6. MĚŘENÍ ÚČINÍKU

Výkon střídavého proudu

Tato úloha je zaměřena na problematiku měření výkonu v obvodu, kterým protéká střídavý proud. Střední hodnota výkonu v tomto případě závisí nejen na efektivních hodnotách proudu a napětí, ale též na vzájemném fázovém posuvu φ těchto veličin.

Střední hodnota výkonu (dále jen výkon) je definována vztahem

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt\,, \tag{1}$$

ve kterém $u(t)$ a $i(t)$ jsou okamžité hodnoty napětí a proudu v čase t, veličina T znamená dobu kmitu. V případě harmonické závislosti proudu a napětí bude pro výkon platit

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 \sin\frac{2\pi}{T}t \cdot I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{T}U_0 I_0 \sin\varphi \int_0^T \left(\sin\frac{2\pi}{T}t \cdot \cos\frac{2\pi}{T}t\right)dt + \frac{1}{T}U_0 I_0 \cos\varphi \int_0^T \left(\sin^2\frac{2\pi}{T}t\right)dt = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi$$

Integrál ze součinu sinu a kosinu je roven nule, integrál z druhé mocniny sinu je roven $T/2$.

Do posledního výrazu je vhodnější dosadit místo špičkových hodnot U_0, I_0 efektivní hodnoty U, I napětí a proudu (viz úloha 5, vztah (3)). Pak bude

$$P = UI\cos\varphi\ . \tag{2}$$

Kosinus fázového posuvu φ proudu vůči napětí ($\cos\varphi$) se nazývá účiník. Fázový posuv φ může nabývat hodnot z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, takže účiník se může měnit od nuly (pro $\varphi = \pm\pi/2$) do jedné (pro $\varphi = 0$).

Zobecněný Ohmův zákon

V předchozím textu jsme se seznámili s tím, že výkon spotřebovaný v obvodu protékaném střídavým proudem závisí nejen na amplitudách (efektivních hodnotách) proudu a napětí, ale i na jejich vzájemném fázovém posuvu. Vztah mezi napětím a proudem i s hlediska fázového posuvu nelze popsat pomocí Ohmova zákona, používaného ve formě $U = RI$ pro obvody stejnosměrné. Pro obvody střídavého proudu (harmonického průběhu) používáme proto komplexní symboliky. V jednom komplexním čísle lze zachytit dva údaje. Problematice použití komplexní symboliky pro popis lineárních obvodů je věnována 9. kapitola skript [2].

Komplexní symboliku lze zavést tak, že ve vyjádření časové závislosti proudu a napětí nahradíme goniometrickou funkci komplexní exponencielou

$$u^*(t) = U_0 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = U_0\{\cos(\omega t + \varphi_1) + j\sin(\omega t + \varphi_1)\} \tag{3}$$

$$i^*(t) = I_0 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = I_0\{\cos(\omega t + \varphi_2) + j\sin(\omega t + \varphi_2)\} \ . \tag{4}$$

V předchozích výrazech znamená U_0, I_0 špičkové hodnoty napětí a proudu, j imaginární jednotku, ω úhlovou frekvenci, φ_1, φ_2 fázi napětí a proudu a t čas. Okamžité hodnoty proudu a napětí jsou pochopitelně reálné a určuje je reálná část výrazů (3) a (4).

Poměr okamžitých hodnot u^* a i^* je časově nezávislý a určuje komplexní impedanci Z^* obvodu ustáleného střídavého proudu se sinusovým průběhem. Je zavedena pro usnadnění výpočtů v těchto obvodech, a je ji možno též stanovit jako poměr komplexního napětí U^* a komplexního proudu I^*.

$$Z^* = \frac{U^*}{I^*} \text{ , resp. } U^* = Z^* I^* \ . \tag{5}$$

Předchozí vztahy představují dvě ekvivalentní vyjádření zobecněného Ohmova zákona.

