

# Zeemanův jev

## Úvod

V r. 1896 objevil P. Zeeman, že spektrální čáry se štěpí, jestliže na vyzařující atom působí magnetické pole. Bližší studium ukázalo, že zatímco některé čáry se štěpí na tři složky, na triplet, jiné vytvářejí složitější multiplety. V prvním případě hovoříme o Zeemanově jevu normálním, ve druhém případě o anomálním.

Krátce po Zeemanově objevu vypracoval H. A. Lorentz teorii, která jednoduše objasňuje normální Zeemanův jev, odvozuje vztah pro velikost rozštěpení a vysvětluje polarizaci složek. Teorie vychází z modelu klasického harmonického oscilátoru, tvořeného elektronem v poli kvazielastické síly. Je-li magnetické pole nulové, může elektron kmitat po přímce v libovolném směru, kombinací fázově posunutých pohybů v různých směrech můžeme dostat i pohyby eliptické a kruhové. Ve všech případech je kruhová frekvence kmitů  $\omega_0$  stejná. V homogenním magnetickém poli však elektron může vykonávat pouze tři periodické pohyby, kterým odpovídají tři různé frekvence. Při pohybu po přímce ve směru magnetického pole je Lorentzova síla působící na elektron nulová, takže pohyb není polem ovlivněn a frekvence má stejnou hodnotu  $\omega_0$  jako bez pole. Zbývající dva pohyby jsou kruhové, v rovině kolmé k vektoru indukce, s jedním či s druhým smyslem oběhu. Pak se Lorentzova síla přidává s kladným či záporným znaménkem ke kvazielastické síle, která vyrovnává odstředivou sílu působící na elektron. Z toho lze snadno odvodit vztahy pro příslušné kruhové frekvence obou krajních složek tripletu:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega, \text{ kde } \Delta\omega = eB/(2m_e). \quad (1)$$

Současně je zřejmé, že pozorujeme-li vyzařující atom ve směru magnetického pole, je světlo krajních složek kruhově polarizováno v opačných smyslech. Prostřední složka nebude pozorovatelná, protože dipól nevyzařuje ve směru své osy. Při pozorování ve směru kolmém k magnetickému poli jsou všechny tři složky polarizovány lineárně. Rovina polarizace světla, určená směrem vektoru intenzity elektrického pole světelné vlny, se u prostřední složky bude shodovat se směrem siločar působícího magnetického pole, u krajních složek k nim bude kolmá. Tyto efekty si prostudujete v této úloze.

Podle vztahu (1) lze ze změřeného rozštěpení  $\Delta\omega$  ve známém poli  $B$  určit měrný náboj elektronu  $e/m_e$ . Zeeman tak získal přibližnou hodnotu této veličiny a dospěl ke zjištění, že hmotnost elektronu je řádově tisíckrát menší než hmotnost atomu vodíku. To bylo v tehdejší době dosti překvapivé, neboť bylo obvyklé pokládat atom vodíku za nejmenší, dále již nedělitelnou částičku hmoty. V roce 1897 změřili nezávisle na sobě J. J. Thomson a W. Kaufmann a E. Wiechert hodnotu  $e/m_e$  z vychylování katodových paprsků v elektrickém a magnetickém poli.

Podrobnější kvantový rozbor Zeemanova jevu normálního a tím spíše anomálního spadá dost daleko za rámec jednoduché Bohrovy teorie, na niž jsme náš výklad zde omezili. Proto se jím zde nebudeme zabývat.

## Princip metody

### Rozštěpení spektrálních čar v magnetickém poli

Vložíme-li spektrální výbojku do magnetického pole dostatečné intenzity, lze pozorovat štěpení jejích spektrálních čar. V dalším se budeme podrobněji zabývat normálním Zeemanovým jevem. Zopakujeme nejprve závěry vyplývající z teorie:

- Vlnová délka  $\lambda_0$  střední čáry tripletu se shoduje s původní vlnovou délkou dané spektrální čáry.
- Pro vlnové délky krajních složek tripletu platí dle (1):

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm \Delta\lambda,$$

kde

$$\Delta\lambda = \frac{e}{m_e} \frac{\lambda_0^2 B}{4\pi c}. \quad (2)$$

Zde  $e/m_e$  je měrný náboj elektronu,  $B$  je magnetická indukce,  $c$  rychlost světla ve vakuu.

- Pozorujeme-li rozštěpení ve směru kolmém ke směru magnetického pole, zjistíme, že střední část tripletu je lineárně polarizovaná ve směru vektoru magnetické indukce a obě krajní čáry jsou lineárně polarizovány ve směru kolmém k magnetickému poli.
- Pozorujeme-li světelný zdroj ve směru magnetického pole, vidíme pouze obě krajní složky, které jsou kruhově polarizované.

