_1}{R_1^3} + m_2 \frac{x - (1-\bar{\mu})a_1}{R_2^3} \right], \quad (5)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] y, \quad (6)$$

$$\ddot{z} = -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] z, \quad (7)$$

kde relativní vzdálenosti jsou:

$$\begin{aligned} R_1 &= [(x + \bar{\mu}a_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}, \\ R_2 &= [(x - (1-\bar{\mu})a_1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2} \end{aligned}$$

a $\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ (tj. malý parametr řádu 10^{-3} pro Jupiter a Slunce). Žel, ani tyto rovnice neumíme obecně řešit (tzn. najít 6 skalárních funkcí $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ a $\dot{z}(t)$). Zdálo by se, že jsme si otáčením příliš nepomohli, nicméně...

Jacobihovo integrál

Alaspoň můžeme najít jeden velmi užitečný integrál pohybu: rovnice (5), (6), (7) vynásobíme po řadě \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , sečteme:

$$\begin{aligned} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} - n^2(x\dot{x} + y\dot{y}) &= -G \left[m_1 \frac{x + \bar{\mu}a_1}{R_1^3} + m_2 \frac{x - (1-\bar{\mu})a_1}{R_2^3} \right] \dot{x} - \\ &- G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] (\dot{y}y + \dot{z}z) \end{aligned}$$



Obr. 15 — Nábřeží řeky Ob přeplněné lidmi pozorujícími částečné zatmění. Foto Dalibor Hanzl.



Obr. 16 — Širokoúhlný snímek zatmění s dlouhou expozicí, na kterém vyniká vnější koróna. Foto Dalibor Hanzl.

A teď, když hodinky ukazují 2. srpna 3 h 51 min novosibírského letního času, posedávám jediný vzhůru v kuchyni pronajatého bytu a vzpomínám. Vzpomínám hořce i sladce, neboť silnější prožitek, než poblíž krásné Anji (příčemž jsem se konečně zapovídal rusky a vzpomněl si na dávná léta volitelné ruštiny na střední škole) jsem si nemohl přát a o to hůř (což mi Dano prostě nemůže odpustit — že toho já blbec nevyužiji), že mám její číslo a v hlavě mi pořád zní jejím krásným hláskem srozumitelně znějící ruská otázka „Co budeš dneska večer dělat?“ Ambice této krásky (i když spíš její zatemněné emoce) ji dovedly tak daleko, že slíbila

Nejvíc ale návaly lidí postihují Dana, který jako jediný z nás tu má opravdový „balšoj teleskop“ (refraktor 0,1 m, $f/10$, speciálně upravený na šílené expedice za zatměním).

Nebudu napínat, neboť napjatí byli ti lidé dost, každopádně v 16 h 42 min místního času se konečně Měsíc zakusuje do žlutého Slunce. Díky společností krásné Anji (která má mezi prvními dvěma kontakty zatmění stačila seznámit se svou rodinou i s kamarády), jde zatmění vcelku rychle. Nevím, jestli to je dobře, či nikoliv, ale i já začínám mít nemalý hlouček lidí okolo sebe, neboť Anje půjčuji svůj triedr opatřený filtry a ten budí opravdu silný zájem okolí. Občas ani nevím, kde ho mám a dív se světe, že v tom „hypernováčkém“ davu mi nikdo nic neukradl. Občas zapnu kameru, občas se pobavím s ostatními, občas mi připadá tohle město jako jeden veliký trh. Po půl hodině už se nedá ani pomalu projít z nábrží do nedalekého parku, kde se možná pod stromy nacházejí stovky malých srpků na betonové ploše. Musím uznat, že tak rychle sunoucí se Měsíc jsem ještě neviděl. Do toho se mě Anja ptá, jak se v češtině říká „ty menja nraivša“ (tj. líbíš se mi) a s mým náhle vysokým sebevědomím se nám naskýtají pohledy na uzoučký srpek Slunce.

Je šero a začíná se ochlazovat. Vítr fučí čím dál víc a mraky už nejsou skoro žádné. Chaos. Jedna kamera na stativu, druhá v ruce, poblíž Anja s rodinou, triedr blůhví kde a u koho, a k dokonalosti zmatku přispívají vláční Rusové proménající se před mojí kamerou. Tak je prosím o prostor, triedr má Matyáš Zetek a Anja kouká přes sklo. Venuše! Je vidět Venuše! Tak řvu „Venuša“ a zorněly dav lehkovážně mří oči do stále oslnivého Slunce 30° nad obzorem. Venuše jasná a zmatek houstne. Do zatmění zbývají čtyři minuty, a to safra krátké. Člověk by neřekl, jak ho to polapí — připadám si jako žena, typická hospodyňka, která umí v domácnosti dělat hned několik věcí najednou. Dvě minuty. Pátrám po triedru a ani nevnímám, že mám v ruce druhou kameru asi 4 minuty nahrávající záznam. Jedna minuta — triedr nalezen, lidi řvou, řeka tmavne, Slunce pomalu mizí. 17 h 44 min — objevuje se Merkur! Náznaky koróny lezou do kamery a druhou, běžící kamerou, natáčím řvoucí dav. Je to tady! Bailyho perly střídá skvostná nažloutlá koróna a přidávám se k řvu davu. Musím naladit výšky, falsety mi nejdou. Potlesk ze všech stran střídá utichlá řeka a svítící auta na mostě. Evidentně tam na tom mostě každé auto zastavilo. Jedna kamera jede, druhou snímám žlutý obzor. Nádherná scenerie protáhleho koronálního paprsku s Merkur a Venuší nad pláží „Baywatch“ a utichlou řekou Ob dojmám skutečně všechny. Krásná Anja jen s lehkostí mlčí a dojatě kouká. Půjčuji jí triedr, ale z povzdálí slyším hlas Petra Skaláka, který upozorňuje na zbyvajících 20 vteřin. Opravdu, koróna zprava u kraje Měsíce bělá a objevují se první paprsky. Dav patřičně šlí a já naplněn dokonalým prožitkem konečně stahuji nervozitu na minimum. Odchází stín, obloha zase modrá a jen co je nutné použít filtr, už mi běží Matyáš vzkázat, že musí jet příští rok do Číny (tam bude 22. července 2009 probíhat nejdelší zatmění v tomhle století, v Číně okolo pěti a půl minuty).

a jednou integrujeme podle času:¹

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) = G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] + C,$$

kde C je integrační konstanta. Nakonec násobíme dvěma a značíme $-2C = C_J$ jako *Jacobího integrál*:

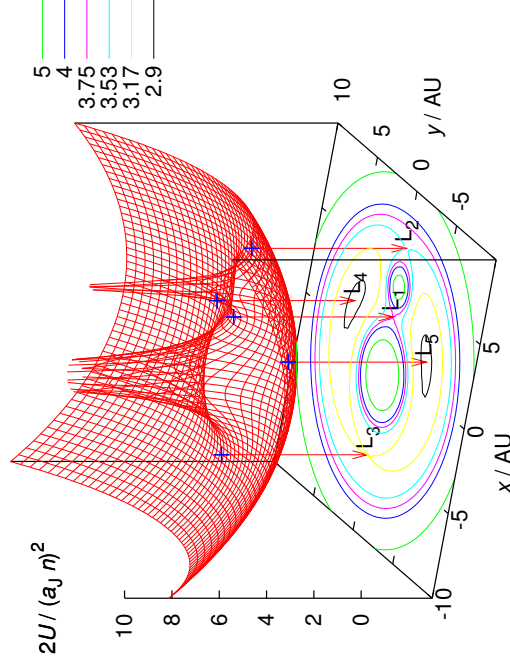
$$2U = \underbrace{n^2(x^2 + y^2)}_{2U} + 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - \underbrace{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}_{v^2}, \quad (8)$$

kde $U(x, y, z)$ označuje efektivní potenciál (funkci souřadnic) a v rychlost komety vzhledem k neinerciální rotující soustavě (v níž jsou Slunce a Jupiter v klidu). Hodnotu C_J pro danou kometu můžeme vypočítat z počátečních podmínek (souřadnic a rychlostí) komety prostým dosazením do (8).

Užitečnost Jacobího integrálu spočívá v tomto: v^2 je pochopitelně nezáporné, čili musí vždy platit:

$$v^2 = 2U - C_J > 0.$$

To ale znamená *omezení pro pohyb komety* — když si nakreslíme „vrstevnice“ funkce U (obr. 3), tak pouze v místech, kde $2U > C_J$, je pohyb dovolen!



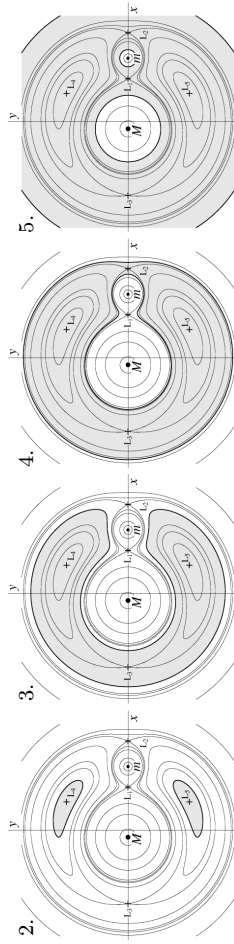
Obr. 3 — Graf efektivního potenciálu $2U(x, y, 0)$ a příslušné izočáry; pro systém s poměrem hmotností $\bar{\mu} = 0.2$. Hodnoty $2U$ jsou uváděny v jednotkách $(a_J n)^2$.

¹ S vědomím, že derivace výrazu $\frac{1}{R_1} = [(x + \bar{\mu}a_J)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2}$ je rovna $-\frac{1}{2}[(x + \bar{\mu}a_J)^2 + y^2 + z^2]^{-3/2} \cdot [2(x + \bar{\mu}a_J)\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}]$ a podobně pro $\frac{1}{R_2}$.

Pro určitou dráhu komety, tedy určité C_1 lze nakreslit *křivku nulové rychlosti*. Když se bude kometa přibližovat k příslušné křivce, mohou si být jist, že ji nepřekročí, ale kolmo se od ní „odrazí“.

Všimněme si vzhledu grafu funkce $2U$ z hlediska topologického: je na něm pět inflexních bodů, označených L_1 až L_5 . Podle hodnoty C_1 můžeme rozlišit pět případů, jak vypadají dovolené a zakázané oblasti (obr. 4):

1. $C_1 < \text{potenciál } 2U(\text{v bodě } L_4) = 2U(L_5)$: pohyb je dovolen v celé rovině x, y . To je ostatně přirozené — když kometě udělím obrovskou rychlost (a C_1 pak vychází malé), doletí kamkoliv.
2. $2U(L_4) = 2U(L_5) < C_1 < 2U(L_3)$: dvě zakázané oblasti jsou v okolí bodů L_4 a L_5 , jinde je pohyb dovolen.
3. $2U(L_3) < C_1 < 2U(L_2)$: zakázané oblasti obepínají body L_3, L_4 a L_5 ve tvaru podkovy; kometa může letět pryč od Slunce pouze kolem Jupitera.
4. $2U(L_2) < C_1 < 2U(L_1)$: kometa může létat v blízkosti Slunce i Jupitera, ale nemůže se odtud dostat za bod L_2 . Také se zpoza bodu L_2 nemůže dostat dovnitř.
5. $C_1 > 2U(L_1)$: kometa může buď obíhat Slunce, nebo Jupiter, anebo obíhá tuto dvojici ve velké vzdálenosti, nemůže však mezi orbitami přecházet.



Obr. 4 — Tvary dovolených (bílých) a zakázaných (šedých) oblastí v problému tří těles. Obrázky odpovídají případům 2., 3., 4. a 5. diskutovaným v textu. Porovnejte též s obr. 3. Pevzato z [1].

Dva zvláštní tvary drah dostaly svoje názvy: pokud se těleso pohybuje pouze v okolí bodu L_4 (nebo L_5), jedná se o orbitu typu „pulec“ (angl. tadpole); například Trojané mají takové dráhy. Obíhá-li těleso body L_4, L_3 a L_5 tam a zpět, jde o typ „podkova“ (horseshoe); pěknými komplikovanými příklady ze sluneční soustavy mohou být asteroid (3753) Cruithne v rezonanci 1/1 se Zemí nebo orbitální satelity Saturnu Janus a Epimetheus.

Tisserandův parametr

Při obíhání samotné komety okolo Slunce (v problému dvou těles) by byly keplerovské orbitální elementy (a, e, I, ϖ, Ω) konstantami. Při blízkém přiblížení komety k Jupiteru (v problému tří těles), ale evidentně konstantní nebudou —

v druhém bytu se kolem druhého hodiny místního času (tj. kolem 21. hodiny českého času) ukládáme ke spánku. Zítra začíná den D.