Komplexní proud a napětí je dán jako časově nezávislý součinitel ve výrazech (3) a (4), tj. platí

$$U^* = U_0 e^{j\varphi_1} \text{, resp. } I^* = I_0 e^{j\varphi_2} \ . \tag{6}$$

Protože $\left|e^{j\varphi}\right| = 1$ plyne ze vztahu (5) pro velikost (absolutní hodnotu) komplexní impedance

$$Z = \left|Z^*\right| = \frac{U_0}{I_0} \ .$$

Impedance odporu, kapacity a indukčnosti

Proud a napětí na odporu jsou vzájemně svázány vztahem $U^* = RI^*$. Porovnáním s (5) dostaneme, že platí

$$Z_R^* = R \ . \tag{7}$$

Impedance odporu je reálná a fázový posuv mezi proudem a napětím nulový. Náboj na kapacitě C je roven součinu této kapacity a napětí. Vzhledem k tomu, že proud udává derivace náboje podle času, bude platit

$$i^* = I^* e^{j\omega t} = C\frac{du^*}{dt} = j\omega C U^* e^{j\omega t}$$

Srovnáme-li druhý a čtvrtý výraz v předchozím vztahu (po vykrácení členu exp($j\omega t$) se vztahem (5) bude platit

$$Z_C^* = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2} \ . \tag{8}$$

Impedance kapacity je ryze imaginární a fázový posuv napětí vůči proudu bude -π/2.

Pro indukčnost platí

$$U^* = L\frac{di^*}{dt} \text{, resp. } U^* = j\omega L I^* ,$$

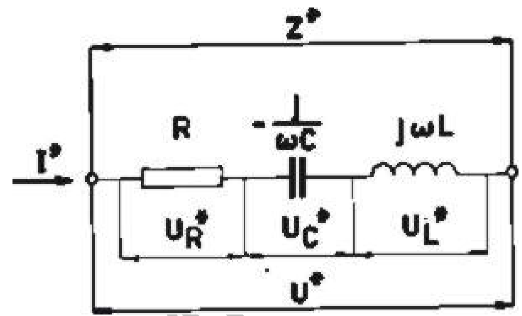
z čehož pro srovnání s (5) plyne

$$Z_L^* = j\omega L = \omega L e^{j\pi/2} \ . \qquad (9)$$

Impedance indukčnosti je opět ryze imaginární a fázový posuv napětí vůči proudu je π/2.

Sériové řazení impedancí

Při sériovém řazení viz obr. 1 teče všemi prvky elektrického obvodu stejný proud a napětí na celém obvodu je rovno součtu napětí na jednotlivých prvcích. Proto sériový obvod sestavený z odporu R, kapacity C a indukčnosti L bude proto platit



Obr. 1

$$U* = RI* - \frac{j}{\omega C} I* + j\omega L I* = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I*$$

Podle (5) bude impedance obvodu komplexní a rovná

$$Z* = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX \ . \qquad (10)$$

Velikost impedance bude určovat výraz

$$Z = \left|Z^*\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (11)$$

a fázový posuv napětí vůči proudu bude roven

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X}{R} = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \ . \qquad (12)$$

Z předchozích výrazů můžeme určit velikost impedance a fázový posuv pro zapojení pouze dvou prvků. Třetí prvek nahradíme zkratem ($R = 0$ či $L = 0$ nebo $1/\omega C = 0$).

Bude platit:

Pro obvod RL

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (13)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} \qquad (14)$$

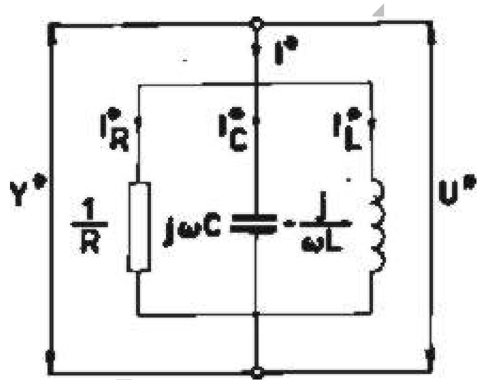
pro obvod RC

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \tag{15}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) \tag{16}$$

Paralelní řazení impedancí

Při tomto řazení prvků elektrického obvodu, viz obr. 2, je na všech prvcích stejné napětí a celkový proud je roven součtu proudů tekoucích jednotlivými prvky. Pro paralelní řazení odporu, kapacity a indukčnosti bude platit (viz vztahy (7), (8), (9)).