## Šířka spektrálních čar

Pro studium normálního Zeemanova jevu je třeba použít přístroj s vysokou rozlišovací schopností. Při práci s těmito přístroji je nutno přihlížet k šířce spektrálních čar. Žádná spektrální čára není ideálně monochromatická, ale je tvořena jistým spektrem vlnových délek, jak je diskutováno v Dodatku 1. Tam je uveden číselný odhad pro t. zv. přirozenou šířku čáry ( $\delta\lambda_p \approx 1,17 \cdot 10^{-5}$  nm) i vztah (D1.6) pro dopplerovské rozšíření, které je v případě Cd výbojky dominantním mechanismem určujícím šířku čáry ( $\delta\lambda \approx 9 \cdot 10^{-4}$  nm).

## Spektrometr s Lummerovou-Gehrckeovou deskou

K tomu, aby rozštěpení spektrálních čar bylo dobře pozorovatelné, je třeba, aby posuv čáry byl alespoň o řád větší než šířka čáry. Odhadli jsme, že pro čáru kadmia s  $\lambda_0 = 643.8$  nm bude  $\delta\lambda = 9 \cdot 10^{-4}$  nm, musíme tedy vložit výbojku do magnetického pole, které způsobí změnu vlnové délky  $\Delta\lambda$  asi o 0.01 nm. Výpočtem z rovnice (2) stanovíme, že vhodná hodnota magnetické indukce pro pozorování Zeemanova jevu by měla být asi 0.5 T. Chceme-li rozlišit dvě čáry o vlnové délce  $\lambda_0 \doteq 6 \cdot 10^2$  nm, lišící se o  $\Delta\lambda = 0.01$  nm, potřebujeme spektroskop s rozlišovací schopností  $R_{min} = \lambda_0/\Delta\lambda = 6 \cdot 10^4$ . Zde již běžný hranolový či mřížkový přístroj nestačí, ale tomuto požadavku vyhovuje např. spektroskop s Lummerovou-Gehrckeovou deskou. Její princip i jeden ze způsobů vyhodnocování měření s touto deskou jsou popsány v Dodatku 2. Zde odvodíme ještě jeden užitečný vztah pro analýzu interferenčních

proužků v Lummerově-Gehrckeově desce, který lze aplikovat při měření Zeemanova jevu.

Naším cílem je stanovit vztah pro rozštěpení čáry  $\Delta\lambda$  jako funkce příslušného úhlového posuvu  $\Delta\beta$  a úhlové odlehlosti  $(\Delta\beta)'$  dvou sousedních řádů. Z definice úhlové disperze (D2,8) máme ihned

$$\Delta\lambda = -\Delta\beta \frac{2d^2 \sin 2\beta}{\lambda k^2}, \quad (3)$$

jestliže jsme pro jednoduchost položili  $q = 1$  (t.j.  $dN/d\lambda = 0$ ). Rovnici (3) lze pomocí (D2,2) přepsat jako

$$\Delta\lambda = -\Delta\beta \frac{\lambda \sin 2\beta}{2(N^2 - \sin^2 \beta)}. \quad (4)$$

Vyjádříme si nyní úhlovou odlehlost dvou sousedních řádů  $(\Delta\beta)'$  pro  $\lambda = \text{konst.}$  Diferencováním (D2,2) podle  $k$  a položením  $\Delta k = 1$  dostáváme

$$(\Delta\beta)' = -\frac{\lambda \sqrt{N^2 - \sin^2 \beta}}{d \sin 2\beta}. \quad (5)$$

Nahradíme-li konečně  $\sin 2\beta$  ve (4) pomocí (5) dostáváme hledaný vztah

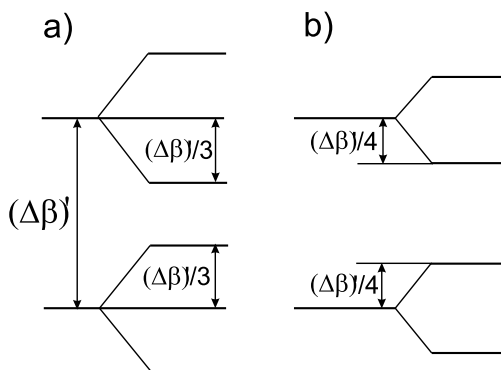
$$\Delta\lambda \doteq \frac{\Delta\beta}{(\Delta\beta)'} \cdot \frac{\lambda^2}{2d\sqrt{N^2 - 1}}. \quad (6)$$

V konečném vztahu (6) byla použita aproximace  $\beta \doteq \pi/2$ . Pro  $\Delta\beta = (\Delta\beta)'$  udává výraz (6) velikost disperzní oblasti  $\Delta\lambda_D$ . Význam tohoto vztahu spočívá v tom, že vhodnou experimentální volbou poměru  $\Delta\beta/(\Delta\beta)'$  lze stanovit hledané rozštěpení  $\Delta\lambda$  s rozumnou přesností pouze ze znalostí parametrů desky  $d$ ,  $N$ , aniž by bylo zapotřebí měřit hodnoty příslušných úhlů.