A je to tu. První srpen, pátek, dva roky očekávaný den. Dle domluvy s Petrem Skalákem se v 11 hodin on a Alex ocitají před našim bytem, kterému ale nefunguje zvonek. Chudáky spolubydlici mate slovanský hlas řvoucí pod jejich okny. Ani to prý nezabírá a nakonec Petra pouští dovnitř nějaká paní místní. Jde se na internet do nějaké neznámé lokality (Makalaki je vůdceem), kde nám Petr ukazuje své bleskurychlé umění surfování po serverech s meteorologickým zaměřením. Předpověď je jasná: rozpadající se fronta ze západu přinese jasno a za ní se pak příhrne hradba nové oblačnosti. Se zbytkem se scházíme v domluvené stanici metra, odkud se jede k Obu, přímo na nábreží.

To, co se dalo předpokládat, se potvrdilo ještě dvěstě násobně. Tohle město o úkazu opravdu ví! Ale opravdu. Nábreží zaplňují žlutotříčkovci-brigádníci, kteří s radostí i neradostí štelují různé refraktory. Na ulicích chodí obchodníci s „bezpečnými“ brýlemi na Slunce (z čeho jímého, než z oblíbené diskety). Do zatmění zbývají tak čtyři hodiny a je provokativně krásné jasno. Fronta dorazí až zadlouho. Rovnice Novosibirsk = pekáč se opět potvrzuje, takže po vyhledání zdánlivě dokonale lokality pod kamenným nábrežím přímo na břehu Obu (kam jsme úspěšně do smradlavého bahna zapíchlí českou vlahku na stožáru z místí flóry), vyrazím já, Makalaki a J+J najít nějaký univermag s pitím. Nakonec se z toho klube příležitost ke snídani-obědu, neboť tu prodávají chot-dogy s neskutečně velkou dávkou kečupu, hořice a tataruky. Po návratu z univermagu ale koukám na výklenek kamenného nábreží, pod nímž je právě naše plánička a hle, voda krapet stoupá. A co voda, fučí děsný víchr. Počasí se začíná tvářit „jako že kdýž už tak už“ a oblačnost zůstává na příjemném polojasnu. Poněkud směšně vypadá pohled na samotného Petra Komárka na opuštěném poloostrovku, který byl nedávno součástí pláže a na kterém stála a ležela celá naše technika. Ostatní už zabírají zmíněný výklenek s výhledem na mosty (po jednom z nich jsme přijeli včera vlakem) a na pláž na druhé straně (jak vystříženou ze seriálu Pobrežní hlídka, už tam chyběl jen Mitch Buchannon). Kráčím za jediným Čechem, který vydržel pod svou vlahkou na opuštěném poloostrově a po chvíli tlachání přeci jen uznáváme, že za hranou kamenného nábreží bude foukat mň. S pomocí J (bez druhého J) vynásíme velikým obloukem naše věci do výklenku a Měsíc se nezastavitelně řítí před sluneční kotouč. Zbývá asi hodina a půl.

Vlahku zarýváme mezi dvě mohutné masy betonového zábradlí. Fouká tak, že zanedlouho i můj batoh obsahuje čerstvé ruské listí. Nábreží plní zvědaví lidé a krásné dívky, z nichž jedna — Anja, tu zůstává napořád. Nádherná dívka (dodnes mi Dano vyčítá, že jsem se o její srdce nesnažil víc, ale přeci jen 5 000 km je 5 000 km). V tom okamžení zjišťuji dvě věci — za prvé: to zatmění asi opravdu uvidíme, a za druhé: já umím konverzovat rusky (ne domluvit se, ale konverzovat). Krásná Anja mě k tomu nakopává všetečnými otázkami a postřehy z okolí.

vajícími bábuškami. Nervózní průvodčí musely každou zastávku oplodnit mnoha ruskými krásně znějícími nadávkami, neboť cestující, včetně Čechů, zdržovali odjezd vlaku svými nerozhodnými obchodními choutkami. Právě k těm jsem patřil, a když jsem ještě nahluchlý, dokážete si představit to terno.

30. července se nad střechem vlaku konečně začalo vyjasňovat a nálada se o to víc povznášela. Zatímco skupinka Petr Skalák, J+J a Španěl Alex doháněla časové posuny spánkem, ostatní neváhali vstávat už kolem třetí hodiny po východu Slunce. Mezi námi se vlastně ani pořádně nevědělo, kolik je hodin. Když pak zmíněná skupinka vstala, začalo nové kolo trávení času: kupříkladu učít Alexe základní sprostě české fráze, hrát v angličtině v ruském vlaku „Hádej, kdo jsem“ v partě Čechů, Slováků a Španěla, či oprašovat největší hity z prvních stránek mnou nenáviděných zpívanek. Cesta samozřejmě naskýtala i očekávané pohledy typu „Koukej, les... les... pole... les... mrtvola... les...“ Čím více jsme se blížili k Novosibirsku (Ural byl překročen toho dne ráno), tím více pole zaplňovaly močály a občas přišel opravdově daleký pohled do krajiny. Stovky kilometrů lesů nepatřících nikomu. Rusko.

K večeru došlo i na očekávané načetí pravé ruské vodky, která kolovala v míse na zrádlo pro psy. Nejednou nám bylo personálem vlaku vytknuto, že bychom přeci jen mohli jít spát. Jak jsem říkal, kromě jistého mladíka Serjoži, který se okamžitě vřhul k našim dvěma dívkám, jsme to byli my, kdo se tak veselě družil.

Čtvrtek 31. července byl ve znamení nervózních hlásek na adresu kazícího se počásí. Někteří dospávali, jiní pojídali a personál vlaku měl hygienickou pohotovost, neboť vlak v Novosibirsku čekala kontrola. Zpod nohou nám byly strhávány koberece, čistila se madla, okna, i zmíněný záchod. Se vzpomínkou na věřejší pokus o večeri v jídelním voze (který jako batolecká kaše s českým gulášem vyšel na 160 českých korun) jsem s radostí čekal na blížící se hlavní město Sibíře. Abych vás vyvedl z případného omylu, Sibíř = zima, nicméně Novosibirsk = pekáč. A to se potvrzuje s blížícím se výstupem. Můj osobní šok má ještě jeden důvod — okraje města jsou jak vystřižené z budovatelských dob socialismu, který tady nepochybně pokračuje. Už z dále je znát rozdíl proti Moskvě, to je město spíše západního typu a svými mrakodrapy i kulturou se blíží Americe. Ale neberte mě vážně, byl to jen první dojem. Abych reputaci města napravil, určitě má co do sebe. Nemalou mírou za to může městem protékající ruský veletok Ob.

