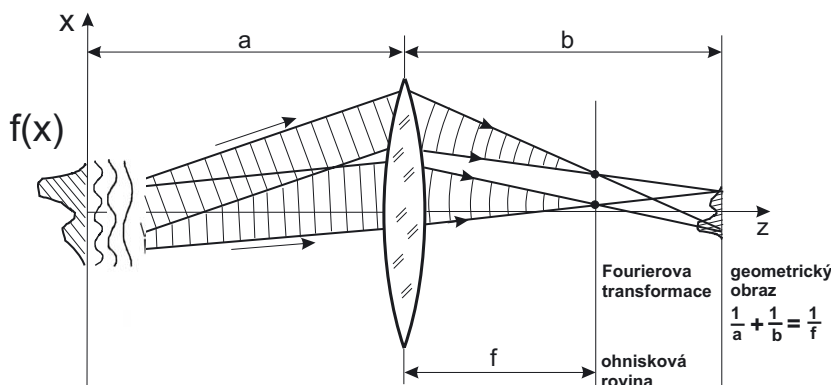


Základy fourierovské optiky

Fourierova transformace pomocí čočky a prostorová filtrace

Jeden z moderních pohledů na optiku a optické zobrazování spočívá ve využití Fourierovy transformace. Amplituda světelné vlny vycházející ze zobrazovaného předmětu se rozkládá na prostorové monochromatické (harmonické) složky. Každá z těchto složek pak prochází zobrazovacími optickými prvky nezávisle, lze tedy tyto komponenty individuálně zpracovávat, případně zcela odstranit ze zobrazujícího svazku a tím řízeně ovlivňovat výsledný obraz. Tohoto přístupu se s výhodou používá při tzv. prostorové filtraci, úpravě gaussovských svazků a pod. [I-6].

Jednou z fundamentálních pouček fourierovské optiky je to, že *čočka vytváří ve své zadní (obrazové) ohniskové rovině rozložení amplitudy světla úměrné Fourierově transformaci amplitudy nacházející se v rovině, kde je zobrazovaný předmět (předmětová rovina)*. Proč tomu tak je, můžeme snadno nahlédnout pomocí schematického náčrtku na obr. 4,11.



Obr. 4,11 Optické zobrazování z hlediska Fourierovy transformace

Amplitudu světelné vlny $f(x)$ vycházející z předmětu v rovině $z = 0$ si představíme rozloženu do harmonických prostorových složek $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$, tedy

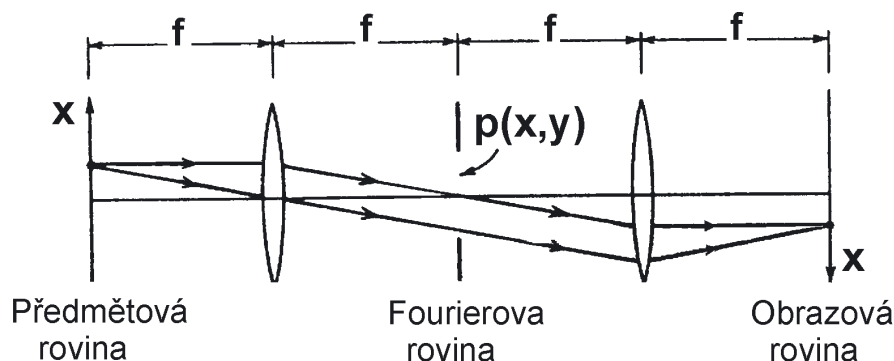
$$f(x) = \sum A(\nu_i) \exp(i2\pi x \nu_i) \quad (4.15)$$

(pro jednoduchost zde předpokládáme, že rozklad obsahuje pouze diskrétní frekvenční složky). Rovnice (4.15) nepopisuje nic jiného než Fourierův rozklad funkce $f(x)$. Tato představa je ekvivalentní tomu, že v rovině $z = 0$ máme superpozici optických ohybových mřížek s mřížkovými konstantami $a_i = 1/\nu_i$. Na každé z těchto mřížek dochází k ohybu zobrazujícího světla do úhlů φ_i , vyplývajících z mřížkové rovnice (4.14), která má nyní tvar $\sin \varphi_i = k\lambda \nu_i, k = \pm 1, 2, 3, \dots$. Pod těmito