# Experimentální uspořádání

Magnetická indukce mezi pólovými nástavci elektromagnetu se měří magnetometrem s Hallovou sondou. Hallovo napětí je ze sondy vyvedeno přívody na milivoltmetr. Jinými přívody je sonda připojena ke zdroji proudu, a jejich přepínáním do různých zdírek lze měnit citlivost přístroje.

Pro měření zeemanovského rozštěpení se místo sondy umístí mezi pólové nástavce sondy kadmiová výbojka. Její světlo dopadá přes kondenzor okénkem na Lummerovu - Gehrckeovu desku. Zasunutím vhodného filtru do okénka vybereme ze spektra požadovanou čáru. Interferenční obrazec pozorujeme dalekohledem, kterým lze otáčet šroubem umístěným pod tubusem. Dalekohled je spojen s vychylkoměrem, jehož údaj je úměrný úhlu otočení dalekohledu a na kterém je tedy možné odečítat polohy jednotlivých interferenčních maxim, na něž nastavíme nitkový kříž. To umožňuje stanovit poměr úhlů  $\Delta\beta/(\Delta\beta)'$ .



Obr. 1 Interferenční obrazec Lummerovy–Gehrckeovy desky

Po uvolnění aretačních šroubů lze spektrometr posouvat ve všech třech směrech a vhodně jej nastavit vůči zdroji světla.

Některé hodnoty lze se spektrometrem získat i bez použití vychylkoměru. Jestliže nastavíme proud magnetem tak, aby interferenční maxima od všech tří složek čáry byla rozložena rovnoměrně (t.j. ve stejných vzdálenostech od sebe), pak bude zřejmě  $\Delta\beta = (\Delta\beta)'/3$ , čili rozštěpení bude rovno třetině velikosti disperzní oblasti (obr. 1a). Pomocí (6) lze pak stanovit  $\Delta\lambda$ . Při pozorování ve směru magnetického pole, nebo potlačíme-li střední složku vhodným natočením polarizátoru, můžeme dosáhnout toho, že rovnoměrně budou rozloženy pouze krajní složky. Pak je rozštěpení čtvrtinou velikosti disperzní oblasti (viz obr. 1b). Protože při vizuálním pozorování jsme schopni dosti citlivě posoudit odchylky od symetrie, mohou tyto hodnoty být určeny poměrně přesně (určete rozptyl hodnot při opakovaném měření).

Na tubus přístroje lze nasadit polarizátor, případně i v různých kombinacích se čtvrtvlnnou destičkou [1]. Polarizační rovinu polarizátoru a rovněž orientaci čtvrtvlnné destičky lze určit pozorováním světla odraženého pod Brewsterovým úhlem od vhodného povrchu (např. od některého z optických filtrů).

## Pokyny

- Žluté přívody z Hallovy sondy vedou ke zdroji proudu, červené přívody vedou k milivoltmetru. Parametry Hallovy sondy: Při citlivosti, kterou použijeme, odpovídá poli 0,1 T napětí 1 mV. Cívky elektromagnetu jsou zapojeny v serii a maximální povolený proud je 15 A (při napětí na magnetu asi 17,5 V).
- Šrouby uchycující držák výbojky musí být pevně dotaženy. Přidržíte totiž zároveň pólové nástavce. Nejsou-li dostatečně dotaženy, pólové nástavce se po zapnutí proudu přitáhnou a zničí výbojku.
- Při otáčení magnetu je nutno stanovený úhel natočit do strany, aby se nárazem pólových nástavců nepoškodil kondenzor.
- Měření si organizujte tak, aby výbojka i proud magnetem byly zapnuty co nejkratší dobu.
- K bodu 6: můžete vyjít ze skutečnosti, známé z literatury: zelená čára kadmia (přechod  $6^3S_1 \rightarrow 6^3P_2$ ) vykazuje anomální Zeemanův jev a štěpí se na multiplet složený z 9 ekvidistantních složek. Polarizace prostředních tří čar je stejná jako polarizace střední složky normálního zeemanovského tripletu, polarizace krajních trojic odpovídá polarizaci krajních složek normálního případu. Uvažte, zda s daným vybavením můžete úplně rozlišit jednotlivé složky multipletu, nebo zda můžete ze svého pozorování alespoň odhadnout rozštěpení a porovnat ho s hodnotou pro normální případ.
- Vlnové délky čar spektra Cd:  
červená 643,8 nm  
zelená 508,6 nm  
Rozměry Lummerovy-Gehrckeovy desky:  
 $d = 4,04$  mm,  $l = 106$  mm  
Index lomu skla lze počítat podle vztahu

$$N = 1,44263 + \frac{7,065}{\lambda - 144},$$

kam se hodnoty  $\lambda$  dosazují v nm. (Vztah aproximuje změřené hodnoty s přesností lepší než  $3 \cdot 10^{-5}$ )

