

# Určení měrného náboje elektronu z charakteristik magnetronu

## 1. Úvod

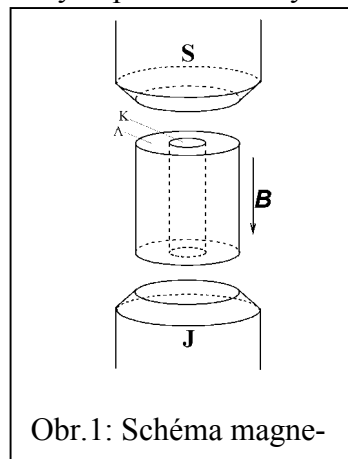
Měrným nábojem elektronu  $e/m_e$ , rozumíme poměr absolutní hodnoty jeho náboje  $e$  a hmotnosti  $m_e$ . Jde o důležitou veličinu, kromě jiného například i pro určení hmotnosti elektronu, která se neměří přímo; je však možné ji z měrného náboje  $e/m_e$  jednoduše určit při znalosti velikosti náboje  $e$ . Problematika přímého měření náboje elektronu má přitom svou specifickou historii (viz například [1]); dnešní užívaná hodnota (podle adjustace z r. 1986 [2]) činí  $e = 1,602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19}$  coulombu.

Klasické metody pro měření měrného náboje elektronu vycházejí ze **studia pohybu elektronu v elektrickém a magnetickém poli**. První spolehlivou hodnotu  $e/m_e = 1,7 \cdot 10^{11}$  C/kg získal roce 1897 objevitel elektronu J. J. Thomson na zařízení velmi podobném dnešní obrazovce, kombinující elektrické a magnetické vychylování elektronového svazku. Metody založené na studiu pohybu **volných elektronů** v elektrickém a magnetickém poli byly dále zdokonalovány a v prvních desetiletích 20. století přinesly značné zpřesnění výsledku.

Měrný náboj elektronu je možné určit i ze štěpení spektrálních čar atomových spekter v magnetickém poli, t.j. ze studia Zeemanova jevu. Na rozdíl od výše uvedených metod, se zde však nepracuje s volnými elektrony, ale s **elektrony vázanými v atomu**. Do stejné kategorie patří i metody založené na měření cyklotronové frekvence (viz např. [3]) **elektronů v látkách**. Výhodou takového uspořádání je, že umožňuje odstranit hlavní nepřesnost všech výše uvedených metod, t.j. nepřesnost určení velikosti magnetického pole, současným měřením Larmorovy frekvence protonů (viz např. [3]) za stejných podmínek. Dnes užívaná hodnota (podle adjustace z roku 1986) činí  $e/m_e = 1,758\,819\,62(53) \cdot 10^{11}$  C/kg.

## 2. Princip metody určování $e/m_e$ magnetronem

Magnetron je elektronka, která se dnes téměř výhradně používá ke generování elektromagnetických polí větších výkonů v mikrovlnné oblasti. (O konstrukci magnetronů pro takové účely, kdy je jeho vlastní systém přímo spojen s rezonančními dutinami naladěnými na pracovní frekvenci, viz například [4]). Díky tomu, že pro funkci magnetronu je využíváno zákonitostí pohybu elektronu v elektrickém a magnetickém poli, může být z charakteristik magnetronu principiálně určen i měrný náboj elektronu.