Na nádraží nás už čeká jakási asistentka a posléze i pan Gusko, což je takový typ mladého talentovaného obchodníka, s velmi přátelskou povahou a neskutečnou ochotou. Ihned nás dělí do dvou bytů, které od sebe dělí jedna zastávka metra. Zatímco my s Makalakiem, Petrem, Daliborem a Skálovými fasujeme ten horší (slíbený internet je tu blokován), zbytek skupiny je hostěn v luxusu (i s krásně se krotícími červíky lezoucími z kanalizace do vany). Hned se házím do gala po třech dnech ve vlaku a s radostí se sprchuji, jak dlouho to jde. Ostatní jsou v pohodě, ale já, typický pesimista, vidím vývoj počasí dost špatně. Po návštěvě

Jupiter může zcela změnit velkou poloosu, excentricitu i sklon její dráhy (viz obr. 7).

I při výrazně odlišné dráze před přiblížením a po přiblížení však můžeme poznat, že se vlastně jedná o tutéž kometu, a to s využitím Jacobioho integrálu, který se v problému tří těles zachovává vždy, i při blízkých přiblíženích. Potřebujeme pouze vyjádřit C_J v inerciálních (nečárkovaných) souřadnicích a pak jako funkci a, e, I .

Nejprve opišme Jacobioho integrál v neinerciálních (čárkovaných) souřadnicích:

$$C_J = n^2(x'^2 + y'^2) + 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Provedme zpětnou transformaci souřadnic (v (3) stačí zaměnit n za $-n$):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x + ny) \cos nt + (y - nx) \sin nt \\ (y - nx) \cos nt - (x + ny) \sin nt \\ z' \end{pmatrix}.$$

První dva členy C_J jsou vůči rotaci invariantní, pouze u třetího musíme počítat:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a^2 \cos^2 nt + 2ab \sin nt \cos nt + b^2 \sin^2 nt + \\ &+ b^2 \cos^2 nt - 2ab \sin nt \cos nt + a^2 \sin^2 nt + z'^2 \\ &= a^2 + b^2 + z'^2 + 2xny + n^2 y^2 + y^2 - 2jnx + n^2 x^2 + z'^2 \end{aligned}$$

Jacobioho integrál v inerciálních souřadnicích je tedy:

$$C_J = n^2(x^2 + y^2) + 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - (x^2 + y^2 + z^2) + 2n(xy - yx) - n^2(x^2 + y^2).$$

Nyní využijeme dva známé vztahy z problému dvou těles — integrál „živé síly“ a integrál momentu hybnosti (představujeme si přitom, že daleko od Jupitera bude pohyb komety dobře aproximovaný keplerovskou elipsou; zde $\mu = G(m_1 + m_2)$):

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$h = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| = |(0, 0, xy - yx)| = \sqrt{a(1 - e^2)}\mu.$$

Vzhledem k tomu, že dráha komety může být skloněná k dráze Jupitera o úhel I , musíme pro naše souřadnice vzít:

$$xy - yx = h \cos I.$$

Po dosazení je:

$$C_J = 2G \left[\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right] - Gm_1 \left[\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a} \right] + 2n\sqrt{a(1-e^2)}Gm_1 \cos I.$$

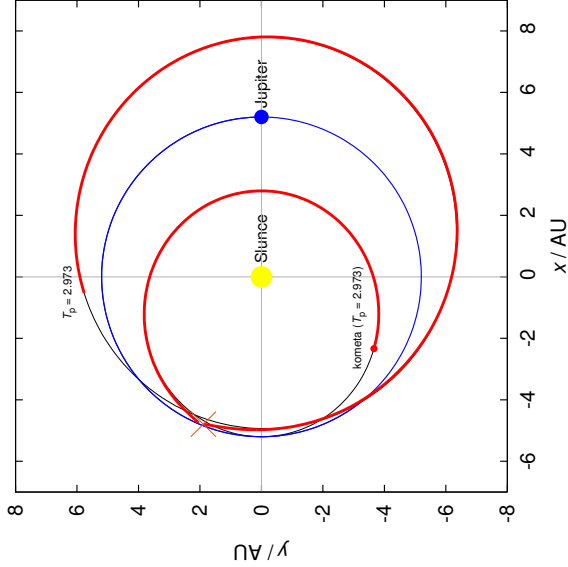
Budeme-li ještě předpokládat, že $m_2 \ll m_1$ (to je pro Jupiter–Slunce dobře splněno) a zároveň $R_2 \neq 0$ (C_J pro kometu počítáme, když jsme daleko od Jupitera), platí přibližně:

$$C_J \doteq \frac{Gm_1}{a} + 2n\sqrt{a(1-e^2)}Gm_1 \cos I,$$

Nakonec dosadíme za $n \doteq \sqrt{\frac{Gm_1}{a^3}}$ a označíme $T_p = C_J \frac{a}{Gm_1}$ jako *Tisserandův parametr*:

$$T_p = \frac{a_J}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_J}(1-e^2)} \cos I \doteq \text{konst.}$$

At už kometa prodělá přiblížení k Jupiteru kolik chce, hodnota $T_p(a, e, I)$ se pro její dráhu (přibližně) zachovává (viz příklady na obr. 5 až 7 a v tab. 1).

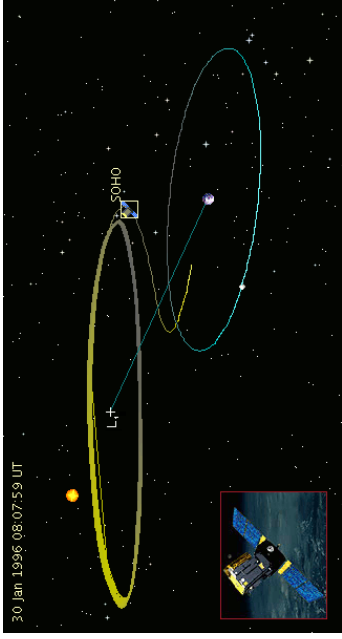


Obr. 5 — Orbita komety před přiblížením k Jupiteru a po něm, přičemž Tisserandův parametr je pro obě dráhy přibližně stejný. Tenkou čarou jsou naznačeny také oskuláčnicí elipsy platné pro začátek a konec skutečné trajektorie; mimo blízké přiblížení k Jupiteru jsou velmi dobrou aproximací pohybu. Oskuláčnicí sklon je po celou dobu roven nule (tedy $z = 0$). Výpočet numerickým integrátorem `swift_bs`.



