

## 2.1 Charakter optického zobrazení

V přiblížení geometrické optiky předpokládáme, že z bodového zdroje vychází nekonečný počet (tzv. homocentrických) paprsků, které vytvářejí homocentrický svazek. Potom každým jiným bodem v prostoru obecně prochází konečný počet těchto paprsků.

Jestliže existuje takový druhý bod, kterým prochází nekonečně mnoho těchto homocentrických paprsků, nazýváme jej *stigmatickým zobrazením bodového zdroje*.

Optická soustava, která je schopná stigmaticky zobrazit každý bod z třírozměrné oblasti (kterou nazýváme předmětovým prostorem) do jiné třírozměrné oblasti (zvané obrazový prostor) se nazývá *ideálním optickým přístrojem*. Pro naše účely budeme navíc požadovat jednoznačnost zobrazení. Pokud navíc je ideální přístroj schopen zobrazit třírozměrný předmět, nazýváme ho často *přístrojem absolutním*.

Pro absolutní přístroj platí tzv. Maxwellův teorém, který říká, že optická délka libovolné křivky, nacházející se v předmětovém prostoru, je rovna optické délce jejího (stigmatického) obrazu nacházejícího se v obrazovém prostoru (tento teorém uvádíme bez důkazu, lze jej nalézt např. v [I-4]). Při *ideálním zobrazení*, které kromě stigmatičnosti navíc zachovává geometrickou podobnost zobrazovaných křivek (znamená to m.j., že přímky se zobrazují jako přímky a body jako body), snadno nahlédneme, že zobrazení musí být z geometrického hlediska *zobrazením projektivním*, jsou-li jak předmětový, tak i obrazový prostor opticky homogenní. Potom je-li předmětem trojúhelník se stranami  $a_p, b_p, c_p$  a obrazem trojúhelník o stranách  $a_o, b_o, c_o$ , vyžaduje splnění Maxwellova teoremu platnost vztahů

$$N_p a_p = N_o a_o, \quad N_p b_p = N_o b_o, \quad N_p c_p = N_o c_o, \quad (2.1)$$

které zaručují geometrickou podobnost zobrazovaného trojúhelníka svému předmětu. V (2.1) značí  $N_p(N_o)$  index lomu předmětového (obrazového) prostoru. Současně si však je vhodné také uvědomit, že v nejčastějším případě, kdy index lomu předmětového i obrazového prostoru je stejný (např. index lomu vzduchu), nám z rovnic (2.1) vyplývá podmínka triviálního zobrazení, kdy

$$a_p = a_o, \quad b_p = b_o, \quad c_p = c_o \quad (2.2)$$

a obraz je tedy zcela kongruentní s předmětem.

Důsledkem toho je, že chceme-li získat netriviální zobrazení homogenních oblastí se stejným indexem lomu, nelze zajistit jeho naprostou ideálnost. Musí dojít buď k určitému porušení stigmatismu, nebo geometrické podobnosti (nebo obojího). Nemůžeme se tedy principiálně vyhnout různým vadám zobrazení.

## 2.2 Vlastnosti projektivního zobrazení - ohniskové roviny

Projektivní zobrazení přiřadí bodu předmětového prostoru o souřadnicích  $[x, y, z]$  opět bod v obrazovém prostoru, jehož souřadnice jsou  $[x', y', z']$ . Mezi souřadnicemi

předmětu a obrazu platí vztahy

$$\begin{aligned}x' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \\y' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}, \\z' &= \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_0x + b_0y + c_0z + d_0}.\end{aligned}\tag{2.2a}$$

Vyřešíme-li naopak tyto rovnice vzhledem k  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dostaneme analogické vztahy

$$\begin{aligned}x &= \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' + d'_1}{a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0}, \\y &= \frac{a'_2x' + b'_2y' + c'_2z' + d'_2}{a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0}, \\z &= \frac{a'_3x' + b'_3y' + c'_3z' + d'_3}{a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0}.\end{aligned}\tag{2.2b}$$

Z rovnic (2.2a) vidíme, že body v předmětovém prostoru ležící v rovině určené rovnicí

$$a_0x + b_0y + c_0z + d_0 = 0\tag{2.3a}$$

budou mít svůj obraz v nekonečnu. Tuto rovinu nazýváme *předmětovou ohniskovou rovinou*. Analogicky z rovnic (2.2b) můžeme definovat *obrazovou ohniskovou rovinu* určenou rovnicí

$$a'_0x' + b'_0y' + c'_0z' + d'_0 = 0,\tag{2.3b}$$

do které se zobrazí body předmětového prostoru nacházející se v nekonečnu.

## 2.3 Zobrazení centrovanými optickými systémy

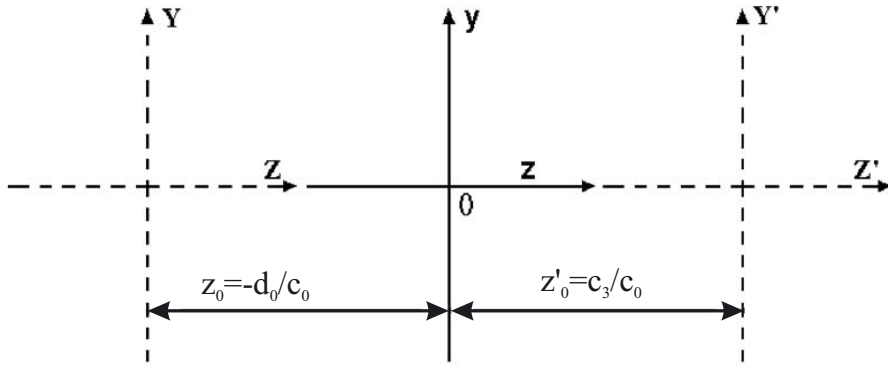
*Centrovanou optickou soustavou* rozumíme soustavu axiálně symetrickou vůči nějaké společné ose. Soustavu souřadnic lze zvolit tak, že osu  $z$  položíme do osy symetrie. Axiální symetrie dále vyžaduje, aby zobrazení libovolného bodu leželo v rovině určené tímto bodem a osou symetrie. Tato rovina se nazývá *meridiální rovina*. Je zřejmé, že zobrazování centrovanou soustavou stačí vyšetřovat v meridiální rovině, kterou můžeme ztotožnit s rovinou  $\{y, z\}$  naší soustavy souřadnic (viz obr. 2,1).

