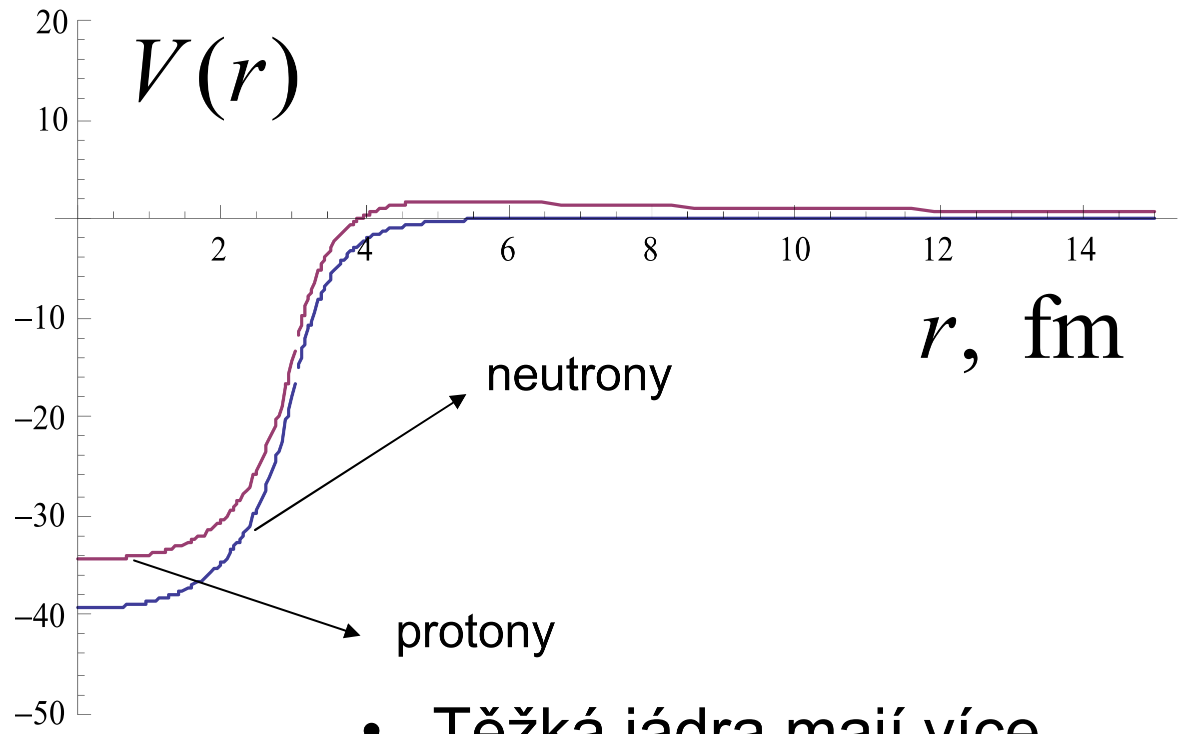
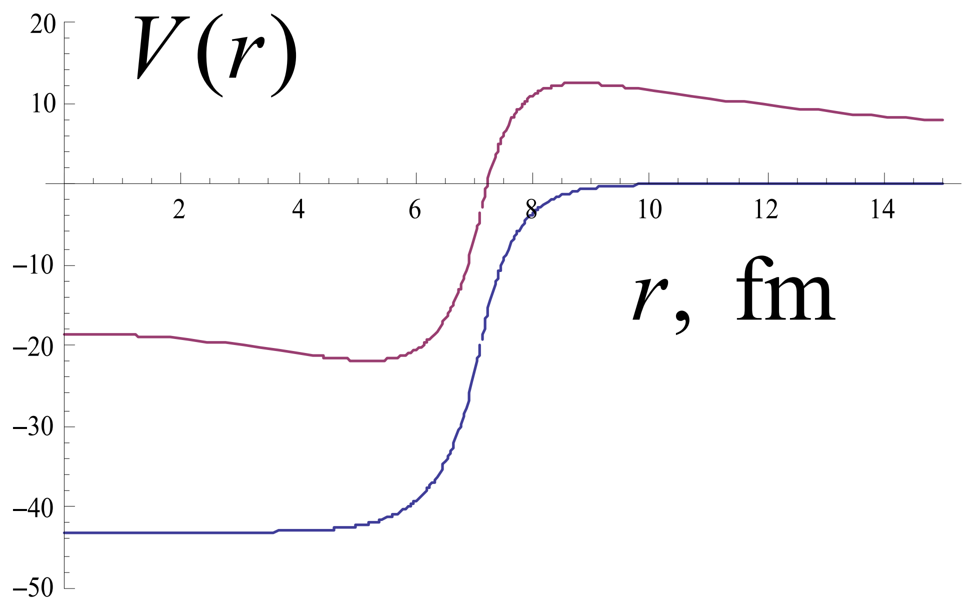
Přednáška 3. Hmotnosti jader, vazbová energie, radioaktivita

Jaderné síly, potenciál jádra
Vazbová energie
Rozpady jader
Slupkový model jádra a magická čísla

Jádro kyslíku $^{16}_{8}O$



Jádro olova $^{208}_{82}Pb$



- Těžká jádra mají více neutronů než protonů
- Pro malá A se hloubka potenciálové jámy zvětšuje s rostoucím A
- Pak dochází k nasycení a jáma se jen rozšiřuje a tak se do jádra vejde stále více nukleonů

Jádro kyslíku – harmonický oscilátor

$R = 1{,}2\,fm(16)^{1/3} \cong 3{,}0\,fm$

$V_0 = -38\,MeV\,(neutrony)$

$A = 16, Z = 8, N = 8$

Harm. oscilator:

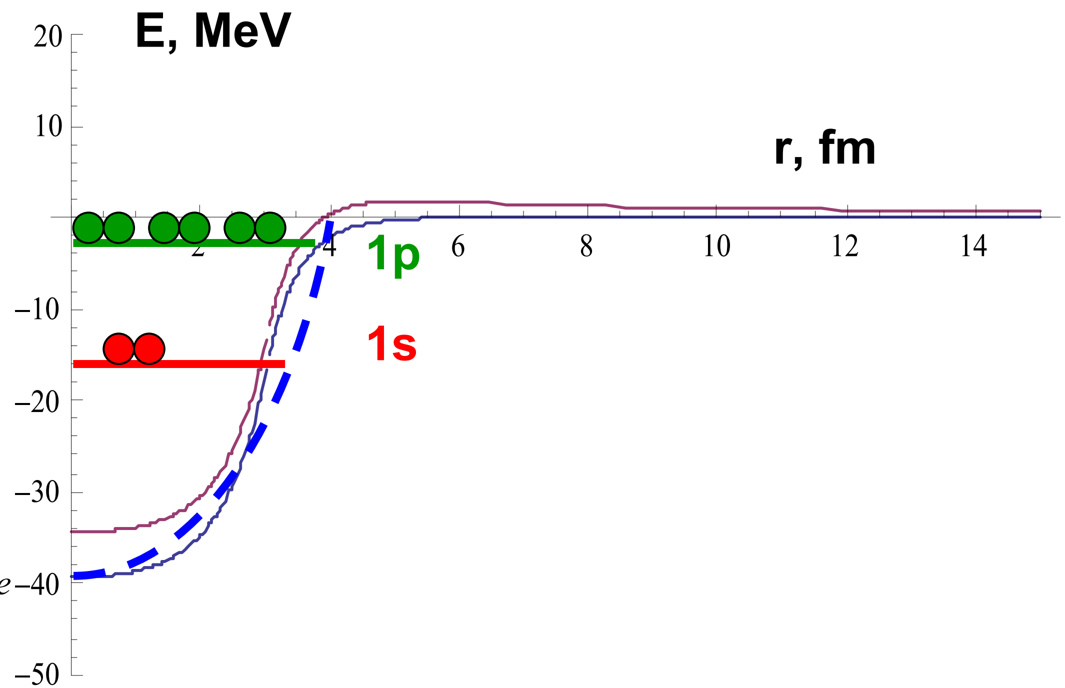
$V(r) = V_0 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = V_0 + \frac{1}{2} mc^2 (\hbar\omega)^2 r^2 / (\hbar c)^2 =$

$V_0 + \frac{1}{2} m(\hbar\omega)^2 r^2 / (\hbar c)^2$

$V(R) = V_0 / 2$

$V_0 + \frac{1}{2} m(\hbar\omega)^2 R^2 / (\hbar c)^2 = V_0 / 2$

$\hbar\omega = \frac{\hbar c}{R}\sqrt{\frac{-V_0}{m}} = \frac{197\,MeVfm}{3\,fm}\sqrt{\frac{38\,MeV}{939{,}57\,MeV}} \cong 13{,}2\,Me$