Obr. 14 — Část naší skupiny na nádraží v Moskvě. Vlevo je mimochodem dvojitá elektrická mašinka ČS 7-068, celkem osminápravový stroj o úctyhodném výkonu (3 080 + 3 080) kW, který vyvine maximální rychlost 180 km/h. Pro ruské železnice je vyráběla Škoda Plzeň po roce 1983, ve velké 285 kusové sérii.

Víte, dlouho jsem zvažoval, zda popisovat detail po detailu celou cestu, ale opravdu to nejde. Počkejte si, až někoho z nás třinácti potkáte, protože to je na knihu informací. Už první den, kdy jsme slavili větší čtyřmístná kupé a pravidelně otevřený záchod, bylo jasné, že o legraci nebude nouze. Dlouhé básně o soudružnosti ruských cestujících ve vlaku se nepotvrдили. Namísto abychom byli obětmi příliš přátelských Rusů, byli jsme to my, kdo rozhoupal vlak. A to doslova. Ani Jirka Skála, který se svou ženou tak nějak jediný stál mentálně nohama na zemi, nás chvillemi nezkontil. První linii vedla dvojice Jana plus Jana (dále J+J), dvě učitelky a kamarádky z jižních Čech, které nás zásobily dětskými hrami a velkým zpěvníkem, což po večerech chlytilo každého. Posuny přes časová pásma nás navíc utvářely nociodolnými, neboť každý den nám na konto přibyla jedna hodina navíc. Z vedlejšího kupé k nám nejdříve se studentem, po necelých 24 hodinách s radostí, chodila na pravidelné návštěvy zhruba třiletá Tania. Její maminka byla vděčností bez sebe. Na každé zastávce vlaku nechyběly stánky s jídlem a zvolá-



Obr. 13 — Trajektorie sondy SOHO a její poloha 30. 1. 1996 při transferu od Země k bodu L_1 , okolo kterého dnes sonda obíhá. Pro názornost jsou zakresleny také Slunce, Země a oběžná dráha Měsíce. Převzato z (<http://orbits.esa.int/>).

- [1] BERTOTTI, B., FARINELLA, P., VOKROUHLICKÝ, D. *Physics of the Solar System*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402014287.
 [2] MURRAY, C. D., DERMOTT, S. F. *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521575974.

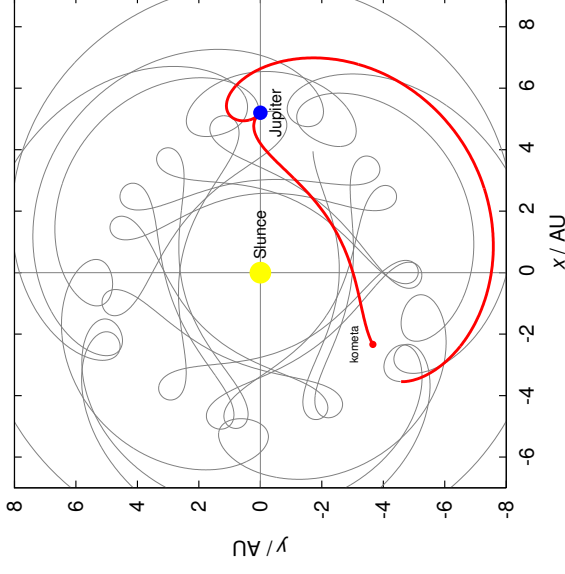
V. expedice SAROS

Petr Horálek

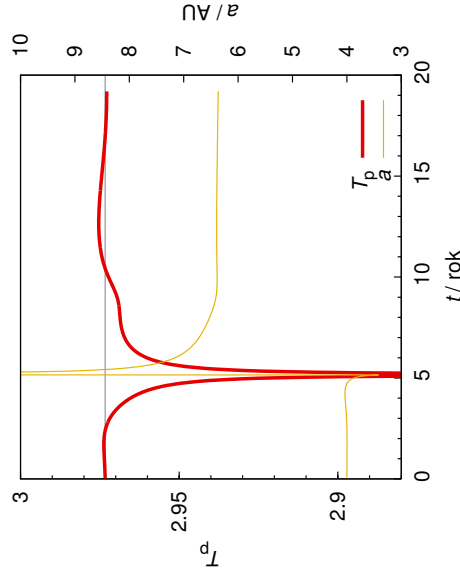
V. Expedice SAROS se stejně jako jiné expedice může chlubit úspěšným pozorováním novosibirského zatmění. Na serveru Expressních astronomických informací už vyšly všechny články o průběhu naší expedice a nyní přinášíme deníkovou formou popsané nejdůležitější momenty. Článek začíná v Moskvě a popisuje cestu Transsibiřskou magistrálou a pozorování slunečního zatmění v sibiřské metropoli Novosibirsk.

Ruské hlavní město se 29. července zahalilo do frontální oblačnosti. Poslední hygiena v koupelně hostelu Lenin mi přinesla zajímavý zážitek. Jak si tak čistím zuby, sahám pro legraci na lampu bez žárovky a hle, do rukou mi jde proud. Okamžitě to nahlašuji na recepci a pan recepční to jde kontrolovat. Nic necítí. Tak jsem v naší i hostelovské komunitě za blázna a poplašníka, načez až po půl hodině si Dalibor uvědomuje, že nemám boty — ráno jsem šel bos. Proto mnou to probíjí, ale jinými ne. Okamžitě to nahlašuji na recepci s vědomím, že pro člověka s mokřýma nohama by to mohlo být ještě víc nebezpečné, a pan recepční se zouvá. Sahá na zlatou lampičku a k mému strašnému překvapení neděkuje za upozornění, ale já sáá, jak je to úžasné! Děkuje za ten zážitek sáhnout si na živou elektriku. No, říkám si, možná si na mě vzpomenu, až se jim objeví před vchodem záchranka. . .

Ve 13h 11 min moskevského času odjíždí vlak číslo 76 z Kazanského vakuza a naše skupina po hodinovém čekání vesele skáče do vagónu číslo 12. A jedem směr Novosibirsk!



Obr. 6 — Tatáž trajektorie jako na obr. 5, ale v korotujícím systému. Tenkou čarou je známý zorný další vývoj po dobu 300 let; namísto elips v inerciálním systému jsou patrné typické „klíčky“ v korotujícím. (Slunce a Jupiter stále zůstávají v téže poloze, v jaké je vidíme na obrázku.)