úhly se pak šíří prakticky rovinné vlny, t.j. jednotlivé fourierovské složky amplitudy $f(x)$ - viz obr. 4,11. Je zřejmé, že podle zákonů geometrické optiky dochází k fokusaci všech složek v zadní ohniskové rovině čočky. Amplitudy jednotlivých světelných „bodů“ v této rovině jsou tedy úměrné difrakčním účinnostem příslušných ohybových mřížek, tedy amplitudám $A(\nu_i)$ v rovnici (4.15). Jinými slovy, rozložení amplitud v zadní ohniskové rovině je úměrné Fourierově transformaci amplitudy $f(x)$, která se nachází v předmětové rovině.¹

Je velmi důležité si uvědomit, že čočka vytváří Fourierovu transformaci předmětu *vždy ve své ohniskové rovině (nezávisle na poloze předmětu vzhledem k čočce), na rozdíl od geometrického obrazu předmětu, jehož poloha se řídí čočkovou rovnicí*. To je názorně demonstrováno na obr. 4,11.

Speciální případ, výhodný pro studium optické Fourierovy transformace a prostorovou filtraci, je ukázán na obr. 4,12. Jde o dvoučočkový systém. Předmět je umístěn vlevo v předmětové rovině první čočky, geometrický obraz se vytváří vpravo v obrazové rovině druhé čočky. Jestliže ohniskové vzdálenosti obou čoček jsou totožné, je příčné zvětšení systému rovno -1 a geometrický obraz je převrácenou replikou předmětu. To vyplývá ihned z chodu paprsků na obr. 4,12.



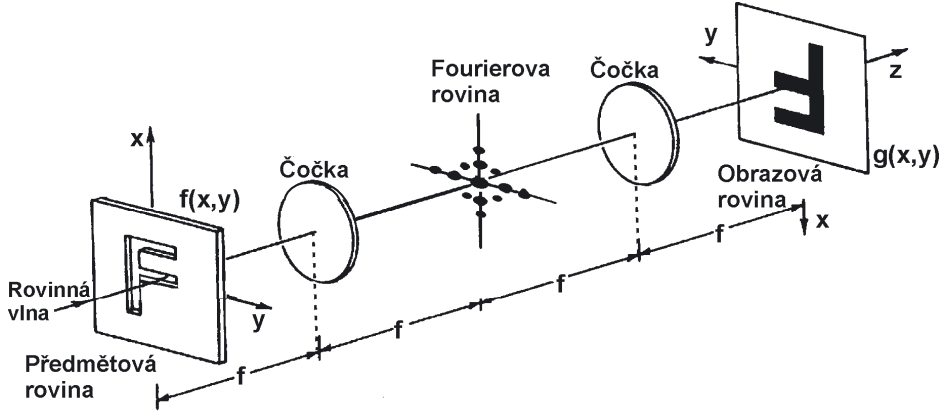
Obr. 4,12 Dvoučočkový zobrazovací systém 4-f

Z hlediska fourierovské optiky takový systém představuje kaskádu dvou subsystémů realizujících Fourierovu transformaci. První subsystém vytváří, jak jsme si právě vysvětlili, přímou Fourierovu transformaci v ohniskové rovině první čočky (zvané též Fourierova rovina). Druhý subsystém (mezi Fourierovou rovinou a obrazovou rovinou systému) provádí inverzní Fourierovu transformaci, jak můžeme ihned usoudit ze záměnnosti chodu světelných paprsků. Výsledkem je tedy obraz, který je přesnou replikou předmětu.