## Literatura

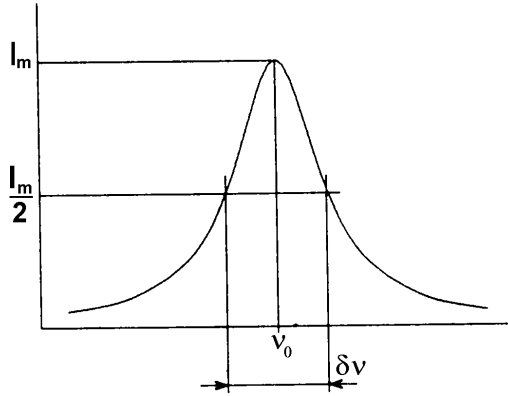
- [1] I. Pelant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fährnich: Fyzikální praktikum III. Optika, Praha 2001

# Dodatek 1

## Šířka spektrálních čar

Přestože čáry ve spektrech plynů a par mohou být za některých okolností velmi úzké, vyzařované světlo nikdy neobsahuje pouze složku s jedinou frekvencí, t.j. nikdy není ideálně monochromatické. Vždy se zde kromě složky se střední frekvencí  $\nu_0$  vyskytují s menší intenzitou složky s frekvencemi poněkud odlišnými, takže čáru lze charakterizovat spojitým spektrálním rozložením intenzity, jak zhruba ukazuje křivka na obr. D1,1. Šířkou čáry se obvykle rozumí vzdálenost  $\delta\nu$  mezi body na obou bocích křivky, v nichž intenzita  $I$  poklesne na polovinu své maximální hodnoty  $I_m$ . Na vodorovnou osu v obr. D1,1 lze místo frekvence  $\nu$  vynášet kruhovou frekvenci  $\omega$ , vlnčet  $\sigma$  nebo vlnovou délku  $\lambda$ , relativní šířka čáry je (pro nepříliš široké čáry) vždy stejná:

$$\delta\nu/\nu_0 = \delta\omega/\omega_0 = \delta\sigma/\sigma_0 = \delta\lambda/\lambda_0. \quad (D1.1)$$



Obr. D1,1 Profil spektrální čáry

Šířka čáry by dosáhla nejmenší hodnoty ve spektru světla vyzařovaného izolovanými atomy, které jsou v klidu (t.j. jejichž termické postupné rychlosti jsou zanedbatelně malé) — tuto hodnotu nazýváme *přirozenou šířkou* čáry. Jednoduché vysvětlení a výpočet přirozené šířky podává již klasická elektronová teorie, která vyšetřuje zářící atom jako klasický harmonický oscilátor tvořený elektronem, poutaným kvazielasticou silou k pevnému bodu. Vyzařováním klesá energie oscilátoru s časem  $t$  exponenciálně s časovou konstantou  $\tau$ , t.j. úměrně funkci  $\exp(-t/\tau)$ , amplituda kmitů tedy klesá s časovou konstantou  $2\tau$ . Toto tlumení oscilátoru se nazývá *radiační tlumení*, hovoří se též o *radiačním rozšíření* spektrální čáry. Fourierovským rozkladem časové závislosti výchylky elektronu lze získat výkonové spektrum vyzařovaného světla, jehož intenzita v závislosti na kruhové frekvenci  $\omega$  vychází

$$I = I_m \frac{(\delta\omega_p/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\delta\omega_p/2)^2}, \quad (D1.2)$$

kde šířka čáry  $\delta\omega_p$  je dána vztahem

$$\delta\omega_p = 1/\tau. \quad (D1.3)$$

Vztah (D1.2) popisuje t.zv. lorentzovský tvar (profil) spektrální čáry. Časovou konstantu  $\tau$  lze určit s využitím klasické teorie elektromagnetického vyzařování dipólu. Vyjádříme-li výslednou šířku čáry ve stupnici vlnových délek, dostaneme pro všechny čáry stejnou hodnotu

$$\delta\lambda_p = e^2/(3\varepsilon_0 mc^2) = 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ nm}. \quad (D1.4)$$

Uvedené vztahy jsou ovšem kvantovou mechanikou do značné míry korigovány. Lorentzovský tvar čáry zůstává v platnosti, doba  $\tau$  má však nyní smysl průměrné doby, po kterou atom zůstává ve výchozím excitovaném stavu, čili t.zv. doby života tohoto stavu. Vztah (D1.4) dále platí pouze pro přechod do základního stavu, pro přechody mezi dvěma excitovanými stavy se k šířce čáry přičítá příspěvek závislý na době života konečného stavu. Různé čáry mohou mít různou šířku  $\delta\lambda_p$ , vztah (D1.4) tedy ztrácí obecnou platnost, pro některé čáry však platí alespoň jako dobrý odhad.

