XVII. Studium otáčení tuhého tělesa

Metoda torzních kmitů

K měření momentu setrvačnosti I vzhledem k ose procházející těžištěm lze užít metody torzních kmitů.

Těleso upevníme v některém bodu osy, vzhledem ke které chceme stanovit moment setrvačnosti I, na torzní závěs, nejlépe na ocelový drát. Těleso po stočení z rovnovážné polohy začne torzně kmitat s dobou kmitu T danou výrazem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \ , \tag{1}$$

kde D je *direkční moment* vlákna.

Necháme-li na stejném torzním vlákně kmitat těleso o známém momentu setrvačnosti I_T, potom pro dobu kmitu T_T tohoto tělesa platí

$$T_T = 2\pi\sqrt{\frac{I_T}{D}} \ . \tag{2}$$

Tento postup umožní vyloučit měření direkčního momentu a z (1) a (2) dostaneme

$$I = \frac{T^2}{T_T^2} I_T \ . \tag{3}$$

Není-li překročena mez úměrnosti materiálu torzního vlákna, nezávisí potom prakticky doba kmitu torzních kmitů na počáteční výchylce z rovnovážné polohy. Proto výchylka může činit až 90°.

Momenty setrvačnosti vzhledem k různým osám procházejícím tělesem

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející jeho těžištěm I souvisí s hlavními momenty setrvačnosti pro těžiště tělesa I_x , I_y , I_z vztahem

$$I = \nu_x^2 I_x + \nu_y^2 I_y + \nu_z^2 I_z \ , \tag{4}$$

kde ν_x, ν_y, ν_z jsou složky jednotkového vektoru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti. Vektor $\vec{\nu}$ má směr osy, vzhledem ke které má těleso moment setrvačnosti I.

Hlavní osy setrvačnosti pro těžiště homogenního kvádru procházejí kolmo středy stěn kvádru. K tomu, aby bylo možné určit moment setrvačnosti kvádru vzhledem k tělesové úhlopříčce, je třeba určit momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám a z rozměrů kvádru vypočítat složky jednotkového vektoru ve směru tělesové úhlopříčky. Za předpokladu, že souřadnicová osa x má směr hrany kvádru a, osa y směr hrany b a osa z směr hrany c, lze pro složky vektoru ve směru úhlopříčky mířící do prvního kvadrantu psát

$$\nu_x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ , \quad \nu_y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ , \quad \nu_z = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \ . \tag{5}$$

Kvádr je pro měření upraven tak, že ve směru hlavních os a tělesové úhlopříčky jsou vyříznuty závity, umožňující připevnění ocelového vlákna. Délka závěsného vlákna $l \approx 4 \cdot 10^{-1}$ m, průměr vlákna $d \approx 1 \cdot 10^{-3}$ m. Rozměry ocelového kvádru jsou voleny tak ($a \approx 12 \cdot 10^{-2}$ m, $b \approx 6 \cdot 10^{-2}$ m, $c \approx 2 \cdot 10^{-2}$ m), aby se lišily doby kmitů kolem jednotlivých os.

Steinerova věta

Pro ověření Steinerovy věty je připravena tyč, která je opatřena na konci břity a uprostřed závitem. Břity umožňují nechat tyč kývat kolem osy, procházející jejím koncovým bodem jako fyzické kyvadlo. Pro dobu kmitu *T* fyzického kyvadla platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad , \tag{6}$$

kde *m* je hmotnost tělesa, *g* je místní tíhové zrychlení, *d* je vzdálenost těžiště od osy otáčení a *I* je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení. Z rovnice (6) je možné vypočítat moment setrvačnosti *I* a na základě znalosti *d* lze vypočítat pomocí Steinerovy věty i moment setrvačnosti I_0 tyče kolem osy, která prochází těžištěm a je rovnoběžná s osou, kolem které tyč kývá,

$$I_0 = I - md^2 \quad . \tag{7}$$

Podle Steinerovy věty je totiž moment setrvačnosti *I* vzhledem k libovolné ose roven momentu setrvačnosti I_0 vzhledem k ose, která prochází těžištěm rovnoběžně s danou osou, zvětšenému o součin hmotnosti tělesa *m* a čtverce vzdálenosti obou rovnoběžných os d^2. Změřením momentu setrvačnosti I_0 metodou nezávislou na rovnici (7) lze platnost Steinerovy věty měřením ověřit. Můžeme k tomu užít metody torzních kmitů. Tyč necháme torzně kmitat kolem osy, která prochází těžištěm tyče a je rovnoběžná s koncovým břitem. K vyloučení direkčního momentu vlákna změříme dobu torzních kmitů homogenního válce kolem osy totožné s osou válce. Pro moment setrvačnosti válce I_{ov} vzhledem ke zvolené ose kmitů platí

$$I_{ov} = \frac{1}{2} MR^2 \quad , \tag{8}$$

kde *M* je hmotnost válce a *R* je jeho poloměr. Z rovnic (3) a (8) lze moment setrvačnosti I_0 vyjádřit vztahem

$$I_0 = \frac{T_1^2}{T_2^2} I_{ov} = \frac{T_1^2}{2T_2^2} MR^2 \quad , \tag{9}$$

kde T_1 je doba torzních kmitů tyče a T_2 je doba torzních kmitů válce.

Literatura:

[1] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1967, kap. 2.2, st. 2.2.4, čl. 2.2.4.1, 2.2.4.2.

[2] Brož, J. a kol.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha 1983, kap. 2.2, st. 2.2.1, 2.2.2.