Pro centrovanou soustavu se rovnice (2.2a) redukuje na rovnice

$$y' = \frac{b_2y + c_2z + d_2}{b_0y + c_0z + d_0}, \quad z' = \frac{b_3y + c_3z + d_3}{b_0y + c_0z + d_0}.\tag{2.4}$$

Axiální symetrie dále vyžaduje, aby změna souřadnice  $y$  předmětu na  $-y$  nezměnila souřadnici  $z'$  obrazu, ale změnila jeho souřadnici  $y'$  na opačnou (tj.  $-y'$ ). Z (2.4) vidíme, že to je možné pouze tehdy, je-li

$$b_0 = b_3 = 0 \quad \text{a současně} \quad c_2 = d_2 = 0.$$



Obr. 2,1 Centrovaná optická soustava

Rovnice (2.4) se tedy zjednoduší na

$$y' = \frac{b_2 y}{c_0 z + d_0}, \quad z' = \frac{c_3 z + d_3}{c_0 z + d_0}. \quad (2.5a)$$

Vypočítáme-li z (2.5a) naopak polohu předmětu, dostaneme vztahy

$$y = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2} \frac{y'}{c_0 z' - c_3}, \quad z = \frac{-d_0 z' + d_3}{c_0 z' - c_3}. \quad (2.5b)$$

Polohy předmětové i obrazové ohniskové roviny (v důsledku axiální symetrie musí být kolmé k ose  $z$ ) dostaneme přímo z rovnic (2.5a,b). Pro průsečík předmětové ohniskové roviny s osou  $z$  – tzv. *hlavní předmětové ohnisko* – dostaneme

$$z_0 = -\frac{d_0}{c_0} \quad (2.6a)$$

a analogicky pro *hlavní obrazové ohnisko* platí

$$z'_0 = \frac{c_3}{c_0}. \quad (2.6b)$$

(viz obr. 2,1).

## 2.4 Souřadnice předmětového a obrazového prostoru a zobrazovací rovnice

Koeficienty  $c_0$ ,  $d_0$ ,  $b_2$ ,  $c_3$ ,  $d_3$  pro konkrétní centrovanou optickou soustavu závisí na naší volbě polohy počátku soustavy souřadnic na ose symetrie. Hlavní ohniska (předmětové i obrazové) jsou však již body pevně spjaté s vyšetřovanou soustavou. Proto přejdeme od naší libovolně zvolené soustavy  $\{y, z\}$  k soustavám souřadným předmětového i obrazového prostoru,  $\{Y, Z\}$  resp.  $\{Y', Z'\}$ , jejichž počátky položíme

do bodů  $z_0$  resp.  $z'_0$  (viz předchozí obr. 2,1). Z téhož obrázku je zřejmá platnost následujících transformačních vztahů:

$$y = Y, \quad z + \frac{d_0}{c_0} = Z, \quad (2.7a)$$

$$y' = Y', \quad z' - \frac{c_3}{c_0} = Z'. \quad (2.7b)$$

Kombinací těchto vztahů s rovnicemi (2.5a,b) dostaneme rovnice

$$Y' = \frac{b_2 Y}{c_0 Z}, \quad (2.8a)$$

$$Z' = \frac{d_3 c_0 - c_3 d_0}{c_0^2 Z}. \quad (2.8b)$$

Označíme-li defintoricky *předmětovou ohniskovou vzdálenost*  $f$  vztahem

$$f = \frac{b_2}{c_0} \quad (2.9a)$$

a *obrazovou ohniskovou vzdálenost*  $f'$  vztahem

$$f' = \frac{c_0 d_3 - c_3 d_0}{b_2 c_0} \quad (2.9b)$$

můžeme (2.8a,b) přepsat na výrazy

$$Z Z' = f f', \quad (2.10a)$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}. \quad (2.10b)$$

Rovnice (2.10a) se též nazývá *Newtonovou zobrazovací rovnicí*.

Poznámka: Při této příležitosti je vhodné připomenout používanou konvenci o znaménkách a o odečítání úhlů.

1. Kladný směr os  $Z$  i  $Z'$  je dán směrem paprsků, které  *vstupují*  do soustavy.
2. Souřadné systémy předmětového i obrazového prostoru jsou buď oba pravotočivé nebo levotočivé.
3. Úhly paprsků odečítáme od osy k paprsku a počítáme pouze ostré úhly. Kladný směr definujeme jako směr proti pohybu hodinových ručiček.
4. Poměr křivosti lámavé (nebo odrazové) plochy bereme jako kladný, je-li obrácena vypuklou stranou k dopadajícím paprskům.

## 2.5 Příčné zvětšení a hlavní body a roviny

Příčným zvětšením  $\beta$  velikosti obrazu nazýváme poměr změny velikosti obrazu ke změně velikosti předmětu (při nezměněné poloze předmětu). Bude tedy

$$\beta = \left( \frac{dY'}{dY} \right)_z. \quad (2.11)$$

Dosazením (2.10b) nalezneme, že

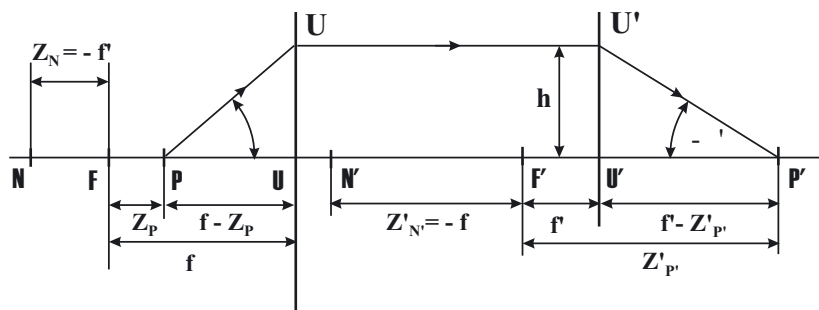
$$\beta = \frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'}. \quad (2.12)$$

Tohoto vztahu můžeme použít k nalezení rovin v předmětovém a obrazovém prostoru, mezi nimiž je příčné zvětšení rovno 1 (a kde tedy velikost obrazu se rovná velikosti předmětu). Podmínka  $\beta = 1$  spolu se vztahem (2.12) nám dává pro polohu těchto rovin, které nazýváme *hlavní předmětovou* resp. *obrazovou rovinou*, vztah

$$Z_h = f, \quad Z'_h = f'. \quad (2.13)$$

Průsečíky hlavních rovin s osou symetrie centrované soustavy nazýváme *hlavními body*. Na základě (2.13) tedy můžeme definovat ohniskovou vzdálenost také jako vzdálenost mezi ohniskovou rovinou a příslušnou hlavní rovinou, a tato vzdálenost je měřena *od ohniska* k hlavní rovině. V souladu s uvedenou znaménkovou konvencí je pak ohnisková vzdálenost kladná, je-li tento směr shodný s kladným směrem osy  $Z$ , v opačném případě je záporná.