Vzájemné interakce atomů či molekul podmiňují tzv. tlakové rozšíření spektrálních čar, které výrazně závisí na tlaku a poněkud slaběji i na teplotě plynu. Při nižších tlacích lze často užít srážkového modelu zavedeného Lorentzem — atom nerušeně vyzařuje až do srážky s jiným atomem, po níž vyzařuje opět, ale se zcela náhodně změněnou fází. Pravděpodobnost, že za dobu  $t$  po dané srážce dosud nedošlo ke srážce následující klesá v závislosti na této době exponenciálně. Na základě toho lze odvodit, že tvar čáry bude opět lorentzovský (D1.2), místo (D1.3) však platí

$$\delta\omega = 2/\tau_s, \quad (D1.5)$$

kde  $\tau_s$  je střední doba mezi dvěma srážkami. Při vyšších tlacích nebo i za jiných okolností však tento jednoduchý model nevyhovuje a je třeba zabývat se interakcemi podrobněji. Mohou se uplatnit Van der Waalsovy síly, dipólová interakce, Starkovo rozštěpení způsobené polem iontů a pod. Tvar čáry pak obecně nebude lorentzovský, může být i nesymetrický a s posunutým maximem. Proměření tvaru potom může přinést informaci o interakcích, které se v daném případě uplatňují.

Třetím příspěvkem k rozšíření spektrálních čar je rozšíření dopplerovské. Příčinou je náhodný tepelný translační pohyb atomů, který v důsledku Dopplerova jevu způsobuje posuv frekvence vyzařovaného světla. Protože pro tento posuv je rozhodující složka rychlosti ve směru pozorování, lze na základě Maxwellova rozdělení rychlostí očekávat — při převládajícím dopplerovském rozšíření — gaussovský tvar spektrální čáry. Pro šířku pak vychází

$$\delta\omega = 2\omega_0 (2RT \ln 2/Mc^2)^{1/2}, \quad (D1.6)$$

kde  $R$  je plynová konstanta,  $T$  absolutní teplota a  $M$  molární hmotnost. Toto rozšíření se zřejmě nejvíce uplatní u lehkých prvků (malé  $M$ ), ale přispívá k šířce podstatně i u prvků těžších. Například pro červenou čáru kadmia ( $M = 112 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) s vlnovou délkou  $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$  při teplotě 400 K vychází přibližně  $\delta\lambda = (2\pi c/\omega_0^2)\delta\omega = 9 \cdot 10^{-4} \text{ nm}$ , což je hodnota téměř o dva řády vyšší, než je přirozená šířka čáry.

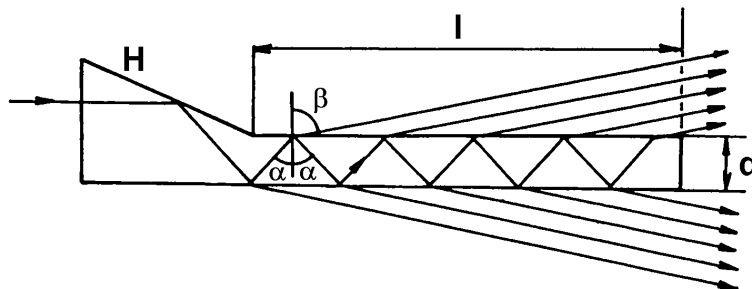
Pro spektroskopická měření s vysokým rozlišením je důležité, aby šířka čáry byla co nejmenší. Tlakové rozšíření lze obvykle dostatečně zmenšit snížením tlaku ve výbojce — uvádí se, že již při tlaku 10 kPa bývá tlakové rozšíření srovnatelné s dopplerovským. Dopplerovské rozšíření lze poněkud zmenšit snížením teploty (chlazená výbojka), podstatněji se však dá omezit pouze užitím dosti náročné techniky atomových či molekulárních svazků, kdy se v dostatečně vysokém vakuu clonami vybere pouze svazek atomů, které se pohybují kolmo ke směru pozorování. V poslední době se objevily nové velmi účinné metody pro odstranění dopplerovského rozšíření, jako dvoufotonová spektroskopie či laserové a magnetické ochlazování atomů.