Hladiny:

neutrony:

$1p \quad V_0 + \frac{5}{2}\hbar\omega = -38\,MeV + \frac{5}{2}13{,}2\,MeV = -5{,}0\,MeV \,.....\, 6$

$1s \quad V_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega = -38\,MeV + \frac{3}{2}13{,}2\,MeV = -18{,}2\,MeV \,.....\, 2$

Vazbova energie:

$B = 6 \cdot 5 + 2 \cdot 18{,}2 = 66{,}4\,MeV$

$B / N = 66{,}4\,MeV / 8 = 8{,}3\,MeV / neutron$

Jádro kyslíku v přiblížení pravoúhlé 3D jámy

jadro_kysliku.nb

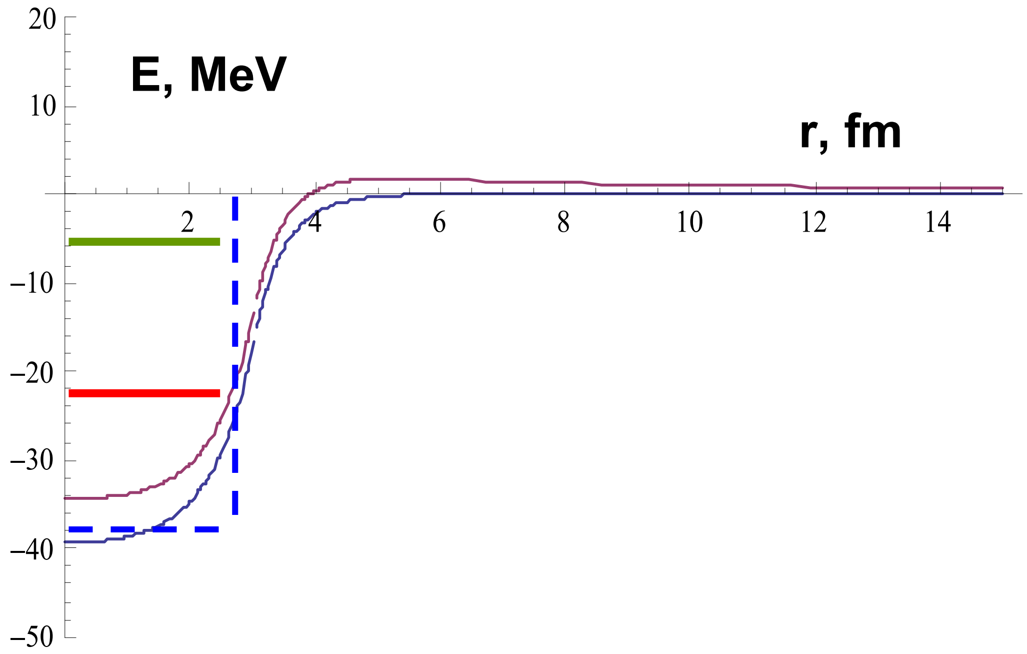
$$R = 1{,}2\,fm(16)^{1/3} \cong 3{,}0\,fm$$

$$V_0 = -38\,MeV\,(neutrony)$$

$$A = 16, Z = 8, N = 8$$

Potenciálová jáma:

$$V(r) = V_0; r \le 2{,}7\,fm$$



$$-\frac{(\hbar c)^2}{2m}\frac{d^2(r\psi(r))}{dr^2} + V(r)(r\psi(r)) + \frac{(\hbar c)^2 l(l+1)}{2mr^2}(r\psi(r)) = E(r\psi(r))$$

$Hladiny:$

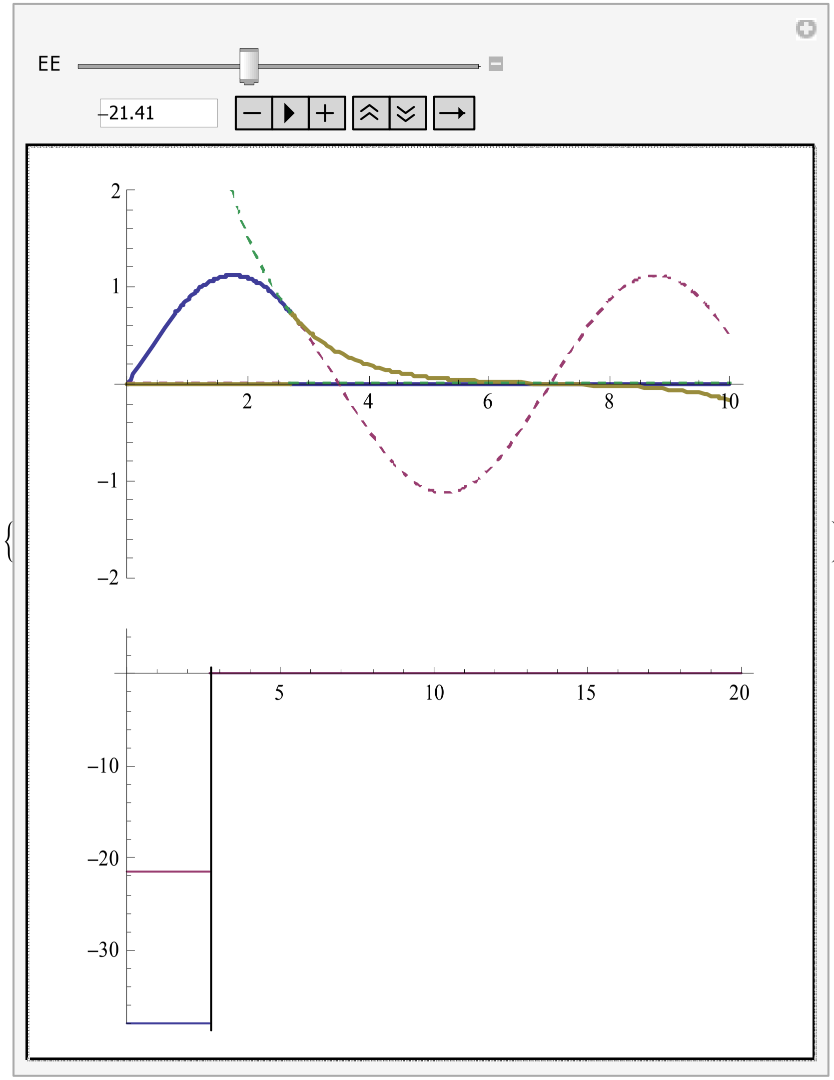
[jadro_kysliku.nb]

$neutrony: 1p \quad -5{,}8 MeV \ldots\ldots 6 \qquad protony: 1p \quad -3{,}2 MeV \ldots\ldots 6$

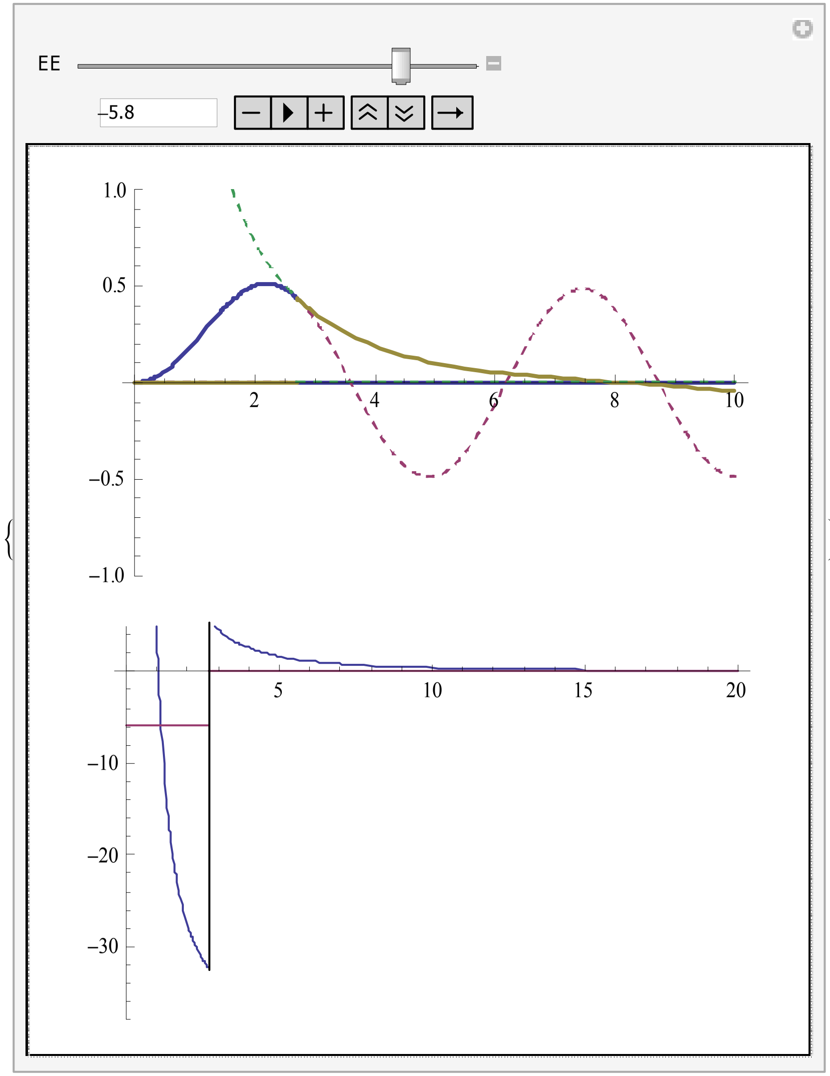
$1s \quad -21{,}4 MeV \ldots\ldots 2 \qquad 1s \quad -17{,}9 MeV \ldots\ldots 6$