## 2.6 Úhlové zvětšení a uzlové body



Obr. 2,2 K úhlovému zvětšení

Uvažujme zobrazení bodu  $P$ , který se nachází na ose symetrie centrované soustavy v bodě  $Z_p$  (viz obr. 2,2). Jeho obraz  $P'$ , který z důvodu axiální symetrie musí opět ležet na ose  $Z$ , má souřadnici  $Z'_{p'}$ . Paprsek, který vychází z bodu  $P$  pod úhlem  $\gamma$  a protne předmětovou hlavní rovinu  $U$  ve vzdálenosti  $h$  od osy, musí ve stejné vzdálenosti protnout i hlavní rovinu obrazovou  $U'$  a do obrazu  $P'$  dopadne pod úhlem  $\gamma'$ .

Z obr. 2,2 přímo vidíme, že

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{h}{f - Z_p}, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{tg}\gamma' = \frac{h}{f' - Z_{p'}},$$

takže lze psát

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma'}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{f - Z_p}{f' - Z_{p'}} \quad (2.15a)$$

což s použitím (2.10a) můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma'}{\operatorname{tg}\gamma} = -\frac{Z_p}{f'} = -\frac{f}{Z_{p'}}. \quad (2.15b)$$

Poměr  $\frac{\operatorname{tg}\gamma'}{\operatorname{tg}\gamma}$  nazýváme *úhlové zvětšení*.

Hledáme-li polohu takových sdružených bodů  $N$ ,  $N'$  na ose symetrie, pro které je úhlové zvětšení rovno jedné, tak z (2.15b) vyplývá, že

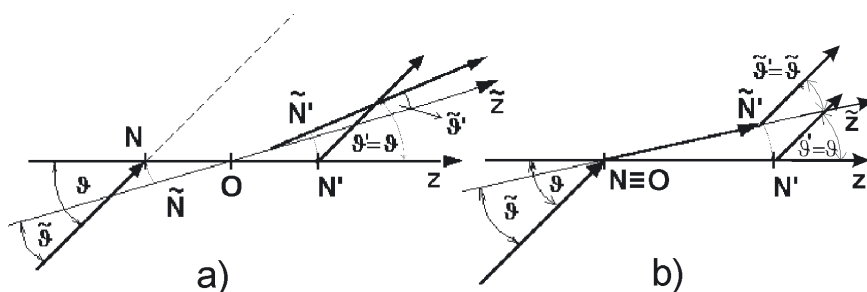
$$Z_N = -f', \quad Z_{N'} = -f \quad (2.16)$$

(viz obr. 2,2).

Body  $N$  a  $N'$  nazýváme *předmětovým a obrazovým uzlovým bodem*.

Z definice uzlových bodů přímo plyne, že sdružené paprsky jimi procházející musí být rovnoběžné. Tato skutečnost umožňuje nalézt experimentálně polohu uzlových bodů na ose symetrie systému.

Prochází-li paprsek předmětovým uzlovým bodem  $N$ , který se nachází na ose symetrie  $z$ , se kterou svírá úhel  $\vartheta$ , pak musí také projít obrazovým uzlovým bodem  $N'$  (ležícím opět na ose symetrie soustavy  $z$ ) a bude s osou  $z$  svírat opět stejný úhel  $\vartheta$ . Pootočíme-li celou optickou soustavu okolo osy kolmé k ose symetrie  $z$  a protínající ji v bodě  $O$  (viz obr. 2,3a), pak při obecné poloze osy pootočení již paprsek nebude procházet uzlovým bodem, takže vycházející paprsek se odchýlí od směru paprsku dopadajícího. Pouze tehdy, prochází-li osa pootočení předmětovým uzlovým bodem  $N$ , bude i po pootočení paprsek procházet tímto předmětovým uzlovým bodem a tedy i (pootočeným) obrazovým uzlovým bodem  $N'$ , a to pod stejným úhlem jako paprsek dopadající (viz obr. 2,3b). Máme-li tedy možnost posouvat centrovanou soustavu ve směru její osy symetrie a současně pootáčet okolo osy kolmo protínající osu symetrie, pak stačí nalézt takovou polohu osy pootočení, kdy paprsky dopadající do optické soustavy a paprsky z ní vycházející mají stejný směr. Průsečík osy pootočení s osou symetrie soustavy je pak předmětovým uzlovým bodem. Zanedlouho ukážeme, že v případě, kdy indexy lomu předmětového a obrazového prostoru se navzájem rovnají (situace, se kterou se běžně setkáváme), splývají u optické soustavy uzlové body s hlavními (odst. 2.5). Uvedený postup je tak možno použít i ke stanovení hlavních bodů, resp. jejich vzájemné vzdálenosti. O tom blíže v odst. 2.10.



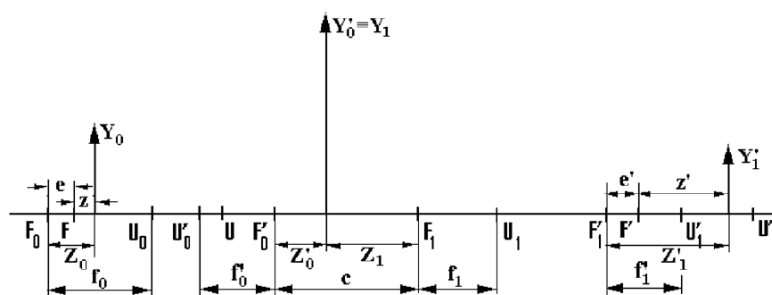
Obr. 2,3 Nalezení uzlových bodů

## 2.7 Kombinace dvou projektivních zobrazení

Uvažujeme dvě projektivní zobrazení (označené indexy 0, 1) se společnou osou symetrie, která jsou uspořádána tak, že obraz vytvořený soustavou  $Z_0$  je předmětem pro soustavu  $Z_1$ . Označíme-li tedy (viz. obr. 2,4)  $y$  - souřadnici zobrazovaného předmětu jako  $Y_0$ , pak  $Y'_0$  značí  $y$  - souřadnici obrazu vytvořeného soustavou  $Z_0$ . Analogické značení pro soustavu  $Z_1$  budiž  $Y_1, Y'_1$ . Z obr. 2,4 lze přímo odvodit transformační vztahy mezi souřadnicemi předmětových a obrazových prostorů obou soustav. Na jeho základě můžeme psát (s uvážením znaménkové konvence)