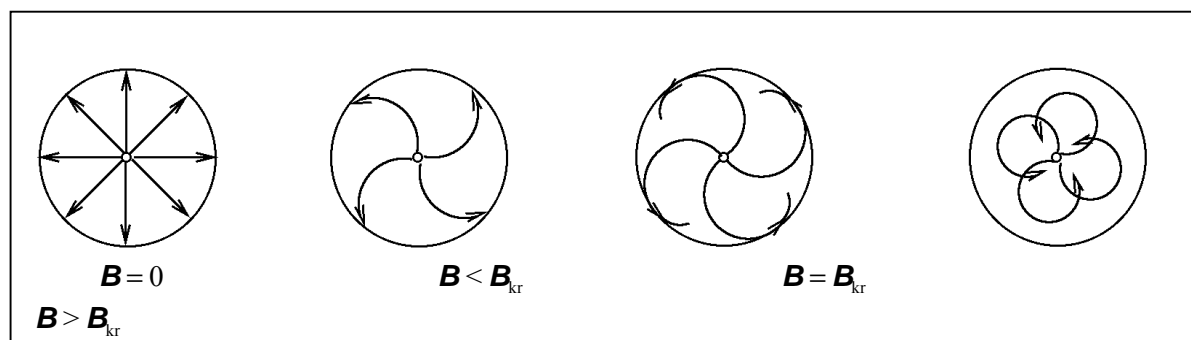
Obr. 1: Schéma magnetronu

I když – jak uvidíme níže – neposkytuje tato metoda možnost dosažení větší přesnosti, má svou didaktickou cenu pro jednoduchost realizace v principiálním uspořádání a pro názornost činnosti. Budeme proto diskutovat charakteristiky magnetronu v nejjednodušším uspořádání podle obr. 1, kde (žhavenou) katodu K a anodu A tvoří souosé válce o poloměrech  $r_K$  a  $r_A$  vložené do homogenního magnetického pole  $B$  rovnoběžného s osami elektrod.

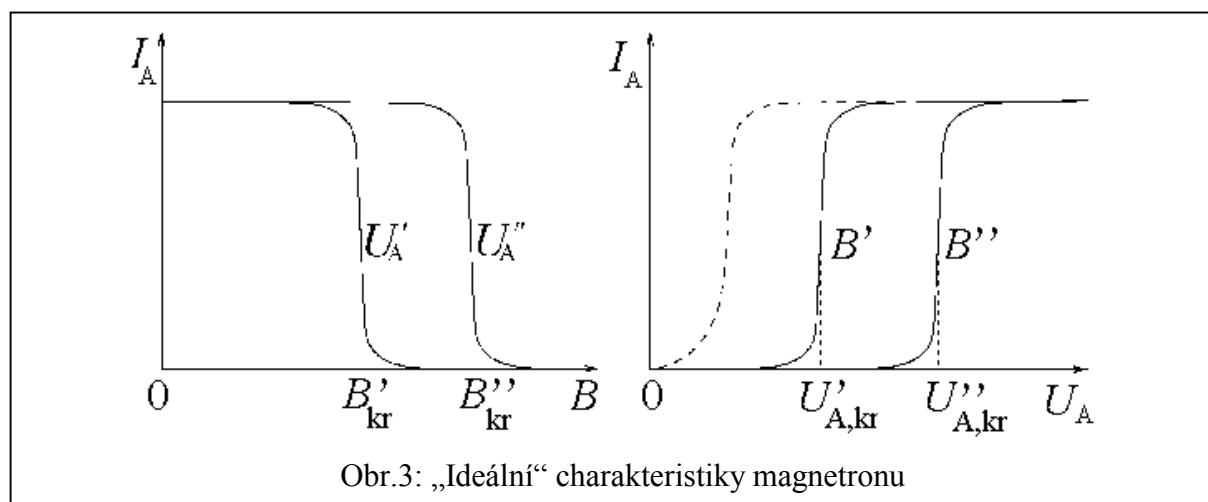
Je-li mezi katodou a anodou přiloženo napětí  $U_A$ , vznikne v prostoru mezi elektrodami

radiální elektrické pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , které urychluje elektrony silou  $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Magnetické pole současně působí na elektron silou  $\mathbf{F}_m = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , kde  $\mathbf{v}$  je okamžitá rychlost elektronu. Díky tomu, že síla  $\mathbf{F}_m$  je kolmá ke směru rychlosti, je dráha elektronu magnetickým polem zakřivená v rovině kolmé ke směru  $\mathbf{B}$ ; s rostoucím magnetickým polem vzrůstá zakřivení, až od určité hodnoty  $B_{kr}$  elektrony nedosáhnou anody vůbec. obr. 2 zobrazuje schematicky situaci pro různé hodnoty pole  $B$ . (Ve skutečnosti ovšem, díky tomu, že elektrické pole není homogenní, nejsou dráhy elektronů kruhové).