$$B/A = (6(5{,}8+3{,}2)+2(21{,}4+17{,}9))MeV/16 = 132{,}8 MeV/16 = 8{,}3 MeV/nukleon$$

Out[99]=



Out[110]=



Hmotnost jader, vazbová energie jader

Vazbová energie:

$$B(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - M(A,Z) > 0$$

$$B(A,Z)/A \approx 8-9 MeV \ \ tj. \ asi \ 1/100 \ \ hmoty \ \ nukleonu.$$

Vazbová energie – jak se měří

${}_{z}^{A}X:$

$$B(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - M_X$$

Hmotový spektrometr:

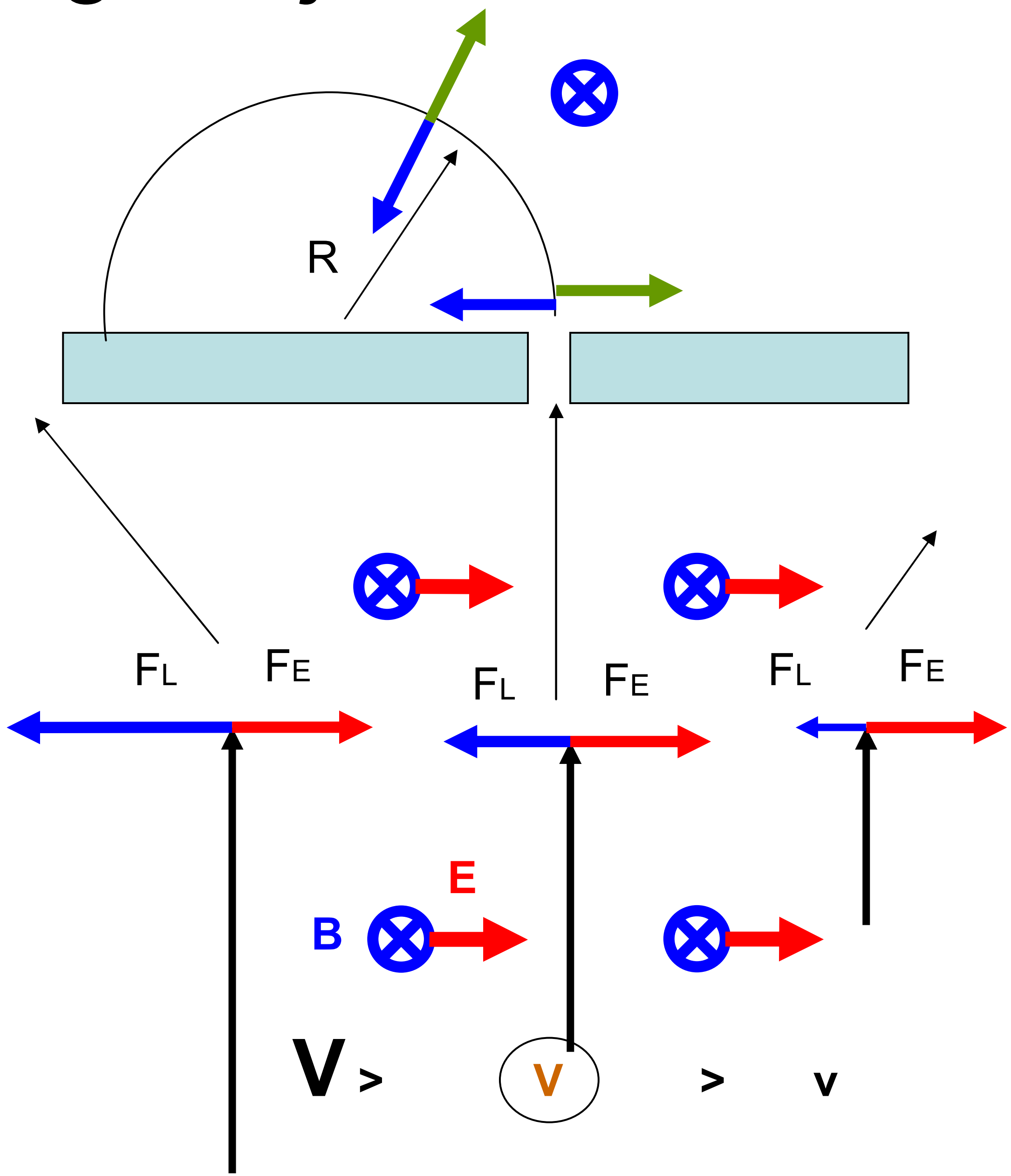
$$\boxed{Ze \cdot E} = \boxed{Ze \cdot V \cdot B}$$

$$V = \frac{E}{B}$$

$$\boxed{Ze \cdot V \cdot B} = \boxed{M_x \frac{V^2}{R}}$$

$$R = M_x \frac{V}{Ze \cdot B} = M_x \frac{E}{Ze \cdot B^2}$$

$$M_x = \frac{1}{R}\frac{Ze \cdot B^2}{E}$$



Kapkový model jádra a empirická hmotová formule (Weiczäcker)

$$B(A,Z) = A \cdot 15{,}6 MeV$$ **Objemový člen**

$$- A^{2/3} \cdot 17{,}2 MeV$$ **Povrchový člen**

$$- \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot 0{,}7 MeV - \frac{(A-2Z)^2}{A} \cdot 23{,}3 MeV +$$

Jádro jako kapka nestlačitelné kapaliny

$$- \frac{1}{A^{1/2}} 12{,}0 MeV \quad \text{.... licho - lichá}$$

$$+ 0 \quad \text{.... licho - sudá a sudo - lichá}$$

$$+ \frac{1}{A^{1/2}} 12{,}0 MeV \quad \text{.... sudo - sudá}$$

	Z even	Z odd
N even	157	49
N odd	51	4

$${}^{2}_{1}H = D$$

$${}^{6}_{3}Li$$

$${}^{10}_{5}B$$

$${}^{14}_{7}N$$

$$\left({}^{40}_{19}K\right)$$

Weiczacker.nb

Coulombický člen=potenciální energie homogenní nabité koule

$$|B_{Coul}| = \frac{1}{2}\frac{Z}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{Z}{\frac{4}{3}\pi R^3}\alpha(\hbar c)\int d^3\vec{r}_2\int d^3\vec{r}_1\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \frac{3}{5}Z^2\frac{\alpha(\hbar c)}{R}$$

$$= \frac{3}{5}Z^2\frac{(1/137)(197)MeVfm}{1{,}2\,fm\sqrt[3]{A}} = \boxed{0{,}7\,MeV}\frac{Z^2}{\sqrt[3]{A}}$$

In[12]:= $\texttt{Simplify}\left[\int_{-1}^{+1}\frac{1}{\sqrt{r1^2+r2^2-2\,r1\,r2\,c}}\,dc,\ r1>0\ \&\&\ r2>0\right]$