$$Y'_0 = Y_1, \quad (2.17)$$

$$Z'_0 - c = Z_1.$$



Obr. 2,4 Kombinace dvou projektivních zobrazení

Vzdálenost  $c = \overline{F'_0 F_1}$  mezi obrazovým ohniskem  $F'_0$  soustavy  $Z_0$  a předmětovým ohniskem  $F_1$  soustavy  $Z_1$  nazýváme *optickým intervalem*. Potom zobrazovací rovnice pro obě dvě soustavy lze psát ve tvaru

$$\frac{Y'_0}{Y_0} = \frac{Y_1}{Y'_0} = \frac{f_0}{Z_0} = \frac{Z'_0}{f'_0}, \quad (2.18a)$$

$$\frac{Y'_1}{Y_1} = \frac{Y'_1}{Y'_0} = \frac{f_1}{Z_1} = \frac{Z'_1}{f'_1}. \quad (2.18b)$$

Z rovnic (2.17) a (2.18a,b) pak určíme

$$Z'_1 = \frac{f_1 f'_1 Z_0}{f_0 f'_0 - c Z_0}, \quad (2.19a)$$

$$Y'_1 = \frac{f_0 f_1 Y_0}{f_0 f'_0 - c Z_0}. \quad (2.19b)$$

Uvažujeme-li kombinované zobrazení jako jedinou optickou soustavu, pak  $Y_0$  ztotožníme s jeho předmětem  $Y$  a  $Y'_1$  s jeho výsledným obrazem  $Y'$ , tj. můžeme psát

$$Y \equiv Y_0, \quad Y' \equiv Y'_1. \quad (2.20)$$

Pak je rozumné zavést pro kombinované zobrazení nové souřadnice  $Z$ ,  $Z'$  předmětového i obrazového prostoru. Zvolíme-li je tak výhodně, že

$$Z = Z_0 - e, \quad (2.21a)$$

$$Z' = Z'_1 - e', \quad (2.21b)$$

kde

$$e = \frac{f_0 f'_0}{c}, \quad (2.22a)$$

$$e' = -\frac{f_1 f'_1}{c}, \quad (2.22b)$$

pak s použitím (2.19a,b), (2.20), (2.21a,b) a (2.22a,b) dostaneme zobrazovací rovnice kombinovaného zobrazení ve tvaru

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{f}{Z} = \frac{Z'}{f'} \Rightarrow ZZ' = ff', \quad (2.23)$$

kde  $f$  a  $f'$  reprezentují předmětovou a obrazovou ohniskovou vzdálenost kombinovaného zobrazení a platí pro ně vztahy

$$f = -\frac{f_0 f_1}{c}, \quad (2.24a)$$

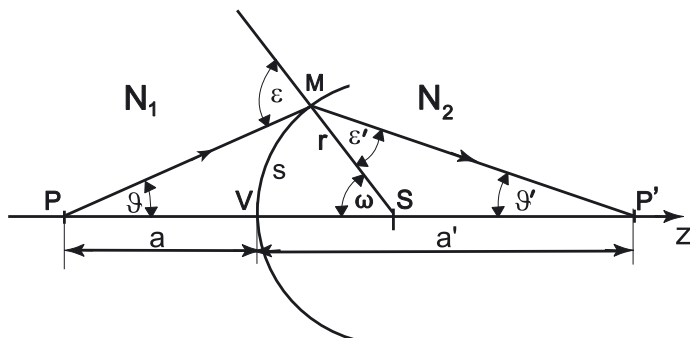
$$f' = \frac{f'_0 f'_1}{c}. \quad (2.24b)$$

Dá se ukázat, že  $e$  ( $e'$ ) je vzdálenost výsledného předmětového ohniska  $F$  (výsledného obrazového ohniska  $F'$ ) od předmětové ohniskové roviny soustavy  $Z_0$  (obrazové ohniskové roviny soustavy  $Z_1$ ) (viz obr. 2,4).

## 2.8 Lom paraxiálních paprsků na sférické ploše

Protože nás budou zajímat optické zobrazovací soustavy tvořené soustavou centrováných kulových lámavých ploch (čochky), připomeneme si zákony lomu na takovýchto lámavých rozhraních. Omezíme se při tom na paraxiální paprsky, tj. na paprsky, které svírají s osou symetrie velmi malé úhly.





Obr. 2,5 Lom na sférické ploše

Geometrie úlohy je znázorněna na obr. 2,5. Vzdálenost předmětu  $P$  (obrazu  $P'$ ) od vrcholu  $V$  kulové plochy označíme  $a$  ( $a'$ ) a doplníme naši znaménkovou konvenci v tom smyslu, že souřadnice  $a$  počítáme kladně ve směru *proti* vstupujícím paprskům, zatímco  $a'$  je počítáno kladně ve směru vstupujících paprsků (v daném případě tedy  $a > 0$ ,  $a' > 0$ ). Budiž  $N_1$ ,  $N_2$  absolutní indexy lomu prostředí oddělených kulovým rozhraním. Paraxiální paprsky charakterizují malé hodnoty úhlů  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  a tedy i úhlů  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$  a  $\omega$ . Protože z  $\triangle PMS$  a  $\triangle MSP'$  plynou vztahy mezi úhly

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \vartheta - \omega, \\ -\omega &= \varepsilon' - \vartheta'\end{aligned}$$

lze zákon lomu napsat ve tvaru

$$\frac{N_2}{N_1} \doteq \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\vartheta - \omega}{\vartheta' - \omega}. \quad (2.25)$$

Je-li  $s$  oblouk  $VM$ , pak lze úhly  $\vartheta$ ,  $\vartheta'$  a  $\omega$  vyjádřit jako

$$\vartheta \doteq \frac{s}{a}, \quad -\vartheta' \doteq \frac{s}{a'}, \quad -\omega \doteq \frac{s}{r}, \quad (2.26)$$

kde  $r$  je poloměr křivosti lámavé plochy. Dosazením (2.26) do (2.25) dostaneme