Obr. 2

$$I^* = \frac{1}{Z_R}U^* + \frac{1}{Z_C}U^* + \frac{1}{Z_L}U^* = \left(\frac{1}{R} + j\omega C - \frac{j}{\omega L}\right)U^*$$

Zavedeme-li pojem admitance, což je převrácená hodnota impedance

$$Y^* = Ye^{j\varphi'} = \frac{1}{Z^*} = \frac{1}{Z}e^{-j\varphi} \quad , \tag{17}$$

můžeme zapsat vztah mezi napětím a proudem ve tvaru

$$I^* = Y^* U^* = (G + jB)U^* \quad . \tag{18}$$

Zde je G reálná složka admitance (vodivost, $G = 1/R$) a B je imaginární složka admitance (susceptance). Pro B platí

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad . \tag{19}$$

Velikost admitance je rovna

$$Y = Y^* = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{20}$$

a pro fázový posuv φ' proudu vůči napětí platí

$$\varphi' = \mathrm{arctg}\frac{B}{G} = \mathrm{arctg}\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right) \quad . \tag{21}$$

Z předchozích výrazů můžeme určit velikost admitance a fázový posuv pro paralelní zapojení dvou prvků. Třetí prvek nahradíme nulovou admitancí (*1/R* = 0, ωC = 0, $1/\omega L$ = 0). Ze vztahů (20) a (21) plyne pro obvod RL

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} \tag{22}$$

$$\varphi' = \mathrm{arctg}\left(-\frac{R}{\omega L}\right) \tag{23}$$

pro obvod *RC*

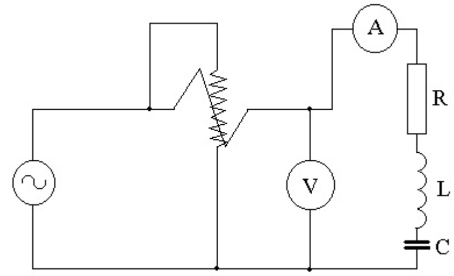
$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} \tag{24}$$

$$\varphi' = \mathrm{arctg}\,\omega RC \ . \tag{25}$$

Fázový posuv φ' proudu vůči napětí je roven záporně vzaté hodnotě fázového posuvu φ napětí vůči proudu ($\varphi = -\varphi'$), viz vztah (17).

Měření účiníku

K měření účiníku se vyrábějí pro technickou frekvenci 50 Hz přístroje, na jejichž stupnici lze přímo odečítat účiník soustavy připojené ke zdroji. V praktiku, abychom se seznámili též s měřením výkonu, používáme k měření účiníku wattmetru. Účiník můžeme vyhodnotit z rovnice (2), změříme-li kromě výkonu *P* též efektivní proud a napětí na zátěži. K měření je možno použít obvod zakreslený na obr. 3.



Obr. 3

Cívky wattmetru jsou znázorněny vlnovkami z lomených čar. Proudová cívka se zapojuje do série se zátěží, napěťová, která má větší počet závitů, paralelně.

Zpravidla se používají elektrodynamické wattmetry, které mají poměrně malý odpor napěťové cívky. Zapojujeme proto napěťovou cívku co nejblíže ke zdroji, aby proudovou cívkou nebo ampérmetrem neprotékal proud tekoucí napěťovou cívkou. Wattmetr bude správně zapojen, bude-li vstupní proudová a napěťová svorka, které jsou označeny šipkami, propojeny do jednoho uzlu. Proudová svorka označená šipkou musí být zapojena u zdroje, druhá označená A u zátěže. Při jiném zapojení bude mít výchylka přístroje nesprávný směr.

Jako zátěž je na obr. 3 zakreslen sériový rezonanční obvod. Při měření jiného obvodu musí být propojení prvků příslušným způsobem změněno. Zapojení na obr. 3 odpovídá obvodu pro měření pracovního úkolu č. 3.

Obvod je napájen z transformátoru 220/60 V. Doporučený rozsah wattmetru je 75 V, 0,5 A, celý rozsah stupnice pak odpovídá výkonu 37,5 W.

Výsledek měření je ovlivněn celou řadou chyb. Především jsou to náhodné chyby dané třídou přesnosti měřícího přístroje. Ty jsou poměrně velké, měříme-li na začátku stupnice. Uplatnit se může i kolísání frekvence sítě (f = 50,0 ± 0,5 Hz). Systematická chyba je dána především vnitřním odporem ampérmetru a voltmetru (viz úloha 2), měříme-li v zapojení podle obr. 1.