$\texttt{Simplify}\left[\int_0^{r2} r1^2\frac{4}{r1+r2-(r1-r2)}\,dr1+\int_{r2}^{R} r1^2\frac{4}{r1+r2+(r1-r2)}\,dr1,\right.$
$\left.r1>0\ \&\&\ r2>0\ \&\&\ R>0\ \&\&\ R\geq r2\right]$

$\frac{1}{2}Z^2\frac{\alpha\,hc}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2}(2\pi)\ (2\pi)\ 2\int_0^R r2^2\left(R^2-\frac{r2^2}{3}\right)dr2$

Out[12]= $\frac{4}{r1+r2+|r1-r2|}$

Out[13]= $R^2-\frac{r2^2}{3}$

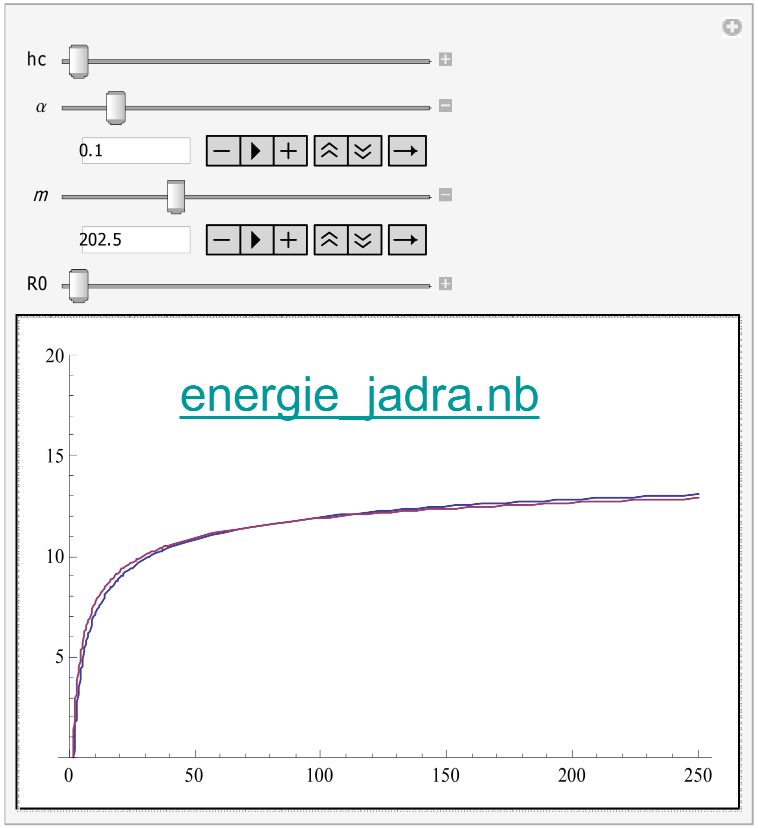
Out[14]= $\frac{3\,hc\,Z^2\,\alpha}{5\,R}$

Potenciální energie homogenní jaderně nabité koule

$$|B_{jad}| = \frac{1}{2}\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3}\alpha_J(\hbar c)\int d^3\vec{r}_2\int d^3\vec{r}_1\frac{e^{-\frac{m|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{\hbar c}}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi R_0^{\,3}}\frac{\alpha_J(\hbar c)}{\frac{4}{3}\pi R_0^{\,3}}\int d^3\vec{r}_2\int d^3\vec{r}_1\frac{e^{-\frac{m|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{\hbar c}}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} =$$

$$A\cdot\frac{3\alpha_J(\hbar c)^3}{2m^2R_0^{\,3}} - A^{2/3}\cdot\frac{9\alpha_J(\hbar c)^4}{4m^3R_0^{\,4}}\left(1+\cancel{e^{-2\frac{mR_0A^{1/3}}{\hbar c}}}\right) + \cancel{\frac{9\alpha_J(\hbar c)^6}{4m^5R_0^{\,6}}\left(1-\left(1+\frac{2mR_0A^{1/3}}{\hbar c}\right)e^{-2\frac{mR_0A^{1/3}}{\hbar c}}\right)}$$

Out[130]=



In[114]:= `Clear[R]`

```
Simplify[∫_{-1}^{+1} e^(-m Sqrt[r1^2 + r2^2 - 2 r1 r2 c]/hc) / Sqrt[r1^2 + r2^2 - 2 r1 r2 c] dc, r1 > 0 && r2 > 0];

Simplify[∫_0^{r2} r1^2 ((-e^(-m (r1+r2)/hc) + e^(-(-m (r1-r2))/hc)) hc)/(m r1 r2) dr1 +
  ∫_{r2}^R r1^2 ((-e^(-m (r1+r2)/hc) + e^(-m (r1-r2)/hc)) hc)/(m r1 r2) dr1, r1 > 0 && r2 > 0 && R > 0 && R ≥ r2];

-1/2 A^2 (α hc)/((4/3 π R^3)^2) (2 π) (2 π) 2 ∫_0^R r2^2 (%) dr2;

R = R0 A^(1/3);

%%
```

Out[119]=

$$-\frac{3\,\mathrm{hc}^3\left(3\,\mathrm{hc}^3 - 3A^{2/3}m^2\,\mathrm{R0}^2\,\mathrm{hc} - 3e^{-\frac{2\sqrt[3]{A}\,m\,\mathrm{R0}}{\mathrm{hc}}}\left(\mathrm{hc}+\sqrt[3]{A}\,m\,\mathrm{R0}\right)^2\mathrm{hc} + 2A\,m^3\,\mathrm{R0}^3\right)\alpha}{4m^5\,\mathrm{R0}^6}$$

Počet protonů a neutronů v jádře

$$B(A,Z) = A\cdot 15{,}6MeV - A^{2/3}\cdot 17{,}2MeV$$

$$\boxed{-\frac{Z^2}{A^{1/3}}\cdot 0{,}7MeV - \frac{(A-2Z)^2}{A}\cdot 23{,}3MeV +}$$

$-\frac{1}{A^{1/2}}12{,}0MeV$ .... licho - lichá

$+0$ .... licho-sudá a sudo-lichá

$+\frac{1}{A^{1/2}}12{,}0MeV$ .... sudo - sudá

$$0 = \frac{dB(A,Z)}{dZ} = -\frac{2Z}{A^{1/3}}\cdot 0{,}7MeV - \frac{2(-2)(A-2Z)}{A}\cdot 23{,}3MeV$$

$$\frac{2Z}{A^{1/3}}\cdot 0{,}7MeV = \frac{4(A-2Z)}{A}\cdot 23{,}3MeV$$

$$Z\left(\frac{2\cdot 0{,}7MeV}{A^{1/3}} + \frac{8\cdot 23{,}3MeV}{A}\right) = \frac{4A\cdot 23{,}3MeV}{A}$$