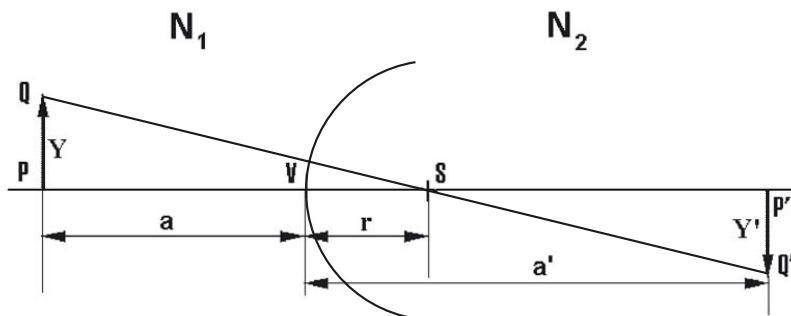
$$\frac{N_1}{a} + \frac{N_2}{a'} = P \quad (2.27a)$$

kde

$$P = \frac{N_2 - N_1}{r} \quad (2.27b)$$

se nazývá *optickou mohutností lámavé plochy*. Chceme-li určit příčné zvětšení sférické lámavé plochy, stačí uvažovat dva hlavní paprsky (ve směru poloměru), které procházejí plochou bez změny směru (obr. 2,6). Z podobnosti  $\triangle PQS$  a  $\triangle P'Q'S$  vychází přímo

$$\frac{Y'}{Y} = - \left( \frac{a' - r}{a + r} \right). \quad (2.28)$$



Obr. 2,6 Příčné zvětšení sférické lámavé plochy

Protože z (2.27) přímo plyne

$$a' = \frac{N_2 r a}{(N_2 - N_1) a - N_1 r} \quad (2.29)$$

dostaneme dosazením za  $a'$  do (2.28)

$$\frac{Y'}{Y} = -\frac{N_1 r}{(N_2 - N_1) a - N_1 r}. \quad (2.30)$$

(Vztahy (2.29) a (2.30) potvrzují projektivnost či kolineárnost zobrazení).

Podmínku pro polohu hlavních bodů (rovin), vyžadující jednotkovou hodnotu příčného zvětšení, lze s přihlédnutím k rovnici (2.28) splnit právě tehdy, je-li současně  $a = a' = 0$ . *Hlavní obrazová a předmětová rovina jsou tedy totožné a procházejí vrcholem V sférické lámavé plochy.*

Z rovnic (2.27a,b) nalezneme snadno polohu ohnisek a tedy i ohniskových rovin. Má-li se obraz nacházet v nekonečnu ( $a' \rightarrow \infty$ ), musí být předmět ve vzdálenosti

$$a = |f| = \frac{N_1 r}{N_2 - N_1} \quad (2.31a)$$

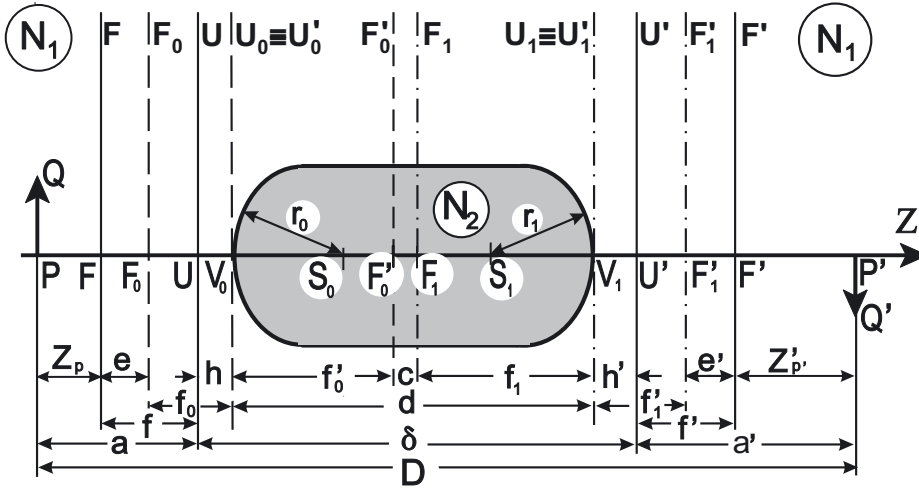
od bodu V. Stejně tak předmět nacházející se v nekonečnu ( $a \rightarrow \infty$ ) bude zobrazen ve vzdálenosti

$$a' = |f'| = \frac{N_2 r}{N_2 - N_1} \quad (2.31b)$$

od bodu V. Zde je vhodné poznamenat, že touto definicí ohniskových vzdáleností přecházíme vlastně od souřadných systémů s počátky v předmětovém a obrazovém ohnisku (odst. 2.4) k souřadným systémům s počátky v hlavních bodech zobrazovací soustavy. Vzhledem k orientacím souřadnic  $a, a'$  zavedeným na začátku tohoto odstavce (souřadnice předmětu před čočkou je kladná, což je v praxi často výhodné) stanoví vztahy (2.31a,b) ohniskové vzdálenosti  $f, f'$  v absolutní hodnotě. S uvažováním definice ohniskové vzdálenosti (měříme ji *od ohniska* k hlavní rovině, odst. 2.5) však musíme psát

$$f = \frac{N_1 r}{N_2 - N_1}, \quad f' = -\frac{N_2 r}{N_2 - N_1}. \quad (2.31c)$$

## 2.9 Průchod paraxiálních paprsků tlustou čočkou



Obr. 2,7 Schéma tlusté čočky

Tlustou čočkou rozumíme centrovanou optickou soustavu tvořenou dvěma sférickými plochami (z nichž alespoň jedna musí mít poloměr křivosti  $r \neq \infty$ ), které oddělují prostředí o indexu lomu  $N_2$  od okolního prostředí o indexu lomu  $N_1$ . Schematické znázornění tlusté čočky je na obr. 2,7. Zobrazení touto soustavou je kombinací dvou projektivních zobrazení vytvořených sférickými plochami o poloměrech  $r_0$  resp.  $r_1$ . Hlavní a ohniskové roviny první (druhé) sférické plochy jsou vyznačeny čárkovaně (čerchovaně), plně pak odpovídající roviny výsledného zobrazení. Vzdálenost  $d = \overline{V_0V_1}$  nazýváme *tloušťkou čočky*;  $h, h'$  jsou vzdálenosti hlavních rovin čočky od vrcholů obou sférických lámavých ploch;  $a, a'$  jsou vzdálenosti předmětu a obrazu měřené od předmětové resp. obrazové hlavní roviny;  $D$  je vzdálenost předmětu  $PQ$  od obrazu  $P'Q'$ . Ostatní označení byla zavedena v odst. 2.7.