Diskutovaný dvoučočkový zobrazovací systém se nazývá systém 4-f či koherentní optický procesor. Jeho použití jako prostorového filtru je názorně ukázáno na obr. 4,13, a to pro (realitu lépe vystihující) případ, kdy amplituda světelné

¹Jde pochopitelně o značně zjednodušený výklad. Exaktní odvození lze nalézt např. v [I-6].

vlny $f(x, y)$ je funkcí dvou proměnných. Jak vyplývá z výše uvedené analogie s difrakcí na optických mřížkách, každému „bodu“ ve Fourierově rovině odpovídá jedna prostorová frekvence. Vložíme-li do Fourierovy roviny vhodnou masku (t.j. nepropustné stínítko s definovaně rozloženými otvory), která bude některé prostorové frekvence blokovat a jiné propouštět, dostaneme v obrazové rovině obraz s amplitudou $g(x, y)$, která bude filtrovanou verzí předmětové amplitudy $f(x, y)$. Touto *optickou prostorovou frekvenční filtrací* můžeme selektivně potlačit či zcela eliminovat některé rysy geometrického obrazu, změnit kontrast apod.



Obr. 4.13 Systém $4-f$ (koherentní optický procesor) pro studium optické Fourierovy transformace

Poznamenejme, že podobného cíle lze dosáhnout i se systémem, který by se dal nazvat $2f_1 - 2f_2$ (t.j. teleskopický systém dvou čoček s rozdílnými ohniskovými vzdálenostmi). Hlavním rozdílem bude to, že výsledný obraz bude zvětšený či zmenšený v poměru $M = f_2/f_1$.

Dále jsou v tomto odstavci shrnuty matematické základy Fourierovy transformace a uvedeny některé její vlastnosti. Kromě toho jsou pro čtenářovo pohodlí uvedeny některé příklady jednorozměrné a dvourozměrné Fourierovy transformace, které mají vztah k úloze 4.7 Koherentní optický procesor.

0.0.1 Matematická formulace Fourierovy transformace

Jednorozměrnou Fourierovou transformací komplexní funkce $\mathbf{g}(x)$ nazveme funkci:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(x) \exp(-i2\pi x f) dx.$$

Inverzní jednorozměrná Fourierova transformace funkce $\mathbf{G}(f)$ je definována jako funkce :

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{G}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f) \exp(i2\pi x f) df,$$

(kde stejně jako v celém dalším textu i je imaginární jednotka).

Dvourozměrnou Fourierovou transformací (Fourierovým spektrem) komplexní funkce $\mathbf{g}(x, y)$ nazveme funkci:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(x, y) \exp(-i2\pi(xf_x + yf_y)) dx dy.$$

Fourierova transformace je sama komplexní funkcí dvou nezávislých proměnných f_x a f_y , které nazýváme frekvence. Podobně inverzní Fourierova transformace funkce $\mathbf{G}(f_x, f_y)$ je definována jako funkce:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{G}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f_x, f_y) \exp(i2\pi(xf_x + yf_y)) df_x df_y.$$

Vlastnosti Fourierovy transformace

Následující vlastnosti platí jak pro jednorozměrnou, tak pro dvourozměrnou Fourierovu transformaci. Zde budou vysloveny pro dvourozměrnou Fourierovu transformaci.

Nech. $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ a $\mathbf{g}(x, y), \mathbf{h}(x, y)$ jsou komplexní funkce a $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_x, f_y)$ a $\mathcal{F}\{\mathbf{h}(x, y)\} = \mathbf{H}(f_x, f_y)$. Potom platí:

1. Linearita

$$\mathcal{F}\{\alpha\mathbf{g} + \beta\mathbf{h}\} = \alpha\mathcal{F}\{\mathbf{g}\} + \beta\mathcal{F}\{\mathbf{h}\}.$$

2. Podobnostní teorém

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{|\alpha\beta|} \mathbf{G}\left(\frac{f_x}{\alpha}, \frac{f_y}{\beta}\right).$$

3. Posunovací teorém

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x - \alpha, y - \beta)\} = \mathbf{G}(f_x, f_y) \exp[-i2\pi(f_x\alpha + f_y\beta)].$$

4. Fourierův integrální teorém

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{g}(x, y).$$

5. Dvojitá Fourierova transformace

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{g}(-x, -y).$$

6. Transformace konvoluce

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y) * \mathbf{h}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_x, f_y)\mathbf{H}(f_x, f_y),$$

a také

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\mathbf{h}(x, y)\} = \mathbf{G}(-f_x, -f_y)\mathbf{H}(-f_x, -f_y).$$