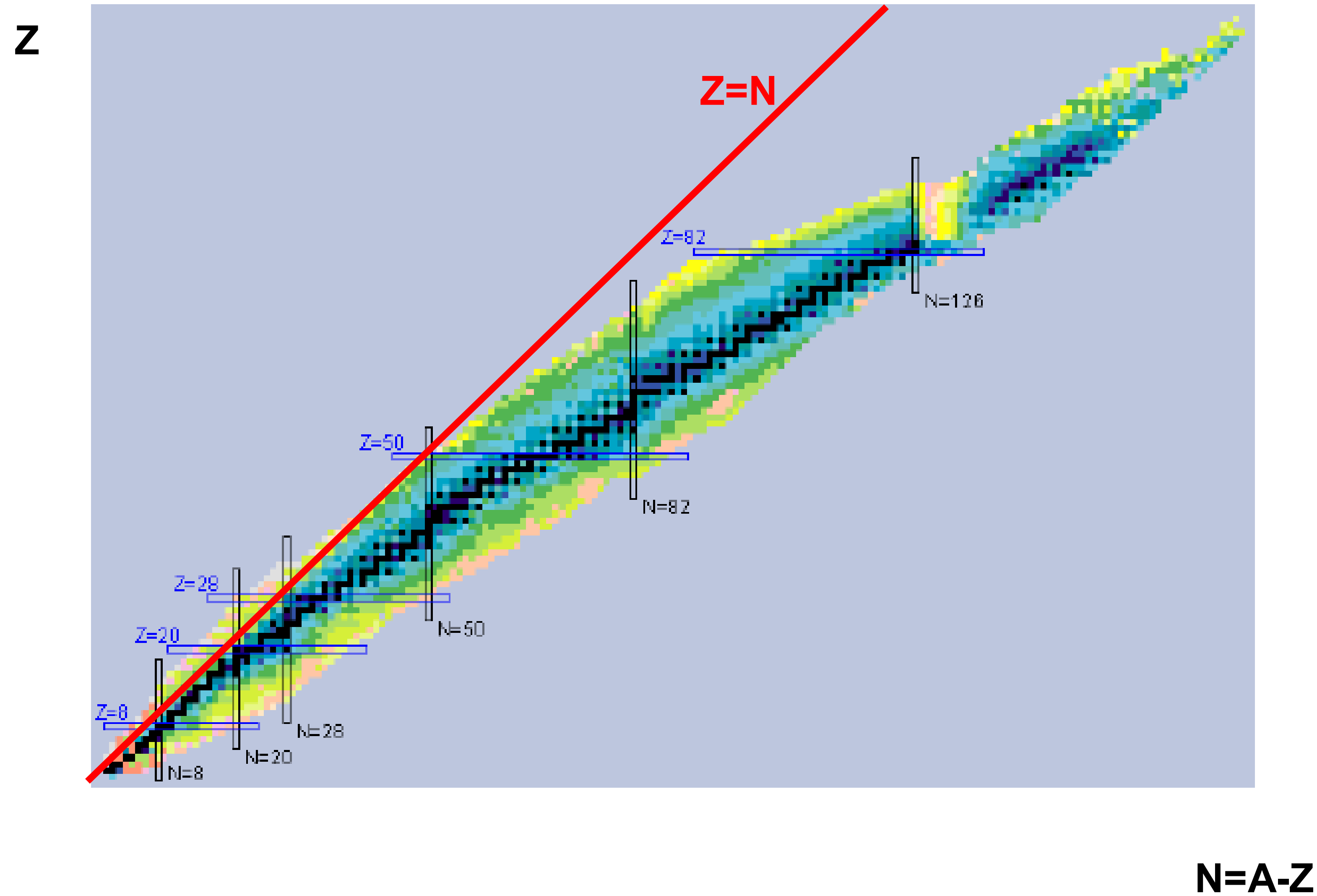
$$\boxed{Z = A/2\cdot\frac{1}{1+A^{2/3}\dfrac{2\cdot 0{,}7MeV}{8\cdot 23{,}3MeV}} = A/2\cdot\frac{1}{1+A^{2/3}7{,}5\cdot 10^{-3}}}$$

$^{208}_{82}Pb$; $A = 208$:

$$Z = (208/2).\frac{1}{1+208^{2/3}7{,}5\cdot 10^{-3}} = 104\frac{1}{1+208^{2/3}7{,}5\cdot 10^{-3}} = 82{,}3 \cong 82$$

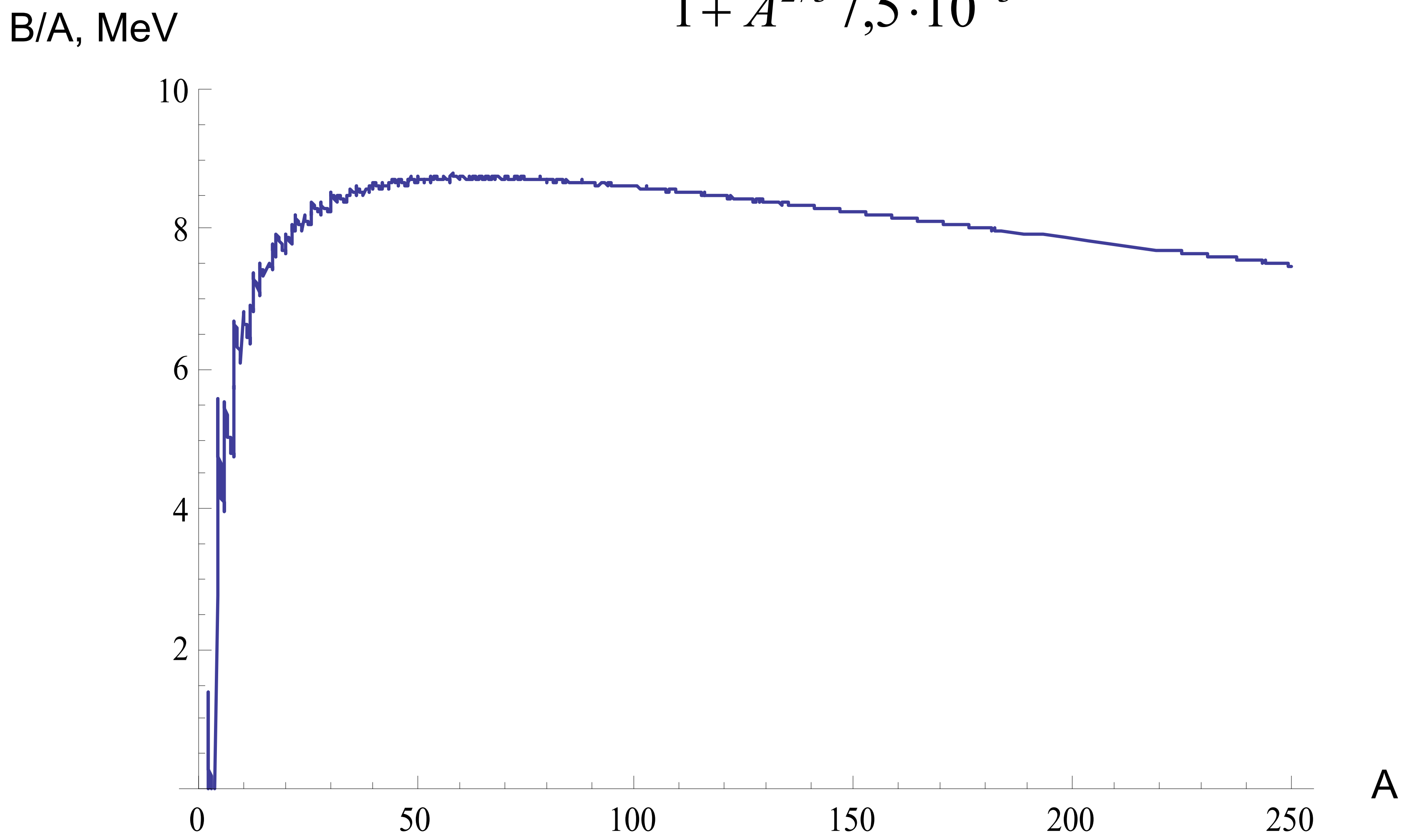
Hmoty_jader.nb

Údolí stability



Vazbová energie na jeden nukleon (v údolí stability)

$$B(A, Z = A/2 \cdot \frac{1}{1 + A^{2/3} 7{,}5 \cdot 10^{-3}}) = B(A)$$



- Těžká jádra mají více neutronů než protonů
- Vazbová energie pro lehká jádra roste s A
- Jádra kolem železa jsou nejstabilnější
- Pro větší A energie zase klesá
- Proč se těžká jádra nerozpadnou/nerozštěpí na lehčí?
- Proč se lehká jádra nesloučí na těžší?
- Jak jádra dosáhnou údolí stability? Pomocí radioaktivních rozpadů.

Rozpadový zákon

$$N(t) \quad ; \quad p = \Delta t / \tau$$

$$(1-p)^N \ldots\ldots 0 \;;\; \binom{N}{1} p(1-p)^{N-1} \ldots 1 \;;\ldots\; \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} \ldots i \;;\ldots;\; \binom{N}{N} p^N \ldots N$$

$$-\Delta N(t) = 0 \cdot (1-p)^N + 1 \cdot \binom{N}{1} p(1-p)^{N-1} + \ldots + N \cdot \binom{N}{N} p^N =$$

$$\sum_{i=0}^{N} i \cdot \binom{N}{i} p^i (1-p)^{N-i} = \sum_{i=0}^{N} i \cdot \frac{N!}{i!(N-i)!} p^i (1-p)^{N-i} =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{N(N-1)!}{(i-1)!(N-i)!} p p^{i-1} (1-p)^{N-i} =$$

$$N \cdot p \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-1)!}{(i-1)!(N-1-(i-1))!} p^{i-1} (1-p)^{(N-1-(i-1))} =$$

$$N \cdot p \sum_{i-1=0}^{N-1} \binom{N-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{N-i} = Np(p + (1-p))^{N-1} = Np$$

$$-\Delta N(t) = N \cdot p = N(t) \frac{\Delta t}{\tau} \quad ; \quad \boxed{N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$N(0)/2 = N(0) \cdot e^{-\frac{T_{1/2}}{\tau}} \Rightarrow \boxed{T_{1/2} = \tau \ln(2) \cong 0{,}69 \cdot \tau}$$

Rozpadovy_zakon.nb

$$-\Delta N(t) = N \cdot p = N(t) \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^n \frac{\Delta t}{\tau} = N(t) \frac{1}{n+1} \Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)^{n+1} \quad N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{1}{n+1}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{n+1}}$$

Rozpadový zákon kvant. mech.