Označíme-li  $n = \frac{N_2}{N_1}$  relativní index lomu čočky, pak použitím (2.31c) a s ohledem na záměnu indexů lomu  $N_1 \leftrightarrow N_2$  u druhé sférické plochy můžeme vyjádřit ohniskové vzdálenosti obou sférických lámavých ploch ve tvaru

$$f_0 = \frac{r_0}{n-1}, \quad f'_0 = -\frac{nr_0}{n-1}, \quad (2.32a)$$

$$f_1 = -\frac{nr_1}{n-1}, \quad f'_1 = \frac{r_1}{n-1}. \quad (2.32b)$$

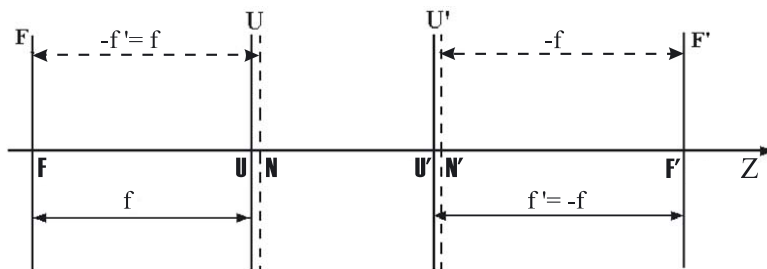
Z obr. 2,7 je zřejmé, že optický interval je roven  $c = d + f'_0 - f_1$ , takže po dosazení z (2.32a,b) obdržíme

$$c = d - \frac{n}{n-1}(r_0 - r_1). \quad (2.33)$$

Opět zavedeme souřadnice kombinovaného zobrazení (2.21a,b), (2.22a,b) a dosazením (2.33) do vztahů (2.24a,b) dostaneme výsledný výraz pro ohniskové vzdálenosti

tlusté čočky

$$f = -f' = \frac{n r_0 r_1}{(n-1)[(n-1)d - n(r_0 - r_1)]}. \quad (2.34)$$



Obr. 2,8 Hlavní a uzlové body tlusté čočky

Z výše uvedeného vztahu v kombinaci s výrazy (2.13) a (2.16) je zřejmé, že u tlusté čočky musí splývat hlavní a uzlové body (viz obr. 2,8, kde čárkovanými kótami jsou vyznačeny vzdálenosti uzlových bodů vzhledem k ohniskovým bodům a plnými kótami vzdálenosti hlavních rovin od ohniskových). Hlavní roviny leží ve vzdálenosti  $h$  resp.  $h'$  od bodů  $V_0$  resp.  $V_1$ . Z předchozího obr. 2,7 je zřejmé, že

$$h = -f_0 + e + f, \quad (2.35a)$$

$$h' = -f'_1 + e' + f'. \quad (2.35b)$$

Dosadíme-li do těchto vztahů (2.22a,b), (2.32a,b), (2.33) a konečně (2.34) dostaneme

$$h = \frac{r_0 d}{n(r_0 - r_1) - (n-1)d}, \quad (2.36a)$$

$$h' = \frac{r_1 d}{n(r_0 - r_1) - (n-1)d}. \quad (2.36b)$$

Pro čočku jako pro kombinované zobrazení platí vztah (2.23), který vzhledem k (2.34) lze psát ve tvaru

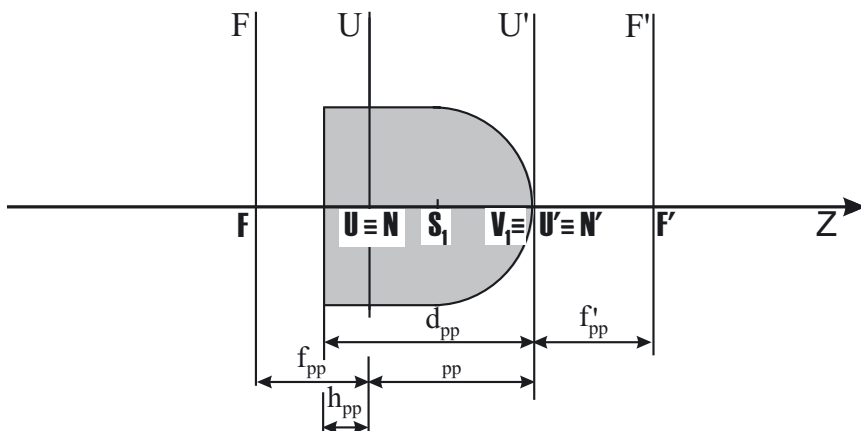
$$\frac{Y_{p'}}{Y_p} = \frac{f}{Z_p} = \frac{Z_{p'}}{-f} \Rightarrow Z_p Z_{p'} = -f^2. \quad (2.37)$$

Protože (s ohledem na znaménko)

$$Z_p = -(a - f), \quad Z_{p'} = a' - f, \quad (2.38)$$

lze psát

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}. \quad (2.39)$$



Obr. 2,9 Plankonvexní tlustá čočka

## 2.10 Plankonvexní tlustá čočka

Plankonvexní tlustá čočka má jednu lámavou plochu rovinnou (např.  $r_0 \rightarrow \infty$ ) a druhou vypuklou vzhledem k okolí. (viz. obr. 2,9). Přejdeme-li ve vztahu (2.34) k limitě  $r_0 \rightarrow \infty$ , vidíme, že dostaneme

$$f_{pp} = -f'_{pp} = -\frac{r_1}{n-1} \quad (2.40)$$

a analogickým limitním přechodem u vzorců (2.36a,b) získáme dále

$$h_{pp} = \frac{d}{n}, \quad (2.41a)$$

$$h'_{pp} = 0. \quad (2.41b)$$

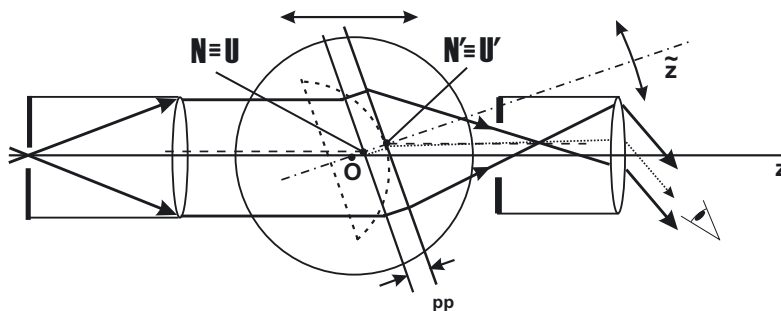
Protože obecný vztah pro vzájemnou vzdálenost hlavních rovin  $\delta = d - h + h'$ , který platí pro tlustou čočku (viz obr. 2,7) se u plankonvexní čočky redukuje (s ohledem na (2.41a,b) na

$$\delta_{pp} = \frac{n-1}{n} d, \quad (2.42)$$

dostáváme tak vztah mezi vzdáleností hlavních rovin, tloušťkou čočky a jejím indexem lomu.