## Dodatek 2

### Lummerova-Gehrckeova deska

Snaha zvyšovat rozlišovací schopnost hranolového spektrometru může narazit na značné potíže technického rázu. S podobnými problémy se setkáme i u mřížkového spektrometru. Pokud při některých spektroskopických měřeních není na závadu poměrně malá velikost disperzní oblasti (například při studiu malých rozštěpení spektrálních čar), může být výhodnější místo hranolu či mřížky užít některých jiných disperzních prvků, které využívají interference mnoha svazků diskutované např. v [1]. Jedním z nich je Lummerova-Gehrckeova deska, kterou vidíme na obr. D2,1.



Obr. D2,1 Lummerova-Gehrckeova deska

Velmi přesně vybroušená skleněná planparalelní destička tloušťky  $d$  s absolutním indexem lomu  $N$  (deska je umístěna ve vzduchu jehož index lomu pokládáme roven jedné) je osvětlena plošným zdrojem odrazem od osvětlovacího hranolku  $H$  přilepeném k horní straně desky. Při vhodném úhlu osvětlovacího hranolku a vhodném umístění zdroje lze dosáhnout, aby paprsky dopadaly na plochu desky pod úhly blízkými k úhlu meznímu  $\alpha_m$ . Paprsek dopadající pod úhlem  $\alpha < \alpha_m$  se na stěnách desky opakovaně částečně odráží a částečně láme pod úhlem  $\beta$ . Přitom z horní i dolní stěny desky vystupuje řada rovnoběžných koherentních paprsků, které v ohniskové rovině objektivu dalekohledu vytvářejí systém ostrých interferenčních maxim. Pro dráhový rozdíl sousedních paprsků platí

$$\Delta = 2Nd \cos \alpha = 2d \sqrt{N^2 - \sin^2 \beta} \quad (D2.1)$$

a pro vznik interferenčního maxima máme podmínku  $\Delta = k\lambda$ , kde celé číslo  $k$  je řád maxima. Řád pozorovaných maxim tedy můžeme odhadnout ze vztahu

$$k = \frac{2d}{\lambda} \sqrt{N^2 - \sin^2 \beta}. \quad (D2.2)$$

Interferenční maxima pozorujeme jako soustavu rovnoběžných čar zhušťujících se s klesající hodnotou úhlu  $\beta$ . Stanovíme nyní velikost disperzní oblasti  $\Delta\lambda_D$ . Je určena podmínkou, že maximum  $k$ -tého řádu pro vlnovou délku  $\lambda$  se musí překrývat s maximem  $(k-1)$ -ho řádu pro vlnovou délku  $\lambda + \Delta\lambda_D$ , t.j. obě maxima koincidují při

stejné hodnotě úhlu  $\beta$ . Zformulujeme-li tuto podmínku pomocí (D2.2) matematicky, dostáváme

$$\lambda k = 2d\sqrt{N^2 - \sin^2 \beta}, \quad (D2.3)$$

$$(\lambda + \Delta\lambda_D)(k - 1) = 2d\sqrt{(N + \Delta N)^2 - \sin^2 \beta} = 2d\sqrt{\left(N + \frac{dN}{d\lambda}\Delta\lambda_D\right)^2 - \sin^2 \beta}. \quad (D2.4)$$

Zde bereme v úvahu explicitně disperzi indexu lomu  $N(\lambda)$ . Vydělíme-li rovnici (D2.4) rovnicí (D2.3), dostaneme po zanedbání kvadratického členu  $(dN/d\lambda)^2 \Delta\lambda_D^2$  výraz

$$1 + \frac{\Delta\lambda_D(k - 1) - \lambda}{k\lambda} = \sqrt{1 + \frac{2N\Delta\lambda_D(dN/d\lambda)}{(N^2 - \sin^2 \beta)}}. \quad (D2.5)$$

Jestliže nyní použijeme Taylorova rozvoje  $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$  platného pro  $|x| \ll 1$  (což lze učinit vzhledem k velmi malé hodnotě činitele  $dN/d\lambda \approx -10^{-4}\text{nm}^{-1}$ ), dostáváme po snadných úpravách pro disperzní oblast výraz

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{kq}, \quad (D2.6)$$

kde

$$q = 1 - \frac{\lambda N}{N^2 - \sin^2 \beta} \frac{dN}{d\lambda} \quad (D2.7)$$

je korekční činitel, který započítává vliv závislosti  $N$  na  $\lambda$  a jehož hodnota se příliš neliší od jedničky. Při přechodu od (D2.5) k (D2.6) jsme ještě použili toho, že platí  $k \gg 1$  (jak snadno nahlédneme pomocí vztahu (D2.2), jestliže typické hodnoty jsou  $d \approx 0,5 \text{ cm}$ ,  $N \approx 1,5$ ,  $\sin\beta \approx 1$  a  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ ). Disperzní oblast, vypočtená pomocí (D2.6) pro  $\lambda = 500 \text{ nm}$  tedy pak činí  $\Delta\lambda_D \approx 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$  (pouze!).