7. Transformace komplexně sdružené funkce

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}^*(x, y)\} = \mathbf{G}^*(-f_x, -f_y).$$

8. Transformace reálné funkce

Nech. $\mathbf{g}(x, y)$ je reálná funkce. Potom

$$\mathbf{G}(f_x, f_y) = \mathbf{G}^*(-f_x, -f_y).$$

9. Parsevalův teorém

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{g}(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{G}(f_x, f_y)|^2 df_x df_y.$$

10. Regulární lineární transformace proměnných

Nech. funkce \mathbf{g}, \mathbf{h} spolu souvisí vztahem

$$\mathbf{h}(x, y) = \tau \mathbf{g}(a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2),$$

kde $\tau \in \mathbf{C}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, 2$, $b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$.

$$\text{Označme } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Označme dále $\det A = \Delta$. Nech. $\Delta \neq 0$. Označme ještě

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

a $A_{11} = \frac{a_{22}}{\Delta}$, $A_{21} = \frac{-a_{12}}{\Delta}$, $A_{12} = \frac{-a_{21}}{\Delta}$, $A_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta}$. Potom

$$\mathcal{F}\{\mathbf{h}(x, y)\} = \frac{\tau}{|\Delta|} \exp \left[i2\pi \left(f_x \frac{\Delta_1}{\Delta} + f_y \frac{\Delta_2}{\Delta} \right) \right] \mathbf{G}(f_x A_{11} + f_y A_{12}, f_x A_{21} + f_y A_{22}).$$

11. Transformace derivace

Nech. existuje Fourierova transformace parciálních derivací funkce $\mathbf{g}(x, y)$.

Potom

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial \mathbf{g}(x, y)}{\partial x}\right\} = i2\pi f_x \mathbf{G}(f_x, f_y),$$

podobně

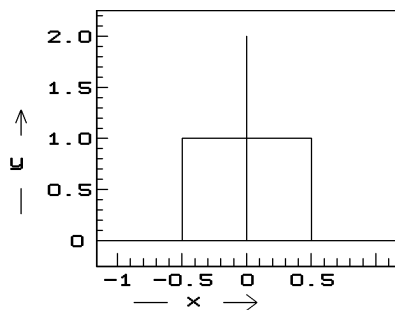
$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial \mathbf{g}(x, y)}{\partial y}\right\} = i2\pi f_y \mathbf{G}(f_x, f_y).$$

Ve zbytku odstavce jsou graficky zobrazeny vybrané příklady jednorozměrné a dvourozměrné Fourierovy transformace.

Jednorozměrná Fourierova transformace

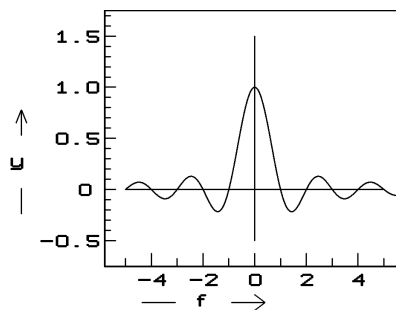
Funkce

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



Fourierova transformace

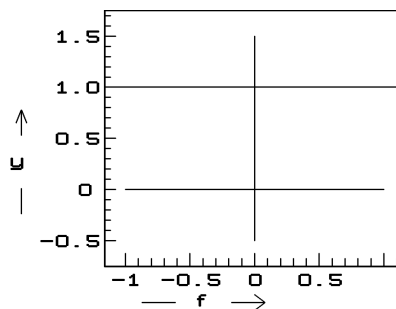
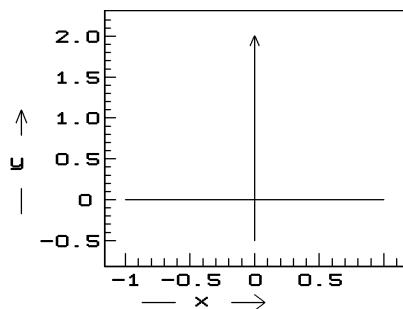
$$\text{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$