Skutečnost, že hlavní a uzlové body čočky jsou totožné, umožňuje změřit  $\delta_{pp}$ . Stačí umístit plankonvexní čočku na otočný stolek goniometru, který umožňuje současně i posuv ve směru optické osy čočky. Osvětlíme čočku rovnoběžnými paprsky z kolimátoru a pozorujeme reálný obraz kolimátorové štěrbin (který se vytvoří v ohniskové rovině čočky) vhodně nastaveným dalekohledem. Při pootočení čočky z centrální polohy se, jak bylo ukázáno v odst. 2.6, bude obraz štěrbin vychylovat ze středu zorného pole kromě toho případu, kdy osa pootočení protne předmětový uzlový bod  $N$  (a kdy si tedy dopadající i vycházející paprsky zachovávají svůj směr). Otočíme-li čočku spolu s celým otočným stolek goniometru o  $180^\circ$ , stane se obrazový uzlový bod  $N'$  bodem předmětovým a naopak; k dosažení nehybného obrazu je pak třeba čočku posunout o vzdálenost  $\delta_{pp}$ , aby osa pootočení nyní procházela

bodem  $N'$ . Vzdálenost  $\delta_{pp}$  lze změřit a je tedy vzdáleností uzlových (a v případě čočky současně i hlavních) bodů; otáčení a současně posuv upevněné čočky se dá provádět na goniometru, jehož schema je na obr. 2,10.



Obr. 2,10 Měření vzdálenosti hlavních rovin čočky

## 2.11 Průchod paraxiálních paprsků tenkou čočkou

Velmi často používáme čočky, jejichž tloušťka  $d$  je vzhledem k poloměrům křivosti obou lámavých ploch velmi malá. Proto definujeme *tenkou čočku* jako čočku se zanedbatelně malou tloušťkou, tj. jako limitní případ, kdy  $d \rightarrow 0$ . Tento limitní přechod vede ke značnému zjednodušení dříve odvozených vztahů. Tak přejdeme-li ve vztahu (2.34) k limitě  $d \rightarrow 0$ , dostaneme pro ohniskové vzdálenosti tenké čočky

$$f = -f' = - \left( \frac{1}{n-1} \right) \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}. \quad (2.43)$$

Stejným způsobem z rovnic (2.36a,b) zjistíme, že

$$h = 0, \quad (2.44a)$$

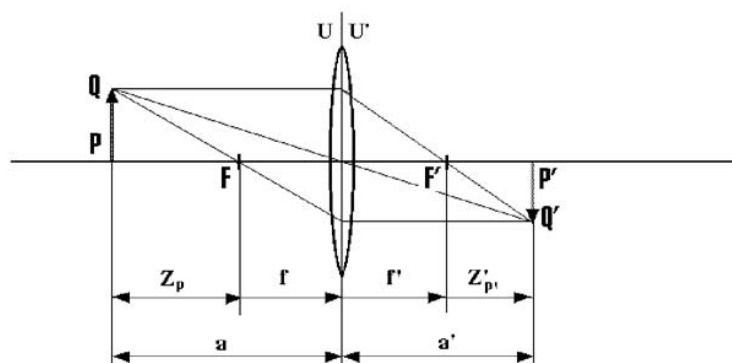
$$h' = 0. \quad (2.44b)$$

Protože pokládáme  $d \rightarrow 0$ , procházejí zřejmě hlavní roviny středem čočky, od kterého také měříme vzdálenosti předmětu a obrazu, tj.  $a$  a  $a'$  (viz obr. 2,11). Rovnice (2.37), (2.38) a (2.39) nezávisí na tloušťce čočky a zůstávají tedy v platnosti i pro tenkou čočku.

## 2.12 Určování ohniskové vzdálenosti čočky

Základem pro experimentální stanovení ohniskových vzdáleností jsou rovnice (2.37), (2.38) a (2.39) v nichž vystupují příčné zvětšení, vzdálenost předmětu od hlavní předmětové roviny  $a$  a vzdálenost obrazu od hlavní obrazové roviny  $a'$ .

Pokud můžeme čočku považovat za tenkou, pak jsou hlavní předmětová a obrazová rovina totožné a procházejí jejím středem. Od něj pak můžeme přímo měřit vzdálenosti  $a$ ,  $a'$  (ke vhodně zvolené vzdálenosti předmětu nalezneme polohu ostrého obrazu). Potom pro stanovení ohniskové vzdálenosti máme několik možností:



Obr. 2,11 Tenká čočka

1. Změříme  $a$ ,  $a'$  a  $z$  (2.39) spočteme přímo  $f$ .
2. a) Změříme absolutní hodnoty příčného zvětšení  $\left| \frac{Y'}{Y} \right|$  při vzdálenosti  $a$  předmětu od středu čočky. Ze vztahů (2.37) a (2.38) vyplývá, že

$$f = \frac{\left| \frac{Y'}{Y} \right| a}{\left| \frac{Y'}{Y} \right| + 1}. \quad (2.45a)$$

- b) Změříme-li příčné zvětšení a vzdálenost obrazu od středu čočky, zjistíme analogickým způsobem, že

$$f = \frac{a'}{\left| \frac{Y'}{Y} \right| + 1}. \quad (2.45b)$$

V některých případech je dosti obtížné určit přesně střed čočky (např. v důsledku jejího zabudování do držáku a pod.). Pak lze použít následujících metod:

3. Besselovy metody, která využívá toho, že rovnice (2.37) s ohledem na (2.38), je-li zapsána ve tvaru

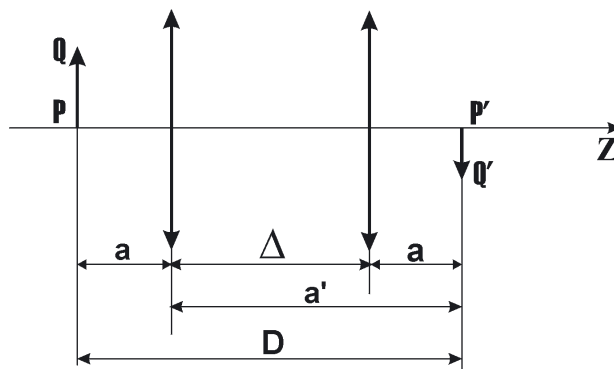
$$(a - f)(a' - f) = f^2 \quad (2.46)$$

je symetrická vzhledem k  $a$  i  $a'$ . To znamená, že pro danou vzdálenost obrazu a předmětu  $D$  ( $D > 4f$  – viz vztah (2.48)) existují dvě symetrické polohy čočky, jak je ukázáno na obr. 2,12.