Vyhodnocení velikosti impedancí

Známe-li efektivní hodnoty proudu I a napětí U, můžeme z nich vyhodnotit velikost impedance Z, nebo admitance Y, zapojené v obvodu. Ze vztahů (5) resp. (18) (viz text za rovnicí (5)).

$$U = ZI \quad \text{resp.} \quad I = YU \,. \tag{22}$$

V rámci této úlohy měříme účiník, který je funkcí fázového posuvu φ. Protože kosinus je sudá funkce, můžeme ze známé hodnoty účiníku určit pouze absolutní hodnotu fázového posuvu. Z rovnic (22) můžeme vypočítat velikost impedance nebo admitance a z fázového posuvu, až na znaménko, poměr reálné a imaginární části impedance či admitance. Je-li komplexní impedance určena impedancemi dvou ideálních prvků elektrického obvodu (odporem a kapacitou nebo odporem a indukčností), můžeme z fázového posuvu a poměru napětí a proudu určit velikost obou prvků.

Pro sériové spojení indukčnosti L_S a odporu R_S plyne z rovnic (13), (14)

$$R_S = \frac{U}{I}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} \tag{23}$$

$$L_S = \frac{1}{\omega}\frac{U}{I}\sqrt{\frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}} \,. \tag{24}$$

Pro paralelní spojení indukčnosti L_P a odporu R_P plyne z rovnic (22), (23)

$$R_P = \frac{U}{I}\sqrt{1+tg^2\varphi} \tag{25}$$

$$L_P = \frac{1}{\omega}\frac{U}{I}\sqrt{\frac{1+tg^2\varphi}{tg^2\varphi}} \,. \tag{26}$$

U cívek je obtížné dosáhnout toho, aby jejich odpor byl zanedbatelný a fázový posuv napětí vůči proudu se znatelně nelišil od π/2. Metoda, kterou měříme u této úlohy fázový posuv sice není příliš přesná, přesto má smysl určit hodnotu sériového nebo paralelního odporu v náhradních schématech cívky.

U kondenzátorů je situace poněkud jiná. Pokud se nejedná o elektrolytický kondenzátor, liší se vlastnosti reálného kondenzátoru jen málo od vlastností ideální kapacity. Odchylky by bylo možno zjistit pouze při použití přesnější metody měření, např. můstkové.

V pracovním úkolu 2 však máte měřit účiník sériového a paralelního spojení rezistoru a kondenzátoru. Známe-li kapacitu zapojeného kondenzátoru, můžeme pro paralelní spojení spočítat odpor sériově zapojeného rezistoru z rovnic (15) nebo (16), pro paralelní zapojení z rovnic (24) nebo (25). Úprava vztahů je jednoduchá, proto zde neuvádíme výsledné vzorce. Znaménko fázového posuvu φ musí být takové, aby vypočítané $R > 0$. Impedance Z je rovna poměru efektivního napětí U a proudu I ($Z = U/I$), admitance $Y = I/U$. Tímto způsobem výpočtu odporu získáme správnou hodnotu, pokud kondenzátor nemá vlastní vodivost, tj. chová se jako ideální kapacita. Nakolik je tento předpoklad splněn můžeme odhadnout z měření účiníku samotného kondenzátoru (viz pracovní úkol 1).

Pokud kondenzátor má nezanedbatelnou vodivost ($\cos\varphi \neq 0$), museli bychom vyhodnotit jeho odpor a kapacitu pro sériové (R_S, C_S) či paralelní (R_P, C_P) náhradní zapojení. Z rovnic (15) a (16) plyne pro sériové zapojení

$$C_S = \frac{1}{\omega}\frac{I}{U}\sqrt{\frac{1+tg^2\varphi}{tg^2\varphi}} \tag{27}$$

$$R_S = \frac{U}{I}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} \quad . \tag{28}$$

Pro paralelní zapojení kapacity a odporu plyne z rovnic (24) a (25)

$$C_P = \frac{1}{\omega}\frac{I}{U}\sqrt{\frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}} \tag{29}$$

$$R_P = \frac{U}{I}\sqrt{1+tg^2\varphi} \tag{30}$$

Literatura:

[1] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření, I, SPN, Praha 1983, čl. 4.1.2.4, 4.4.4.1, 4.4.6.1, 4.4.7.1, stať 4.4.2

[2] Sedlák B., Bakule R.: Elektřina a magnetismus, SNP, Praha 1973, II. vyd. 1980, III. vyd. 1986