Obr. 7 — Tisserandův parametr T_p a velká poloosa a v závislosti na čase t pro dráhu komety zobrazenou na obr. 5. S výjimkou blízkého přiblížení (kdy neplatí použité aproximace) je Tisserandův parametr (alias Jacobiho integrál) prakticky konstantní, i když u velké poloosy (alias celkové energie) je evidentní skok.

datum	q/AU	e	$I/^\circ$	T_J
31. 12. 1918	5,789	0,160	3,08	3,024
16. 7. 1950	3,405	0,143	3,98	3,035
18. 6. 1983	5,471	0,243	1,95	3,005

Tab. 1 — Vzdálenost pericentra $q = a(1 - e)$, excentricita, sklon a Tisserandův parametr pro kometu 39P/Oterma. Přestože kometa během 20. století prodělala dvě těsná přiblížení k Jupiteru, 27. října 1937 na 0,165 AU a 12. dubna 1963 na 0,095 AU, zůstává její T_J přibližně zachována.

Kometry Jupiterovy rodiny. Velmi pěknou aplikací problému tří těles je vysvětlení původu komet Jupiterovy rodiny (JFC), tj. komet, které mají afélium (nebo perihélium) v blízkosti Jupitera. Původem se totiž jedná o tělesa Kuiperova pásu (KBO), která se díky blízkým přiblížením k velkým planetám přesouvají z vnější do vnitřní části sluneční soustavy. Právě popis tohoto mechanismu nyní provedeme.

Zvolme počáteční elementy komety v Kuiperově pásu: $a = 39,5 \text{ AU}$, $I = 0^\circ$ a excentricitu takovou, aby se kometa v periheliu přiblížovala k Neptunu, tzn. $q = a(1 - e) = a_{\text{Neptunu}} = 30,1 \text{ AU} \Rightarrow e \doteq 0,24$. Co se bude dít při blízkém přiblížení komety k Neptunu? Jak se dráha komety může změnit? Především, podle *pricippu kauzality*, musí i „rozptýlená“ trajektorie stále procházet v blízkosti Neptunu! (Nemůže příliš „odskočit“; představíme-li si pohyb komety v minulosti, nikdy by Neptun nepotkala.) V nejpříznivějším případě bude pozmeněný afel komety u Neptunu:

$$Q' = a'(1 + e') = a_N. \quad (9)$$

Zároveň ale musí zůstat zachována hodnota Tisserandova parametru *vzhledem k Neptunu*:

$$T_N = T'_N = \frac{a_N}{a'} + 2 \overbrace{\cos I'}^{\simeq 1} \sqrt{\frac{a'}{a_N}(1 - e'^2)}, \quad (10)$$

kterou spočteme z počátečních elementů a , e komety ($T_N \doteq 2,99$). Vztahy (9) a (10) tvoří soustavu dvou nelineárních rovnic pro proměnné a' , e' . Když vyjádříme z první rovnice $\frac{a_N}{a'}$ a dosadíme do druhé, obdržíme kvadratickou rovnici pro e' :

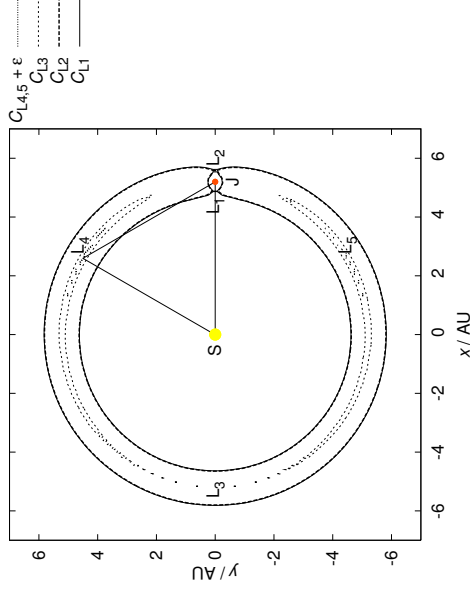
$$e'^2 + (-2T_N + 6)e' + (T_N^2 - 2T_N - 3) = 0,$$

jejíž řešení v oboru kladných reálných čísel je:

$$e' = T_N - 3 + 2\sqrt{3 - T_N} \doteq 0,21. \quad (11)$$

Snadno pak dopočteme, že $a' = \frac{a_N}{(1+e')} \doteq 24,8 \text{ AU}$ a perihélium $q' = a'(1 - e') \doteq 19,5 \text{ AU}$. Vidíme, že Neptun je schopen rozptýlit kometu *namejvíš k Uranu* ($s a_U = 19,2 \text{ AU}$), nikoli k Saturnu ($a_S = 9,6 \text{ AU}$), natož rovnou k Jupiteru ($a_J = 5,2 \text{ AU}$).

bod	x/a_J	y/a_J	$C_J/(a_J m)^2$
L_1	$(1 - \bar{\mu}) - \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{23}{81}\alpha^3 + \frac{23}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)$	0	$3 + 3\frac{4}{3}\bar{\mu}\frac{2}{3} - \frac{10}{3}\bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_2	$(1 - \bar{\mu}) + \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + \mathcal{O}(\alpha^5)$	0	$3 + 3\frac{4}{3}\bar{\mu}\frac{2}{3} - \frac{14}{3}\bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_3	$-\bar{\mu} - 1 + \frac{7}{12}\frac{m_2}{m_1} - \frac{7}{12}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \frac{13223}{20736}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^3 + \mathcal{O}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^4$	0	$3 + \bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_4	$\frac{1}{2} - \bar{\mu}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3 - \bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$
L_5	$\frac{1}{2} - \bar{\mu}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3 - \bar{\mu} + \mathcal{O}(\bar{\mu}^2)$



Obř. 12 — Polohy Lagrangeových libračních bodů L_1 až L_5 v soustavě Slunce–Jupiter (s počtem hmotnosti $\bar{\mu} \doteq 10^{-3}$). „Kostrbatost“ izochar potenciálu $2U$ je numerickým artefaktem.