Protože, jak plyne z obr. 2,12, platí, že

$$D = a + a', \quad (2.47a)$$

$$\Delta = a' - a, \quad (2.47b)$$



Obr. 2,12 Besselova metoda

lze z (2.47a,b) vypočítat  $a$ ,  $a'$  a dosazením do (2.39) dostaneme výraz pro ohniskovou vzdálenost

$$f = \frac{D^2 - \Delta^2}{4D}. \quad (2.48)$$

Protože zde stačí změřit pouze  $\Delta$ , vystačíme tak s odečítáním posuvů na optické lavici bez znalosti přesné polohy středu čočky.

4. a) Metody dvojího zvětšení, při které měříme změnu příčného zvětšení při změně vzdálenosti předmětu od čočky. Je-li při vzdálenosti  $a_1$  předmětu od čočky příčné zvětšení  $\left(\frac{Y'}{Y}\right)_1$  a při vzdálenosti  $a_2$  je totéž zvětšení  $\left(\frac{Y'}{Y}\right)_2$ , pak dosazením do (2.37) z (2.38) pro obě vzdálenosti 1, 2 a odečtením obou rovnic dostaneme pro ohniskovou vzdálenost výraz

$$f = \frac{\left(\frac{Y'}{Y}\right)_1 \cdot \left(\frac{Y'}{Y}\right)_2 |a_1 - a_2|}{\left|\left(\frac{Y'}{Y}\right)_2 - \left(\frac{Y'}{Y}\right)_1\right|}. \quad (2.49a)$$

- b) Měříme-li příčná zvětšení při dvou různých vzdálenostech obrazu od čočky, tj.  $a'_1$ ,  $a'_2$ , pak analogicky případu 4a) dostaneme pro ohniskovou vzdálenost výraz

$$f = \frac{|a'_1 - a'_2|}{\left|\left(\frac{Y'}{Y}\right)_2 - \left(\frac{Y'}{Y}\right)_1\right|}. \quad (2.49b)$$

Vidíme, že v obou případech stačí kromě příčných zvětšení zjistit pouze *změnu polohy předmětu (obrazu)*: není tedy třeba znát přesné hodnoty souřadnice středu čočky ani přesné polohy předmětu či obrazu vzhledem k optické lavici.

U tlusté čočky neznáme polohy hlavních rovin (tedy vzdálenosti  $h$ ,  $h'$ ) a nemáme odkud měřit vzdálenosti  $a$ ,  $a'$ . Proto pro stanovení ohniskové vzdálenosti můžeme a priori vyloučit metody 1), 2a), 2b). Bohužel však ani Besselova metoda 3) není aplikovatelná, nebo. jak plyne z obr. 2,7, rovnice (2.47a) má v tomto případě tvar

$$D = a + a' + d + h + h'$$

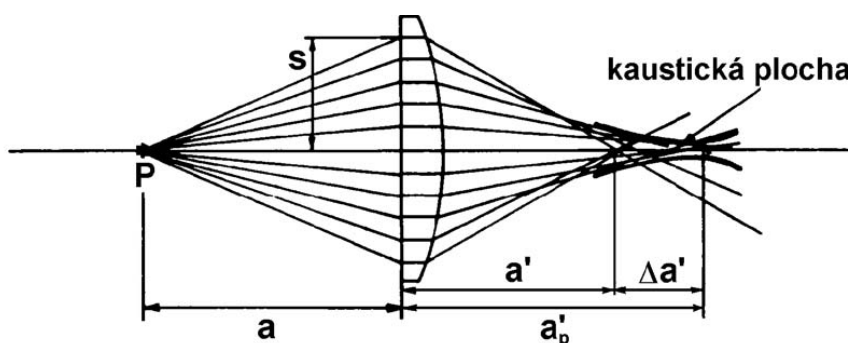


s neznámými  $h, h'$ .

Z námi uvedených metod je ke změření ohniskové vzdálenosti tlusté čočky tedy použitelná pouze metoda dvojího zvětšení 4a), 4b), kde stačí zjistit pouze změnu polohy předmětu (obrazu).

## 2.13 Sfěrická vada čoček

Pokud se neomezíme na paraxiální paprsky, zjistíme, že u spojné čočky při zobrazení bodu na ose se paprsky svírající s osou malé úhly protínají dále od čočky než paprsky, které svírají s osou větší úhly (viz obr. 2,13).



Obr. 2,13 Sfěrická vada čočky

Tomuto jevu říkáme sfěrická vada čočky. Paprsky obalují tzv. *kaustickou plochu*, jejíž nejmenší průřez někdy slouží jako míra sférické vady. Je-li pro paraxiální paprsky vzdálenost obrazu bodu  $P$  na ose od čočky rovna  $a'_p$  a pro paprsky procházející čočkou ve vzdálenosti  $s$  od osy je poloha obrazu ve vzdálenosti  $a'$ , nazýváme také sférickou vadou rozdíl

$$\Delta a' = a' - a'_p. \quad (2.50)$$

Takto definovaná sfěrická vada ale závisí na poloze předmětu. Proto bereme spíše hodnoty  $\Delta a'_\infty$  odpovídající nekonečně vzdálenému předmětu. Jak je zřejmé ze vztahu (2.50), je  $\Delta a'$  funkcí vzdálenosti  $s$ . Ukazuje se, že u jednotlivé čočky lze  $\Delta a'$  vyjádřit v dobrém přiblížení kvadratickou závislostí

$$\Delta a' = K s^2, \quad (2.51)$$

kde pro spojku je  $K < 0$ . Základy geometrické optiky a optických zobrazení si ověříte v úlohách 2.1 Měření parametrů zobrazovacích soustav a 2.2 Jednoduché optické přístroje – mikroskop.