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i\hbar\partial_t \psi(\vec{r},t) = \hat{H}\psi(\vec{r},t) = E_0\psi(\vec{r},t)$$

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\varphi(\vec{r})$$

Pokud se rozpadá:

$$\psi(\vec{r},t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau}}\varphi(\vec{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - \frac{i}{2}\Gamma)t}\varphi(\vec{r}) \; ; \; \Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$$

$$\psi^*(\vec{r},t) \cdot \psi(\vec{r},t) = \left(e^{-\frac{t}{2\tau}}\right)^2 \varphi^*(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}) = e^{-\frac{t}{\tau}}\psi^*(\vec{r},0) \cdot \psi(\vec{r},0)$$

Jak se měří velmi krátké doby života

$$\psi(\vec{r},E)=\int\psi(\vec{r},t)e^{\frac{i}{\hbar}Et}dt=\int e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}e^{-\frac{t}{2\tau}}e^{\frac{i}{\hbar}Et}dt\cdot\varphi(\vec{r})=$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{i}{\hbar}[(E_0-E)-i\frac{\hbar}{2\tau}]t}dt\varphi(\vec{r})=\frac{-1}{-\frac{i}{\hbar}[(E_0-E)-i\frac{\hbar}{2\tau}]}\varphi(\vec{r})=\frac{\hbar/i}{(E_0-E)-i\frac{\hbar}{2\tau}}\varphi(\vec{r})$$

$$\psi^*(\vec{r},E)\cdot\psi(\vec{r},E)=\frac{\hbar^2}{(E_0-E)^2+\left(\frac{\hbar}{2\tau}\right)^2}\varphi^*(\vec{r})\cdot\varphi(\vec{r})=\frac{\hbar^2}{(E_0-E)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}\varphi^*(\vec{r})\cdot\varphi(\vec{r})$$

$$\psi^*(\vec{r},E)\cdot\psi(\vec{r},E)=\boxed{\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma}{(E_0-E)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}}\;;\quad\int\psi^*(\vec{r},E)\cdot\psi(\vec{r},E)dE=1$$

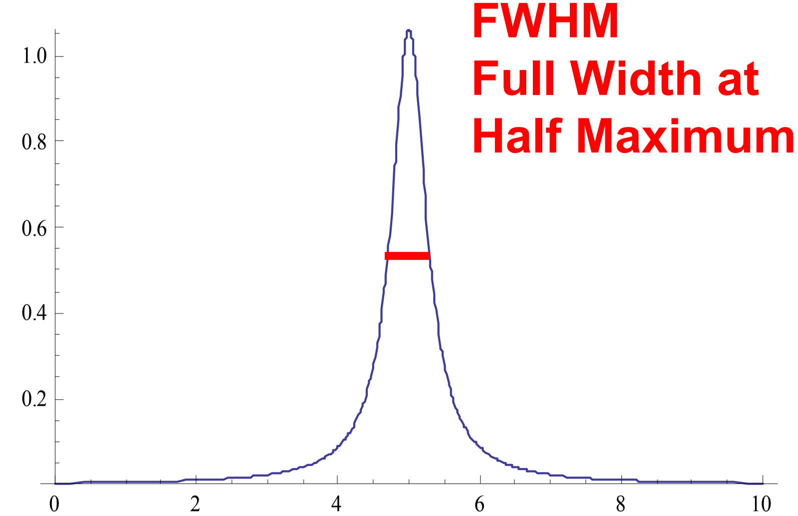
Breit-Wignerova formule

$$\tau=1ns=10^{-9}\text{s}\quad;\quad\Gamma=\frac{\hbar}{\tau}=\frac{\hbar c}{c\tau}=$$

$$\frac{197\cdot10^6 eV\cdot10^{-13}cm}{30cm}=6{,}6\cdot10^{-7}eV$$

$$\tau=1ps=10^{-12}\text{s}\quad;\quad\Gamma=6{,}6\cdot10^{-4}eV$$

$$\tau=1fs=10^{-15}\text{s}\quad;\quad\Gamma=6{,}6\cdot10^{-1}eV$$



Γ = pološířka, FWHM Full Width at Half Maximum

Radioaktivní rozpady

Pro rozpady a reakce se zavádí Q hodnota:

$$X_1 + X_2 + ... -> Y_1 + Y_2 + ...$$

$$Q = \sum_i M_{X_i} - \sum_i M_{Y_i}$$

Rozpad je možný, pokud : $Q > 0$

Rozpad α

[Alpha_decay.nb]

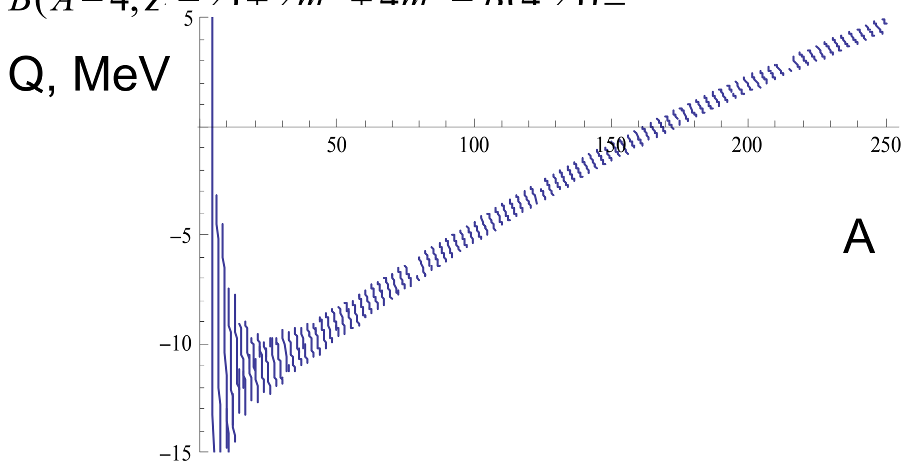
$${}^A_z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He (= \alpha)$$

$$Q_\alpha = M_X - (M_Y + M_\alpha) =$$

$$Zm_p + Am_n - B(A,Z) - \left((Z-2)m_p + (A-4)m_n - B(A-4,Z-2) + 2m \quad + 4m \quad - B(4,2)\right) =$$