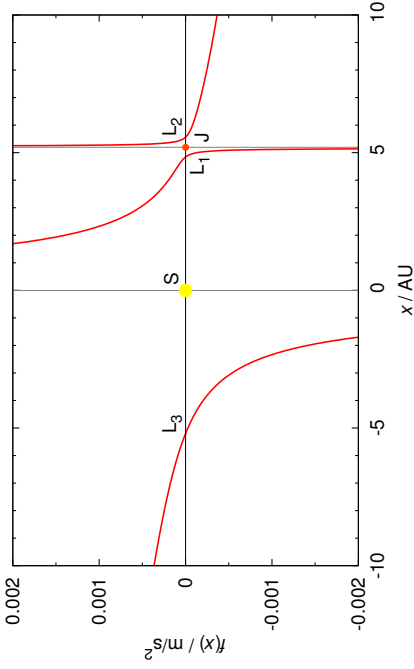
Stabilita libračních bodů. Podrobnější analýza ukazuje, že body L_4 a L_5 jsou lineárně stabilní, je-li $\bar{\mu} \simeq 0,0385$, což je pro Slunce–Jupiter splněno.⁴ Znamená to, že těleso může okolo těchto bodů setrvat velmi dlouhou dobu. Ostatně pozorujeme početnou populaci Trojanů a Řeků v Lagrangeových bodech příslušejících Jupiteru.⁵ Jednotlivé Trojany známe i u jiných planet: 4 u Marsu a 5 u Neptunu.

Body L_1 , L_2 a L_3 jsou naproti tomu exponenciálně nestabilní. Nestabilita ale není tak „hrozná“ — pro systém Slunce–Země může těleso zůstat v jejich okolí řádově měsíc. Poblíž L_1 a L_2 jsou například umístěny kosmické sondy SOHO a WMAP⁶; jejich dráha se musí jen několikrát ročně korigovat raketovými motory, aby neodletly pryč.

⁴ Toto platí při současné konfiguraci planet. Pokud se ale Jupiter a Saturn nacházejí v rezonanci středních pohybů 1:2, byla oblast okolo L_4 a L_5 v tu dobu zcela nestabilní.

⁵ K 26. 8. 2008 bylo známo 1274 asteroidů v L_4 a 1272 v L_5 . Celá populace Trojanů, včetně malých, dosud nepozorovaných těles, je však nejspíš početnější než hlavní pás mezi Marsem a Jupiterem.

⁶ V L_3 by bylo umístění sondy nepraktické, protože to je daleko za Sluncem.



Obr. 11 — Průběh funkce $f(x)$ a odpovídající polohy kolineárních Lagrangeových bodů L_1 , L_2 a L_3 pro soustavu Slunce–Jupiter.

V případě nekolineárních bodů, když je $y \neq 0$, musí zřejmě platit soustava dvou nelineárních rovnic:

$$G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{n^2}{G} \right] x + G \left[\frac{m_1 \bar{\mu} a_J}{R_1^3} - \frac{m_2 (1 - \bar{\mu}) a_J}{R_2^3} \right] = 0,$$

$$G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{n^2}{G} \right] y = 0.$$

Její řešení je možné zajistit tak, že výrazy v hranatých závorkách položíme identicky rovny nule, čímž obdržíme jednodušší soustavu, pouze pro R_1 a R_2 (navíc dosadíme za $n^2 = \frac{G(m_1+m_2)}{a_J^3}$, $\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ a $(1 - \bar{\mu}) = \frac{m_1}{m_1+m_2}$):

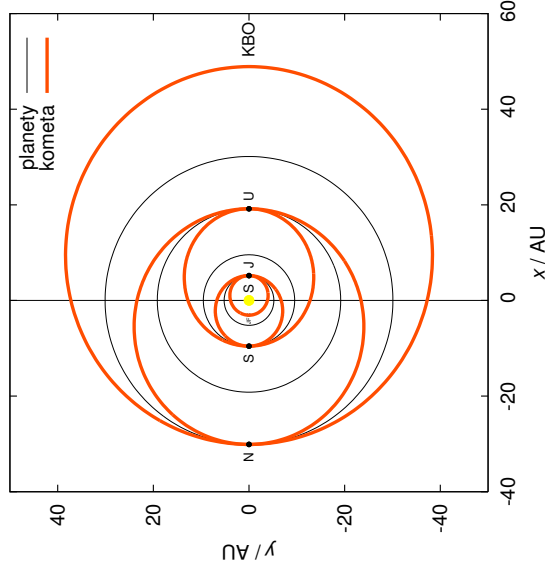
$$\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{m_1 + m_2}{a_J^3} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{m_1 m_2 a_J}{R_1^3} - \frac{m_2 m_1 a_J}{R_2^3} = 0. \quad (15)$$

Řešení je evidentní: $R_1 = R_2 = a_J$, což znamená dva librační body L_4 a L_5 ve vrcholech rovnostranných trojúhelníků Slunce–Jupiter–librační bod (viz obr. 12).

Bez odvození uvádíme vztahy pro výpočet poloh Lagrangeových bodů a příslušné hodnoty C_J (viz [2], $\alpha \equiv \left(\frac{m_2}{3m_1}\right)^{\frac{1}{3}}$):

Co se bude dít dál? Jakmile se dráha komety začne přibližovat Uranu, může ji Uran začít rozptylovat stejným mechanismem. Jako počáteční a , e pro výpočet rozptylu Uranem *nevezmeme* konečná a' , e' po rozptylu Neptunem, ale taková, že $q = a_U$ a $Q = a_N$, konkrétně $a = 24,6 \text{ AU}$ a $e = 0,22$. Stejně jako předtím spočteme Tisserandův parametr, ale tentokrát vzhledem k Uranu ($T_U = 2,99$), a z rovnice (11) zjistíme, že $e' = 0,20$, $a' = 16,0 \text{ AU}$, $q' = 12,8 \text{ AU}$. Dráha se již přibližuje Saturnu dosti těsně.



Obr. 8 — Dráhy čtyřech velkých planet a komety postupně „poskakující“ z Kuiperova pásu mezi komety Jupiterovy rodiny.