Úhlovou disperzi  $D_u$  najdeme snadno diferencováním (D2.2) při konstantním  $k$  (a dosazením za  $N(dN/(d\lambda))$  ze vztahu (D2.7)):

$$D_u = \frac{d\beta}{d\lambda} = -\frac{\lambda k^2 q}{2d^2 \sin(2\beta)}. \quad (D2.8)$$

Pro určení rozlišovací schopnosti  $R$  Lummerovy-Gehrckeovy desky musíme, jako i u jiných mnohasvazkových interferometrů, znát počet interferujících paprsků („svazků“)  $m$ . Při úhlech dopadu  $\alpha$  blízkých k úhlu meznímu je odrazivost velká a ztráty při odrazu malé. Počet  $m$  je pak v podstatě určen délkou desky  $l$  (viz obr. D2,1):

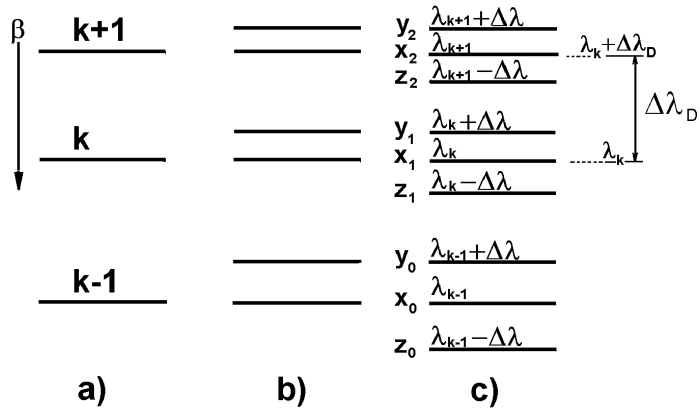
$$m \doteq \frac{l}{2d \tan \alpha} = \frac{l\sqrt{N^2 - \sin^2 \beta}}{2d \sin \beta}. \quad (D2.9)$$

Při interferenci mnoha svazků je pro vysoké řády minimální rozdíl vlnových délek dvou právě rozlišitelných čar je roven  $\delta\lambda = \Delta\lambda_D/m$ , s pomocí (D2.6) tedy pro rozlišovací schopnost vychází

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = qmk. \quad (D2.10)$$

Až na faktor  $q$  dostáváme tedy stejný vztah jako u jiných přístrojů, založených na interferenci mnoha svazků. Je zřejmé, že při praktickém výpočtu ve vztazích (D2.2) až (D2.9) můžeme položit úhel  $\beta$  roven  $90^\circ$ . Výjimkou je vztah (D2.8), z něhož vidíme, že v blízkosti této hodnoty disperze silně vzrůstá.

Vzhledem k malé disperzní oblasti Lummerovy-Gehrckeovy desky je obvykle zapotřebí předběžně vybrat ze zkoumaného světla úzkou spektrální oblast, jejíž jemnou strukturu studujeme. K tomu lze užít filtru nebo dalšího jednoduchého spektrometru, který již nemusí mít velké rozlišení. Lze například kombinovat Lummerovu-Gehrckeovu desku s Hilgerovým spektrometrem: deska i hranol se umístí za sebou mezi společný kolimátor a dalekohled. Je-li deska orientována tak, že rozkládá světlo ve svislém směru, vidíme v dalekohledu vedle sebe různé spektrální čáry, na nichž je ve svislém směru rozlišena jejich jemná struktura.



Obr. D2,2 Systémy interferenčních maxim v zorném poli dalekohledu Lummerovy-Gehrckeovy desky

Rozebereme ještě podrobněji, jak se určí skutečná velikost rozštěpení spektrální čáry. Na obr. D2,2 je znázorněn systém interferenčních maxim, který v zorném poli dalekohledu vytváří a) monochromatické světlo, b) dvě blízké spektrální čáry (dublet) a c) Zeemanův triplet. Vhodným odečítacím zařízením lze určit polohy jednotlivých maxim, změřené výchylky závisí prakticky lineárně na příslušných úhlech  $\beta$ . Pokud bychom však chtěli při určování vlnových délek vyjít ze vztahu (D2.2), museli bychom — kromě parametrů Lummerovy-Gehrckeovy desky  $d, N$  — znát skutečné velikosti těchto úhlů. Tomu se můžeme vyhnout využitím definice disperzní oblasti  $\Delta\lambda_D$ . Především nás zde zajímá hodnota rozštěpení  $\Delta\lambda$  a tu stanovíme s pomocí obr. D2,2 následovně. Na tomto obrázku jsou schematicky znázorněna interferenční maxima tří sousedních řádů, které označíme  $(k-1)$ ,  $k$ ,  $(k+1)$ . Jednotlivé složky Zeemanova tripletu s rozštěpením  $\Delta\lambda$  jsou označeny  $\lambda_i - \Delta\lambda$ ,  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i + \Delta\lambda$ , kde  $i = k-1, k, k+1$ . Pokud můžeme disperzi pokládat za konstantní, čili pokud je závislost vlnové délky na úhlu  $\beta$  lineární, stačí, změříme-li spolu s polohami  $x_1, y_1$  maxima  $k$ -tého řádu pro dvě složky rozštěpené čáry také alespoň jednu polohu maxima řádu  $(k+1)$ , např.  $x_2$ . V tom případě totiž můžeme v uvedené lineární aproximaci psát  $\Delta\lambda = A(y_1 - x_1)$  a  $\Delta\lambda_D = A(x_2 - x_1)$ , kde  $A$  je neznámá konstanta (připomeňme, že disperzní oblast