Charakteristikou magnetronu se rozumí buď závislost anodového proudu  $I_A$  na magnetické indukci  $B$  při konstantním anodovém napětí  $U_A$ , nebo závislost anodového proudu na anodovém napětí při konstantní hodnotě  $B$ . Oba typy charakteristik jsou schematicky zobrazeny na obr. 3. Pro oba typy jsou charakteristické oblasti rychlého poklesu anodového proudu  $I_A$ ; pro



charakteristiky typu  $I_A = I_A(B)$  charakterizované dvojicemi hodnot  $U_A, B_{kr}$  a pro charakteristiky typu  $I_A = I_A(U_A)$  dvojicemi hodnot  $B, U_{A,kr}$ . Ukážeme, že právě z těchto naměřených hodnot lze měrný náboj elektronu  $e/m_e$  principiálně určit. Za tím účelem budeme vyšetřovat pohyb elektronu v magnetronu za předpokladu, že na anodu je přiloženo napětí  $U_A$ , které v prostoru mezi anodou a katodou vytvoří osově symetrické radiální pole popsané potenciálem  $V(r)$ . Zavedeme-li soustavu souřadnou s osou  $z$  totožnou s osou magnetronu můžeme pohyb elektronu popisovat v rovině  $(x, y)$  pomocí polárních souřadnic zavedených vztahy  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . S ohledem na osovou symetrii problému je nejvýhodnější pohyb elektronu popsat pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu (viz např. [5]). Lagrangeovu funkci  $L$  pak mů-



Obr.3: „Ideální“ charakteristiky magnetronu

žeme vyjádřit pomocí kinetické energie elektronu  $E_k = m_e(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)/2$  a zobecněného potenciálu ve tvaru (viz například [5])  $\tilde{U} = e[V(r) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})]$ . Platí

$$L = m_e(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi})/2 - e[V(r) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A})], \quad (1)$$

kde  $\mathbf{A}$  je vektorový potenciál magnetického pole. Pro homogenní pole  $\mathbf{B}$  orientované ve směru osy  $z$  lze vektorový potenciál vyjádřit ve tvaru (viz např. [3])

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0\right) = \left(-\frac{B}{2}r\sin\varphi, \frac{B}{2}r\cos\varphi, 0\right) \quad (2)$$

a Lagrangeovu funkci v konkrétním vyjádření

$$L = \frac{m_e}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - e\left[V(r) + \frac{Br^2}{2}\dot{\varphi}\right]. \quad (3)$$

Vidíme, že Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na souřadnici  $\varphi$ , která je tudíž souřadnicí cyklickou a zobecněná hybnost  $\partial L / \partial \dot{\varphi}$  je integrálem pohybu. Platí

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_e r^2 \dot{\varphi} - e \frac{Br^2}{2} = C. \quad (4)$$

Integrační konstantu  $C$  lze určit z počátečních podmínek vycházejících z předpokladu, že elektron vystupuje z katody s nulovou rychlostí, tedy že pro  $r = r_K$  platí  $\dot{\mathbf{r}} = 0$ . Platí pak

$$\dot{\varphi} = \frac{eB}{2m_e} \left(1 - \frac{r_K^2}{r^2}\right). \quad (5)$$

Uvědomíme-li si, že magnetické pole při zakřívování dráhy elektronu nekoná práci a že celková kinetická energie elektronu přilétajícího k anodě byla získána elektrickým polem, můžeme napsat pro případ kritického pole  $B_{kr}$ , kdy elektron přilétá k anodě v tečném směru rychlostí  $v_{kr}$ , podmínku

$$eU_{A,kr} = \frac{m_e}{2}v_{kr}^2 = \frac{m_e}{2}r_A^2\dot{\varphi}_{kr}^2 \quad (6)$$

Dosazením do (5) pro danou situaci dostaneme konečný výsledek

$$\boxed{\frac{e}{m_e} = \frac{8U_{A,kr}}{B_{kr}^2 r_A^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_K^2}{r_A^2}\right)^2}}, \quad (7)$$

který může být po odečtení hodnot  $U_{A,kr}$  a  $B_{kr}$  z naměřených charakteristik, použit k určení  $e/m_e$ . Při jeho používání je však třeba si uvědomit předpoklady, za kterých byl odvozen a které ve skutečnosti nejsou přesně splněny:

- Elektrony nevystupují z katody s nulovou rychlostí a jejich počáteční rychlosti mají určité statistické rozdělení.
- Při měření charakteristik magnetronu nesledujeme pohyb jednoho elektronu ve vakuu, ale měříme elektronový proud magnetronem. Elektrony v magnetronu se pohybují ve výsledném elektrickém poli daném superpozicí pole vytvářeného zdrojem napětí  $U_A$  a pole vytvořeného oblakem emitovaných elektronů v okolí katody (tzv. polem prostorového náboje elektronů). Průběh elektrického pole, ve kterém se elektrony pohybují, je tudíž značně složitější a závisí na velikosti prostorového náboje a tedy i na velikosti měřeného anodového proudu (srovn. např. [3], stať 7.3.7). Uvedenou skutečností je ovlivněn konkrétní tvar drah elektronů, není jí však ovlivněna energetická bilance (6) elektronu přilétajícího k anodě.
- Na okrajích elektrod magnetronu je elektrické pole deformované a značně se odchyluje od pole radiálního, předpokládaného při odvozování vztahu (7). Ani dráhy elektronů nejsou tedy rovinné, jak vzorec (7) předpokládá. Pro elektrony emitované z okrajů katody vzorec

tudíž přesně neplatí. Významnou roli hraje i přesnost nastavení směru magnetického pole do osy katody.

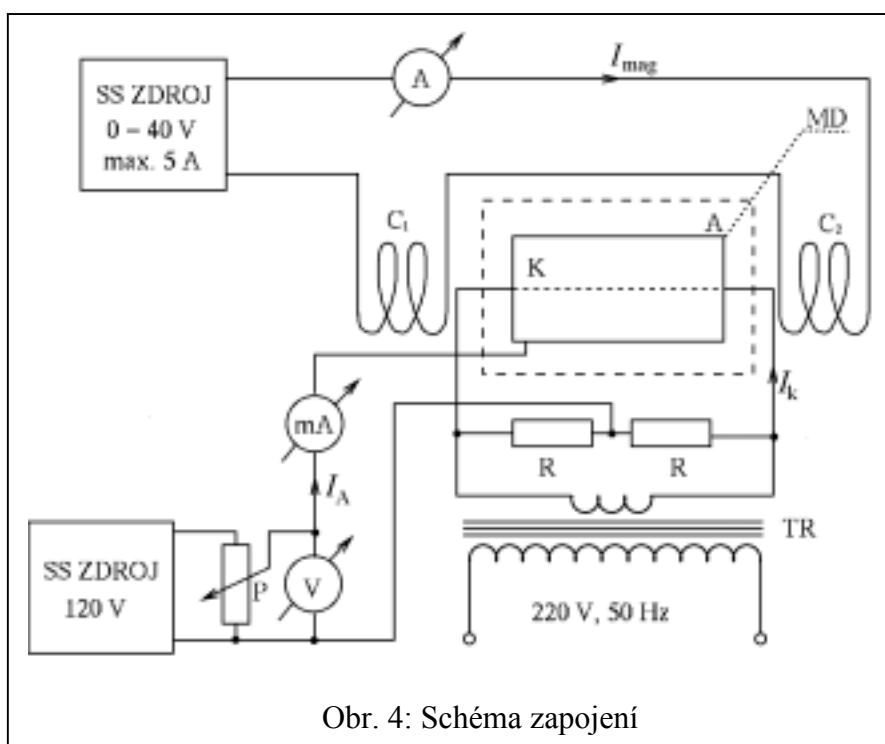
- Při nepřesném nastavení směru magnetického pole do osy katody nebo v případě, že katoda není zcela přímá (například v důsledku jejího „prověšení“ při nažhavení), se elektrony pohybují v rovinách ne zcela kolmých k ose anody. Tato okolnost vede rovněž ke snížení strmosti charakteristik a může být i příčinou systematické chyby v určení měrného náboje.

Z výše uvedených (a i některých dalších) důvodů mají reálně změřené charakteristiky poněkud odlišný průběh ve srovnání s „ideálními“ charakteristikami podle obr. 3. Pokles anodového proudu v kritické oblasti je zpravidla pomalejší, takže většinou nelze k žádné části charakteristiky vést svislou tečnu vymezující kritické hodnoty anodového napětí či magnetického pole. V takové situaci je pro určení kritických hodnot třeba vzít za směrodatný střední bod nejstrměji klesající části charakteristiky, případně její inflexní bod.

### 3. Experimentální uspořádání

#### a) Schéma zapojení

Zapojení pro měření charakteristik magnetronu „MD“ je uvedeno na obr.4.