Obr. 4,14 Funkce $\text{rect}(x)$ a její Fourierova transformace

δ -funkce

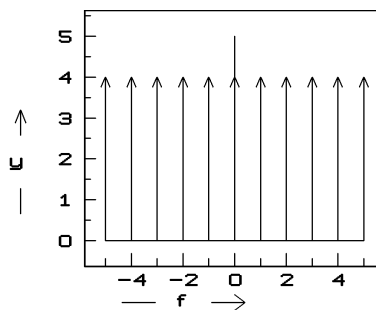
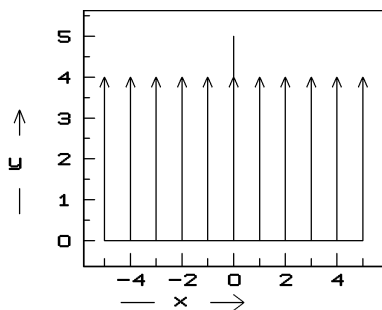
$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \mathbf{G}(f) \equiv 1$$



Obr. 4,15 δ -funkce a její Fourierova transformace

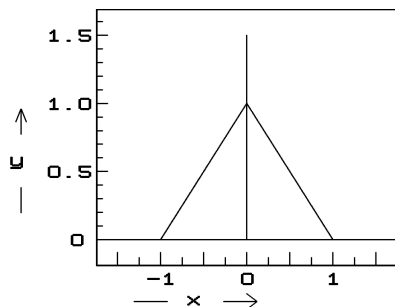
$$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

$$\text{comb}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n)$$

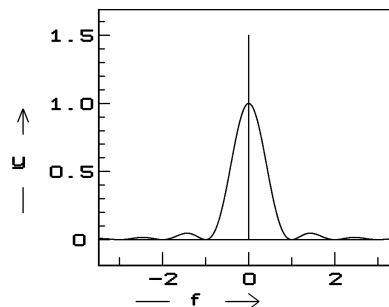


Obr. 4,16 Funkce $\text{comb}(x)$ a její Fourierova transformace

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



$$\text{sinc}^2(f)$$



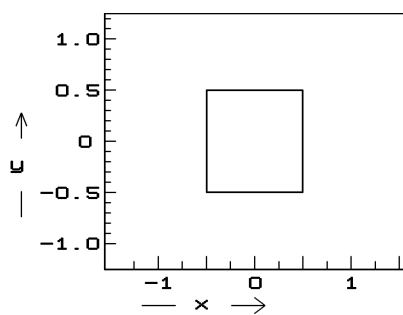
Obr. 4,17 Funkce $\Lambda(x)$ a její Fourierova transformace

Dvourozměrná Fourierova transformace

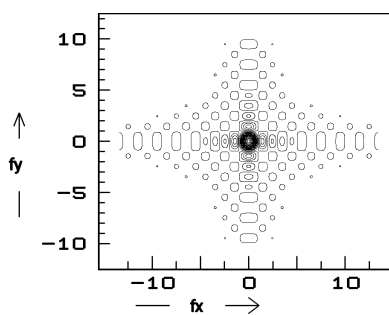
Funkce

Fourierova transformace

$$\text{rect}(x)\text{rect}(y)$$



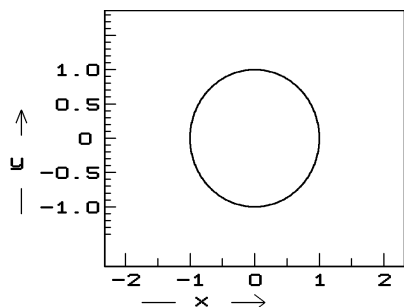
$$\text{sinc}(f_x)\text{sinc}(f_y)$$



Obr. 4,18 Funkce $\text{rect}(x)\text{rect}(y)$ a její Fourierova transformace

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & r \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

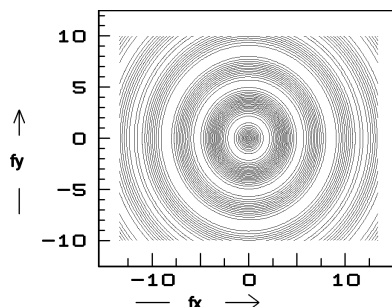
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\frac{J_1(2\pi\varrho)}{\varrho}$$

kde J_1 je Besselova funkce
1. druhu řádu 1.