$\Delta\lambda_D$  je na obr. D2,2 určena v souladu s definicí jako taková spektrální vzdálenost, při níž by došlo k překryvu maxima  $\lambda_{k+1}$  s maximem  $(\lambda_k + \Delta\lambda_D)$ . Vyloučením konstanty  $A$  pak vypočteme  $\Delta\lambda$  jednoduše jako

$$\Delta\lambda = \lambda_y - \lambda_x = \frac{y_1 - x_1}{x_2 - x_1} \Delta\lambda_D. \quad (D2.11)$$

Jak jsme ovšem již uvedli, disperze ve skutečnosti není konstantní a zvláště silně se mění pro úhly  $\beta$  blízké k  $90^\circ$ , kde je na druhé straně výhodné měření provádět, neboť interferenční obrazce jsou zde nejzřetelnější. Jak plyne z (D2.2), mnohem lepším přiblížením je zde obecná kvadratická závislost  $\lambda$  na  $\beta$ . Pak je zapotřebí změřit také polohu  $x_0$  sousedního maxima na druhé straně a rozštěpení vypočteme

$$\Delta\lambda = \left[ \left( \varrho + \frac{1}{\varrho} \right) \xi + \left( \varrho - \frac{1}{\varrho} \right) \xi^2 \right] \Delta\lambda_D, \quad (D2.12)$$

kde  $\zeta$ ,  $\varrho$  jsme označili poměry

$$\varrho = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_1}, \quad \xi = \frac{y_1 - x_1}{x_2 - x_0}. \quad (D2.13)$$

Pro výpočet zeemanovského rozštěpení lze vliv proměnné disperze omezit tím, že ve jmenovateli zlomku v (D2.11) vezmeme aritmetický průměr ze vzdáleností obou sousedních maxim, v čitateli průměr vzdáleností obou krajních složek tripletu od střední složky. Dostaneme

$$\Delta\lambda = \frac{y_1 - z_1}{x_2 - x_0} \Delta\lambda_D. \quad (D2.14)$$

Vztah (D2.12) je v zásadě přesnější, výpočet podle (D2.14) je však jednodušší a při nepřilíhnutí rychle se měnící disperzi se nedopustíme velké chyby.

Zdůrazněme ještě: pro vyhodnocení je důležité znát, která interferenční maxima odpovídají stejnému řádu interference. To lze snadno určit v případě, že rozštěpení čáry lze spojitě měnit od nuly (třeba u Zeemanova jevu zvyšováním magnetického pole) a sledovat přitom posouvání maxim. Nebo například máme-li při pozorování dubletu zaručeno, že rozštěpení je menší než polovina velikosti disperzní oblasti, potom lze dvojicím blízkých maxim přiřadit stejný řád. Jinak může být situace obtížnější a informaci o řádech maxim je třeba získat jinak, třeba s použitím jiného spektrálního přístroje s větší disperzní oblastí. Pokud na druhé straně tuto informaci získáme, můžeme s pomocí interference mnoha svazků měřit i rozštěpení několikanásobně větší než je velikost disperzní oblasti.

Lummerova-Gehrckeova deska dosahuje mezi interferenčními spektrometry nejvyšších hodnot  $k$  při zhruba stejném počtu interferujících svazků  $m$ , má tedy nejvyšší rozlišovací schopnost. Je ovšem také velmi drahá, neboť při výrobě je nutno dodržet vysokou planparalelitu i rovinnost obou povrchů desky na délce  $l = 10$  cm i více. Pokud to tedy není nezbytně nutné, dává se přednost Fabryho-Perotově interferometru.

Literatura

- [1] I. Pelant, J. Fiala, J. Pospíšil, J. Fiala: Fyzikální praktikum III. Optika, Praha 2001
- [2] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I (II. vyd.). SPN, Praha 1983 čl. 6.4.2.1, 6.4.3.1.