Obr. 4: Schéma zapojení

Anodu magnetronové diody tvoří molybdenový válec s vnitřním poloměrem  $r_A$ , přímo žhavenou katodu wolframové vlákno o poloměru  $r_K$ . K vytváření magnetického pole  $B$  orientovaného ve směru osy diody je použita dvojice stejných cívek „ $C_1, C_2$ “ v Helmholtzově uspořádání. Magnetizační proud  $I_{mag}$  je regulován ovládacími prvky zdroje a měřen ampérmetrem „A“. Anodové napětí  $U_A$  pro magnetron je regulováno potenciometrem „P“ napájeným ze

zdroje pevného stejnosměrného napětí 120 V, anodový proud  $I_A$  je měřen digitálním miliampermetrem „mA“, anodové napětí  $U_A$  je měřeno voltmetrem „V“.

Katoda magnetronu je žhavana střídavým napětím 2,5 V z transformátoru „TR“, záporný pól anodového napětí je (pro zvýšení symetrie uspořádání) připojen ke katodě ve středu symetrizačního děliče tvořeného dvěma rezistory „R“.

### b) Vlastnosti použitého zdroje magnetického pole.

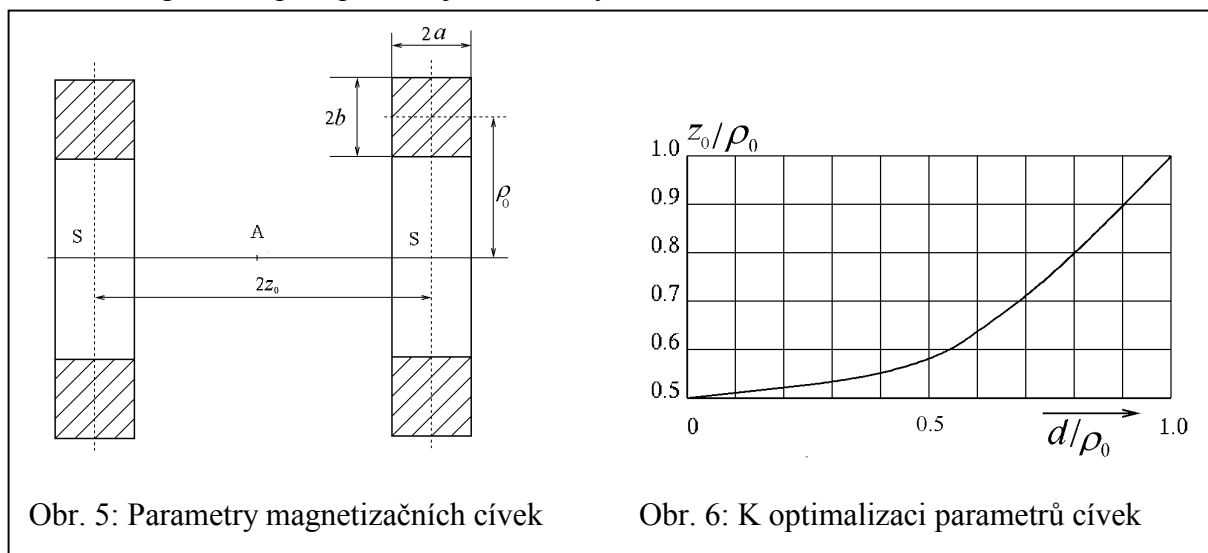
Tímto zdrojem je dvojice stejných cívek protékaných proudem  $I_{\text{mag}}$  v souhlasném směru. Ve známém Helmholtzově uspořádání, kdy vzájemná vzdálenost rovin symetrie obou cívek  $2z_0$  je rovna střednímu poloměru  $\rho_0$  jejich vinutí (viz obr. 5), vytváří cívky pozoruhodně homogenní pole v okolí středového bodu „A“ na jejich společné ose za předpokladu, že rozměry  $a$ ,  $b$  vinutí jsou zanedbatelné proti poloměru  $\rho_0$ . Pro magnetickou indukci  $B$  v bodě „A“ pak platí vztah (viz např. [6, 3])

$$B = \frac{8\mu_0}{5\sqrt{5}} \frac{NI_{\text{mag}}}{\rho_0}, \quad (8)$$

v němž  $N$  značí počet závitů jedné cívky. Homogenita pole Helmholtzových cívek v okolí středového bodu „A“ ve směru jejich společné osy je diskutována např. [6]. Z údajů zde uvedených plyne, že v intervalu délky  $0,1 \rho_0$  symetricky položeném vůči středovému bodu „A“, se magnetické pole liší o méně než o 0,01 % hodnoty v bodě „A“, určené podle vzorce (8)!