$$-(B(A,Z) - B(A-4,Z-2) - B(4,2)) > 0$$

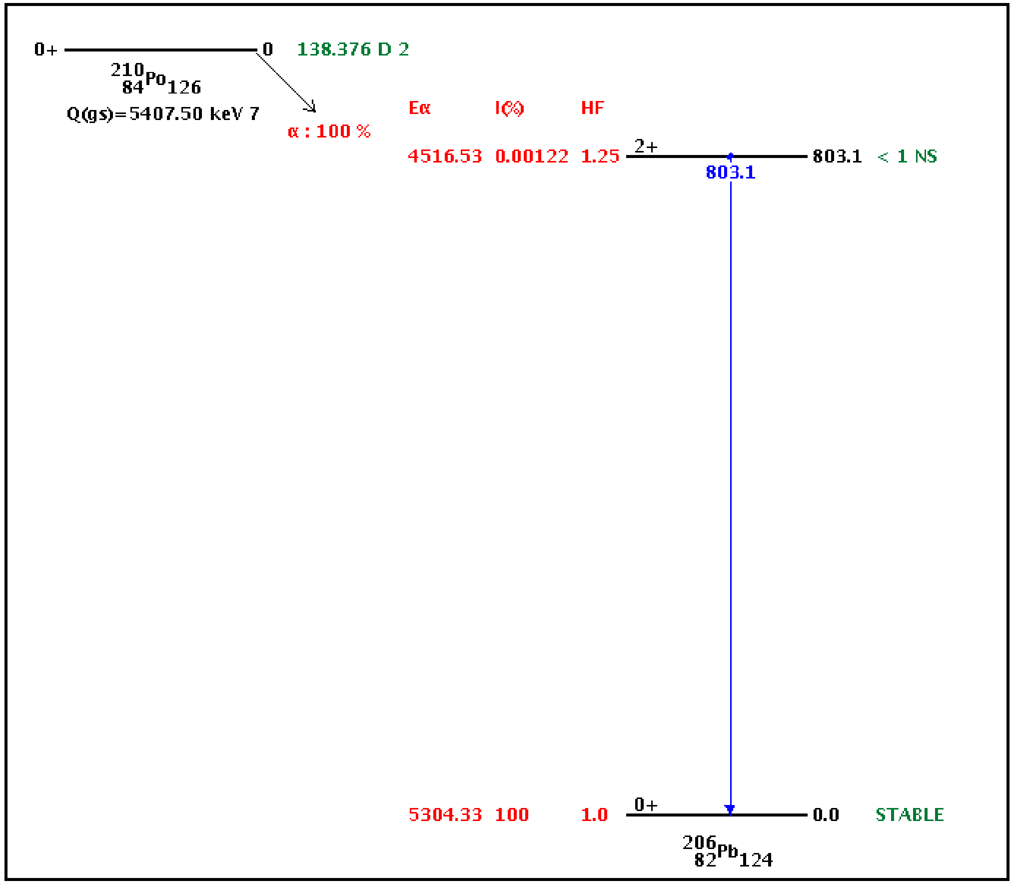
$$A \geq 160 MeV$$

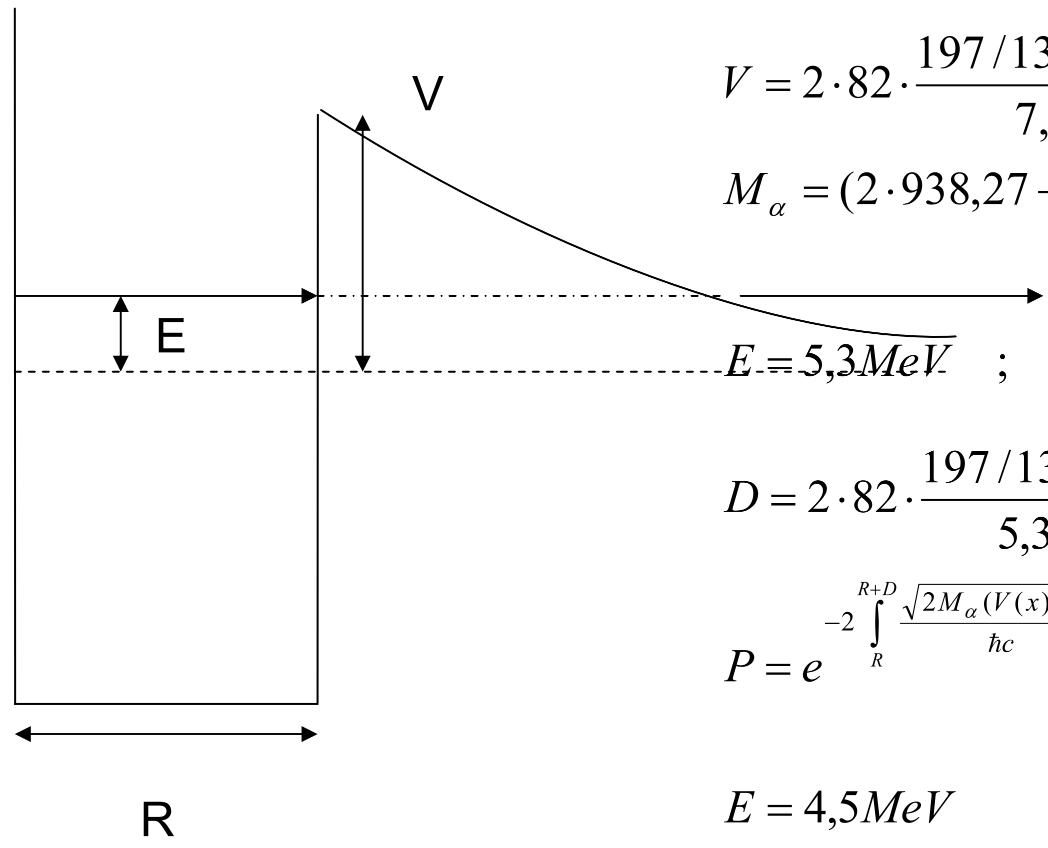


Příklad téměř čistého α zářiče

Pouze 1 z 100000 jader Po 210 se rozpadá s doprovodem 0,89 MeV γ

α částice s velkou energií 5,5 MeV





$$V(R) = 2(Z-2)\frac{\alpha\hbar c}{R} \quad ; \quad R = 1{,}2\sqrt[3]{A-4}\,fm = 7{,}1\,fm$$

$$V = 2\cdot 82\cdot\frac{197/137\,MeVfm}{7{,}1\,fm} = 33{,}2\,MeV$$

$$M_\alpha = (2\cdot 938{,}27 + 2\cdot 939{,}57 - 28)\,MeV = 3727{,}7\,MeV$$

$$E = 5{,}3\,MeV \quad ; \quad 2\cdot 82\cdot\frac{197/137\,MeVfm}{(7{,}1+D)\,fm} = 5{,}3\,MeV$$

$$D = 2\cdot 82\cdot\frac{197/137\,MeVfm}{5{,}3\,MeV} - 7{,}1\,fm = 37{,}4\,fm$$

$$P = e^{-2\int_R^{R+D}\frac{\sqrt{2M_\alpha(V(x)-E)}}{\hbar c}dx} = e^{-70{,}0} = 3{,}8\cdot 10^{-31}$$

$$E = 4{,}5\,MeV$$

$$D = 2\cdot 82\cdot\frac{197/137\,MeVfm}{4{,}5\,MeV} - 7{,}1\,fm = 45{,}3\,fm$$

$$P = P = e^{-2\int_R^{R+D}\frac{\sqrt{2M_\alpha(V(x)-E)}}{\hbar c}dx} = e^{-83{,}0} = 8{,}5\cdot 10^{-37}$$

Odhad doby života

$$\beta_\alpha = \sqrt{2E / M_\alpha} = \sqrt{2 \cdot 5{,}4 / 3727{,}7} = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$$

$$f = \beta_\alpha c / R = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{8} m s^{-1} / 7{,}1 \cdot 10^{-15} m = 1{,}2 \cdot 10^{23} s^{-1}$$

$$T = 1 / Pf = 1 / 1{,}2 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-31} = 2{,}2 \cdot 10^{7} s = 2{,}2 \cdot 10^{7} s / (86400 s / day) =$$

$$= 254 days$$

$$T = 138 days$$

Závislost doby života alfa na energii:

```
In[128]:= Z = 84
A = 210
Ma = 2 × 938.27 + 2 × 939.57 - 28;
al = 1 / 137;
hc = 197;
R = 1.2 (A - 4)^(1/3);
EE = 5.4
RR = 2 (Z - 2) al hc / EE;
-2/hc ∫_R^RR Sqrt[2 Ma (2 (Z - 2) al hc / x - EE)] dx;
N[e^%]
EE = 4.5
RR = 2 (Z - 2) al hc / EE;
-2/hc ∫_R^RR Sqrt[2 Ma (2 (Z - 2) al hc / x - EE)] dx;
N[e^%]
EE = 1.5
RR = 2 (Z - 2) al hc / EE;
-2/hc ∫_R^RR Sqrt[2 Ma (2 (Z - 2) al hc / x - EE)] dx;
N[e^%]
EE = 8.5
RR = 2 (Z - 2) al hc / EE;
-2/hc ∫_R^RR Sqrt[2 Ma (2 (Z - 2) al hc / x - EE)] dx;
N[e^%]
```