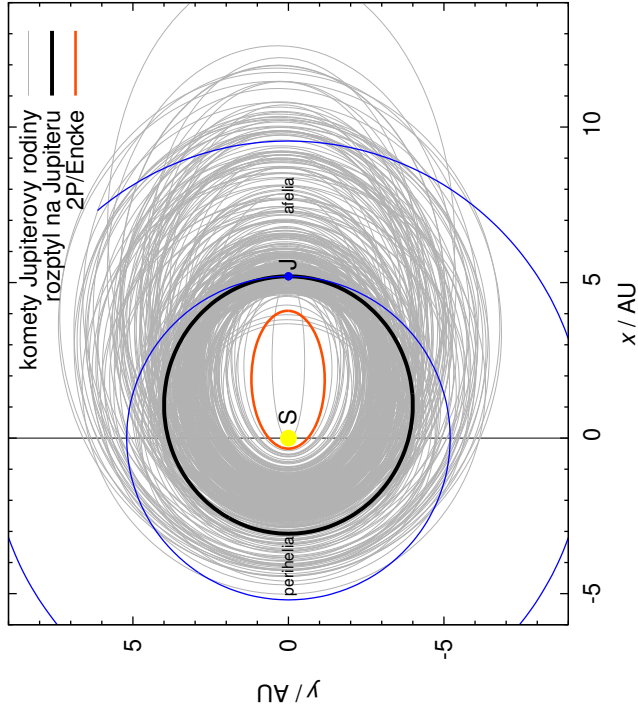
Asi je zřejmé, jak bychom pokračovali: stejně bychom popsali rozptylování na Saturnu a na Jupiteru. Konečná trajektorie komety, po rozptýlení na Jupiteru, vypadá takto:

$$e' = 0,27, \quad a' = 4,14 \text{ AU}, \quad q' = 3,07 \text{ AU}.$$

Podle obr. 9 vidíme, že se jedná o dráhu komety Jupiterovy rodiny. :)

Tělesa Kuiperova pásu tedy „poskakují“ od Neptunu k Uranu, od Uranu k Saturnu, od Saturnu k Jupiteru², kde skončí, protože žádná velká planeta uvnitř dráhy Jupitera není. Komety pak mohou po tisíce oběhů vykazovat aktivitu — tvořit komu a ohon v menších vzdálenostech od Slunce. Neaktivní komety se nám jeví jako asteroidy (na typicky kometárních dráhách).

² Kentauri, tj. pozorované asteroidy křížící dráhy velkých planet, jsou zřejmě právě takováto tělesa „na cestě“.



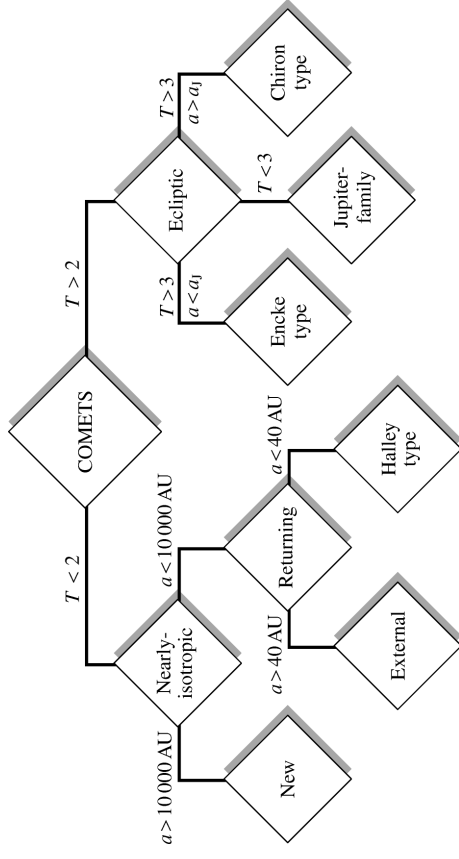
Obr. 9 — Orbyty komet Jupiterovy rodiny (skloněné do roviny dráhy Jupitera a otočené tak, že všechna perihélia jsou vlevo a afélia vpravo) v porovnání s typickou dráhou rozptýlenou na Jupiteru (odvozenou z problému tří těles). Záhadou je původ *aktivní* komety 2P/Encke, která má orbitu od Jupitera oddělenou. Vývoj na takovou dráhu přitom trvá miliony let, během kterých by se měla kometa dávno vyčerpát.

Klasifikace komet podle T_p

Hodnota Tisserandova parametru T_p vzhledem k Jupiteru může být užitečná pro klasifikaci drah komet (obr. 10). Komety s $T_p > 2$ se nazývají *ekliptikální*, protože vždy mívají malé sklonové dráhy. Dále se člení na komety Jupiterovy rodiny, je-li $T_p < 3$, a komety typu Encke a Chiron, které mají $T_p > 3$, což znamená, že se nepřibližují ke dráze Jupitera, ale leží celé uvnitř, respektive vně.³

Důležitou vlastností komet s $T_p < 2$ je, že mají sklon *téměř izotropní*, přilétají k nám prakticky ze všech směrů. Mají-li velkou poloosu $a > 10\,000$ AU, pokládáme je za nové, pokud ne, jsou zřejmě vracející se. Z těch můžeme ještě vyčlenit komety Halleyova typu s $a < 40$ AU.

³ Komety typu Chiron jsou pravděpodobně ekvivalentní Kentaurům, jen vykazují aktivitu.



Obr. 10 — Třídění drah komet podle hodnoty Tisserandova parametru T_p . Převzato z [1].

Lagrangeovy librační body

Librační body jsou místa, kde se kometa nepohybuje (mysleno samozřejmě v korotující soustavě, tzn. vzhledem ke Slunci a k Jupiteru; kdyby se nepohybovala v nekrotující, spadne na Slunce). To znamená, že všechny derivace jsou nulové:

$$\ddot{x} = \dot{y} = \ddot{z} = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0. \quad (12)$$

Dosazením této podmínky do pohybových rovnic (5) až (7) obdržíme:

$$\begin{aligned} -n^2 x &= -G \left[m_1 \frac{x + \bar{\mu} a_J}{R_1^3} + m_2 \frac{x - (1 - \bar{\mu}) a_J}{R_2^3} \right], \\ -n^2 y &= -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] y, \\ 0 &= -G \left[\frac{m_1}{R_1^3} + \frac{m_2}{R_2^3} \right] z. \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice okamžitě plyne, že $z = 0$, tedy všechny librační body nutně leží v rovině Jupiterovy dráhy kolem Slunce. Jedním z řešení druhé rovnice je $y = 0$, pak ovšem podle první rovnice:

$$f(x) \equiv -n^2 x + G \left[m_1 \frac{\operatorname{sgn}(x + \bar{\mu} a_J)}{(x + \bar{\mu} a_J)^2} + m_2 \frac{\operatorname{sgn}(x - (1 - \bar{\mu}) a_J)}{(x - (1 - \bar{\mu}) a_J)^2} \right] = 0. \quad (13)$$

Kořeny této funkce $f(x)$ jsou polohami libračních bodů (její průběh je obr. 11).