Prakticky není zpravidla možné dosáhnout potřebné hodnoty pole  $B$  při zachování podmínky, aby rozměry vinutí (charakterizované veličinami  $a$ ,  $b$  podle obr. 5) byly zanedbatelné vůči střednímu poloměru cívek  $\rho_0$ . V takové situaci vznikají z hlediska optimalizace problému dvě základní otázky:

- Jaká je optimální vzdálenost obou cívek pro dosažení optimální homogenity pole?
- Jaké magnetické pole produkují dané cívky ve středovém bodě „A“?



Obr. 5: Parametry magnetizačních cívek

Obr. 6: K optimalizaci parametrů cívek

První z uvedených otázek je řešena např. v [7], kde jsou uvedeny výsledky numerického výpočtu optimalizace homogenity pole v okolí středového bodu „A“ ve směru společné osy cívek (s přesností do třetího řádu rozvoje magnetického potenciálu), za předpokladu čtvercového průřezu vinutí  $a = b = d$ . Obr. 6 prezentuje výsledky výpočtu optimální závislosti poměru  $z_0/\rho_0$  na  $d/\rho_0$ . Z výsledku je například vidět, že pro  $d/\rho_0 \approx 0,2$  se optimální vzdálenost cívek liší jen o asi čtyři procenta od hodnoty  $d/\rho_0 = 0,5$ , charakteristické pro Helmholtzovy cívky se zanedbatelným průřezem vinutí.

Všimněme si nyní stručně závislosti magnetického pole  $B$  ve středovém bodě „A“ na průřezu vinutí charakterizovaném parametry  $a$ ,  $b$  podle obr. 5. Obecnější vzorec pro axiální a radiální složky pole v okolí bodu „A“ je uveden například v [8]. Speciálně pro bod „A“, v němž je radiální složka pole z důvodu symetrie nulová, z něj vychází pro magnetickou indukci  $B$  (v přiblížení do druhého stupně poměru  $b/\rho_0$ )

$$B = \frac{8}{5\sqrt{5}} \mu_0 \frac{NI_{\text{mag}}}{\rho_0} \left( 1 - \frac{b^2}{15\rho_0^2} \right). \quad (9)$$

Z výsledku vidíme, že pro  $b/\rho_0 = 0,1$  je korekce hodnoty  $B$  ve srovnání se vztahem (8) řádu desetin procenta.

#### 4. Parametry používané aparatury a pokyny pro měření

##### Magnetron:

- poloměr katody  $r_K = 0,19$  mm
- poloměr anody  $r_A = 5,00$  mm

##### Parametry magnetizačních cívek:

- počet závitů jedné cívky  $N = 630$
- vzdálenost rovin symetrie cívek  $2z_0 = 75$  mm
- střední poloměr cívky  $\rho_0 = 75$  mm
- rozměry vinutí:  $2a = 22$  mm,  $2b = 30$  mm

##### Upozornění:

Maximální magnetizační proud 2,0 A používejte jen po dobu nezbytně nutnou pro měření.

##### Literatura

- [1] J. Brož, V. Roskovec: Základní fyzikální konstanty, SPN, Praha 198
- [2] E. R. Cohen, B.N. Taylor: Physics Today, August 1991
- [3] B. Sedlák, I. Štoll: Elektřina a magnetismus, Academia – Karolinum, Praha 1993
- [4] A. T. Starr: Radiotechnika velmi krátkých vln, SNTL, Praha 1962
- [5] M. Brdička, A. Hladík: Teoretická mechanika, Academia, Praha 198
- [6] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983
- [7] H. Zijlstra: Experimental Methods in Magnetism, (v serii monografií Selected Topics in Solid State Physics, Vol. IX., editor E. P. Wohlfarth), Nordth Holland, Amsterdam 1967.
- [8] M. Rákoš: Základy meraní slabomagnetických látek, Vydavatelství SAV, Bratislava 1965