$$\varrho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$



Obr. 4,19 Funkce $\text{circ}(r)$ a její Fourierova transformace

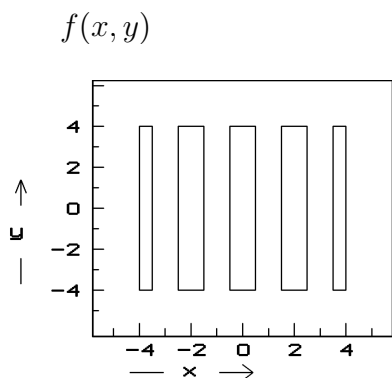
Svislé čáry

$$f(x, y) = \left[\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{comb}\left(\frac{x}{b}\right) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{2mb}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{2nb}\right),$$

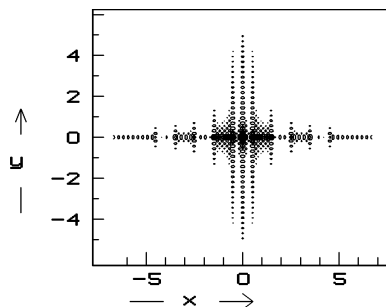
kde $A = 2mb$ a $B = 2nb$ je vodorovný a svislý rozměr diapozitivu.

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = 4mnab^3 \text{sinc}(2nb f_y) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{aj}{b}\right) \text{sinc}\left[2mb\left(f_x - \frac{j}{b}\right)\right].$$

Obr. 4,20 je zakreslen pro $a = 1$, $b = 2$, $n = m = 2$.



$$\mathcal{F}\{f(x, y)\}$$



Obr. 4,20 Svislé čáry a jejich Fourierova transformace

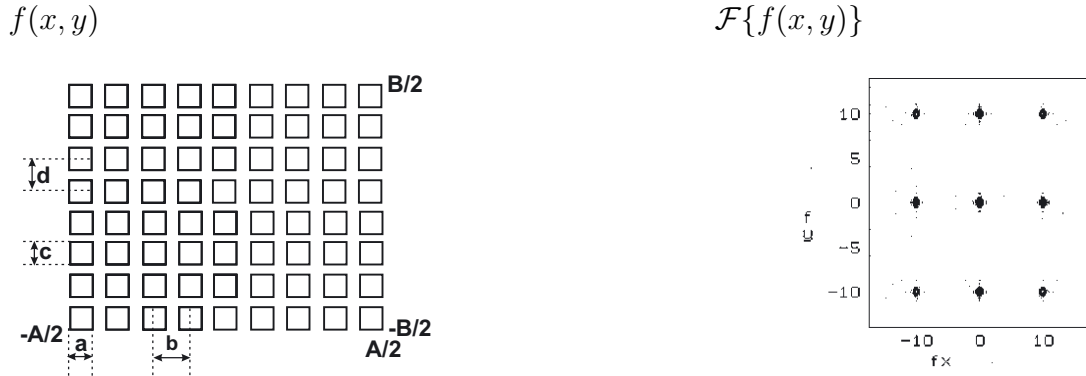
Sít

$$f(x, y) = \left(\left[\text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right) \right] \left[\text{comb} \left(\frac{x}{c} \right) \text{comb} \left(\frac{y}{d} \right) \right] \right) \times \\ \times \left[\text{rect} \left(\frac{x}{2mb} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{2nd} \right) \right],$$

kde $A = 2mb$ a $B = 2nd$ je vodorovný a svislý rozměr diapositivu.

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = 4mnab^2cd^2 \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{aj}{b} \right) \text{sinc} \left(2mb \left(f_x - \frac{j}{b} \right) \right) \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{cl}{d} \right) \text{sinc} \left(2nd \left(f_y - \frac{l}{d} \right) \right).$$

Obr. 4,21 je zakreslen $m = n = 10$, $a = c = 0.03$, $b = d = 0.1$.



Obr. 4,21 Sít a její Fourierova transformace