Out[128]= 84

Out[129]= 210

Out[134]= 5.4

Out[137]= 3.77376×10^{-31}

Out[138]= 4.5

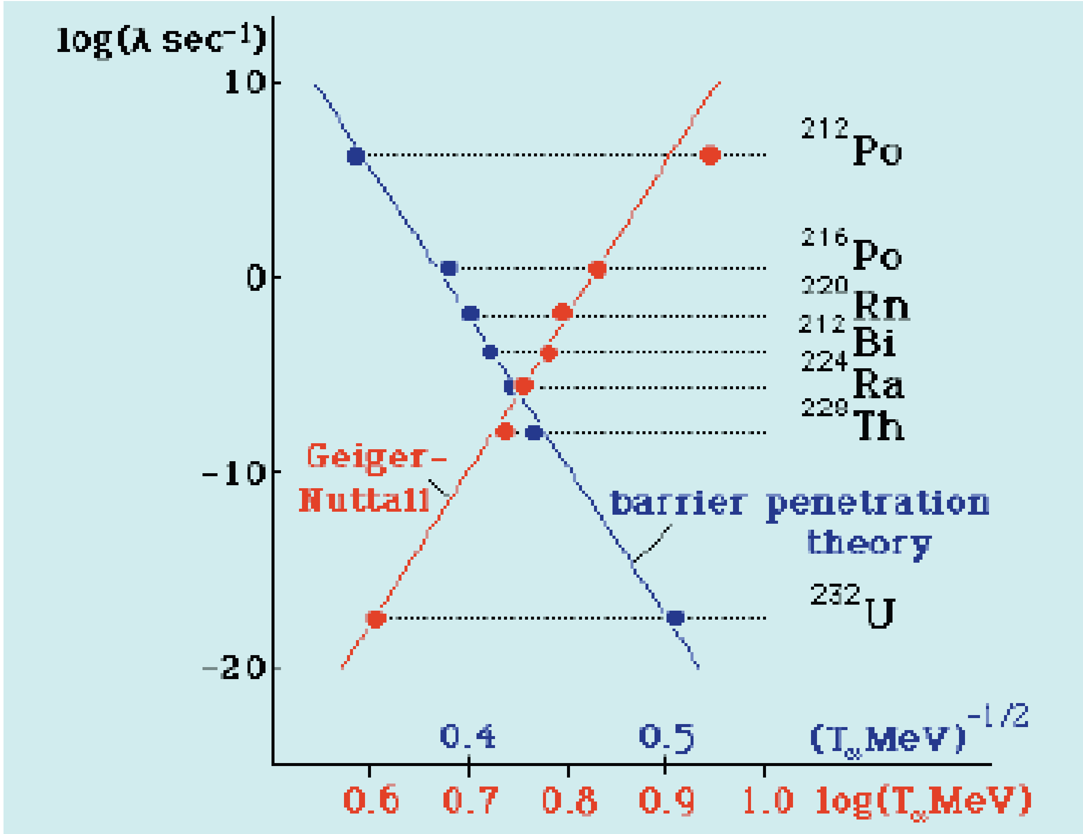
Out[141]= 8.54363×10^{-37}

Out[142]= 1.5

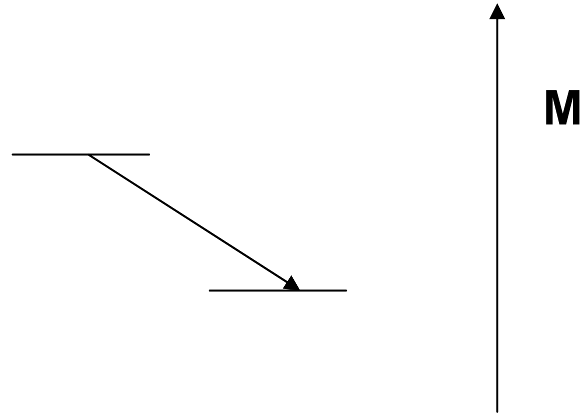
Out[145]= 5.5797×10^{-85}

Out[146]= 8.5

Out[149]= 2.3733×10^{-19}



Rozpad beta



β^- $\qquad {}^A_zX \rightarrow {}^A_{Z+1}Y + e^- + \overline{\nu_e}$

$$Q = M_X + Zm_e - (M_Y + Zm_e + m_e) = \mathrm{M}_X - \mathrm{M}_Y > 0$$

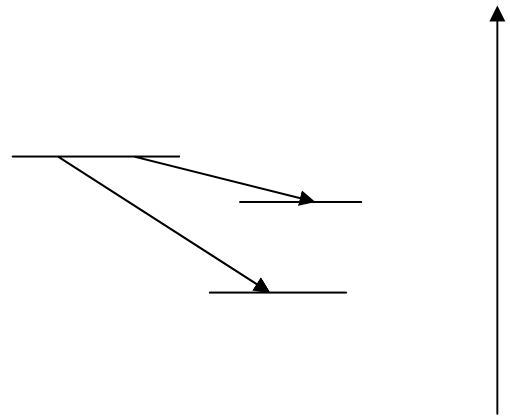
β^+ $\qquad {}^A_zX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e$

$$Q = M_X + Zm_e - (M_Y + Zm_e + m_e) = \mathrm{M}_X - (\mathrm{M}_Y + 2m_e) > 0 \Rightarrow \mathrm{M}_X - \mathrm{M}_Y > 2m_e$$

Elektronový záchyt

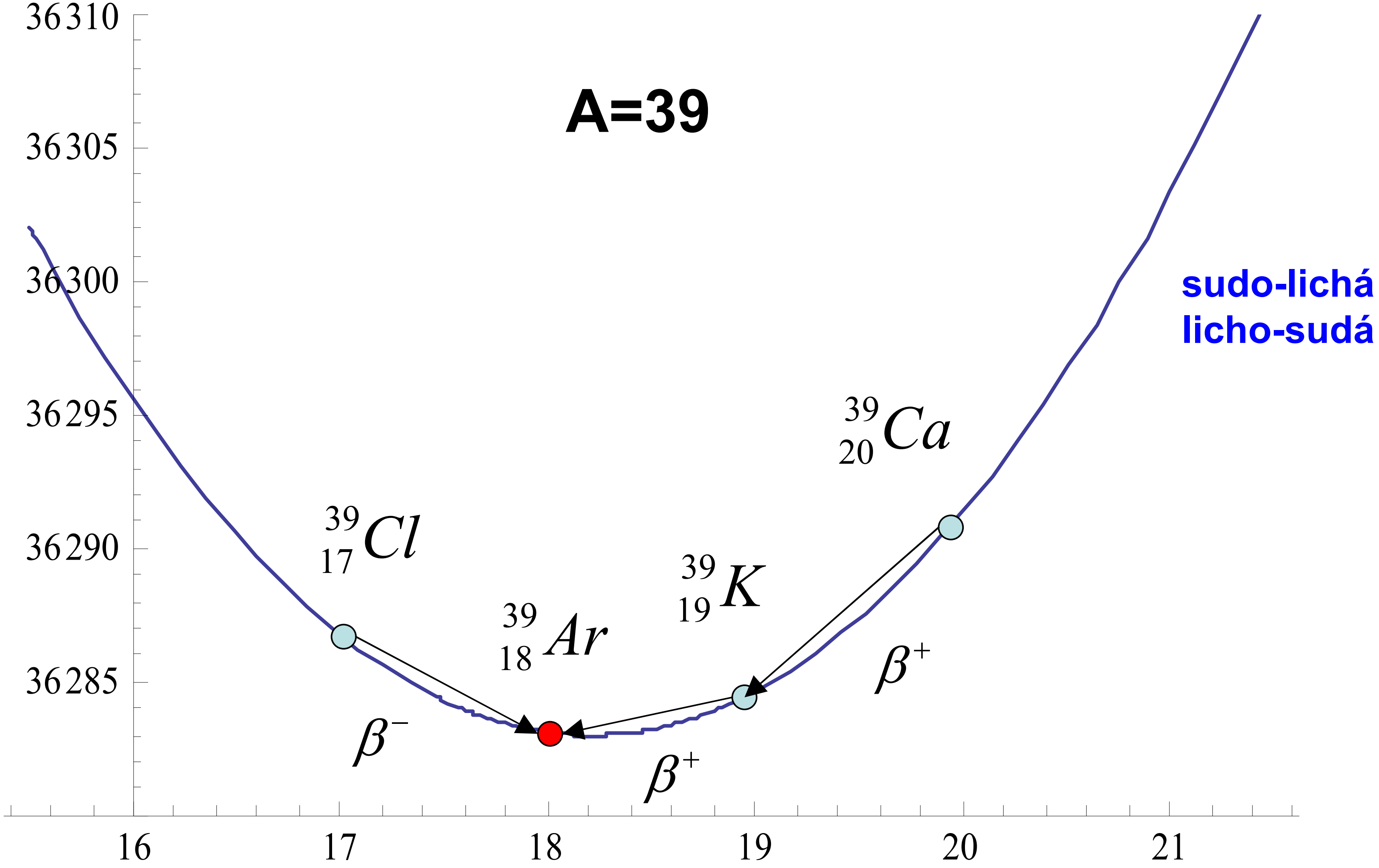
$E.C.$ $\qquad e^- + {}^A_zX \rightarrow {}^A_{Z-1}Y + \nu_e$

$$Q = M_X + Zm_e - (M_Y + (Z-1)m_e) = \mathrm{M}_X - \mathrm{M}_Y > 0$$



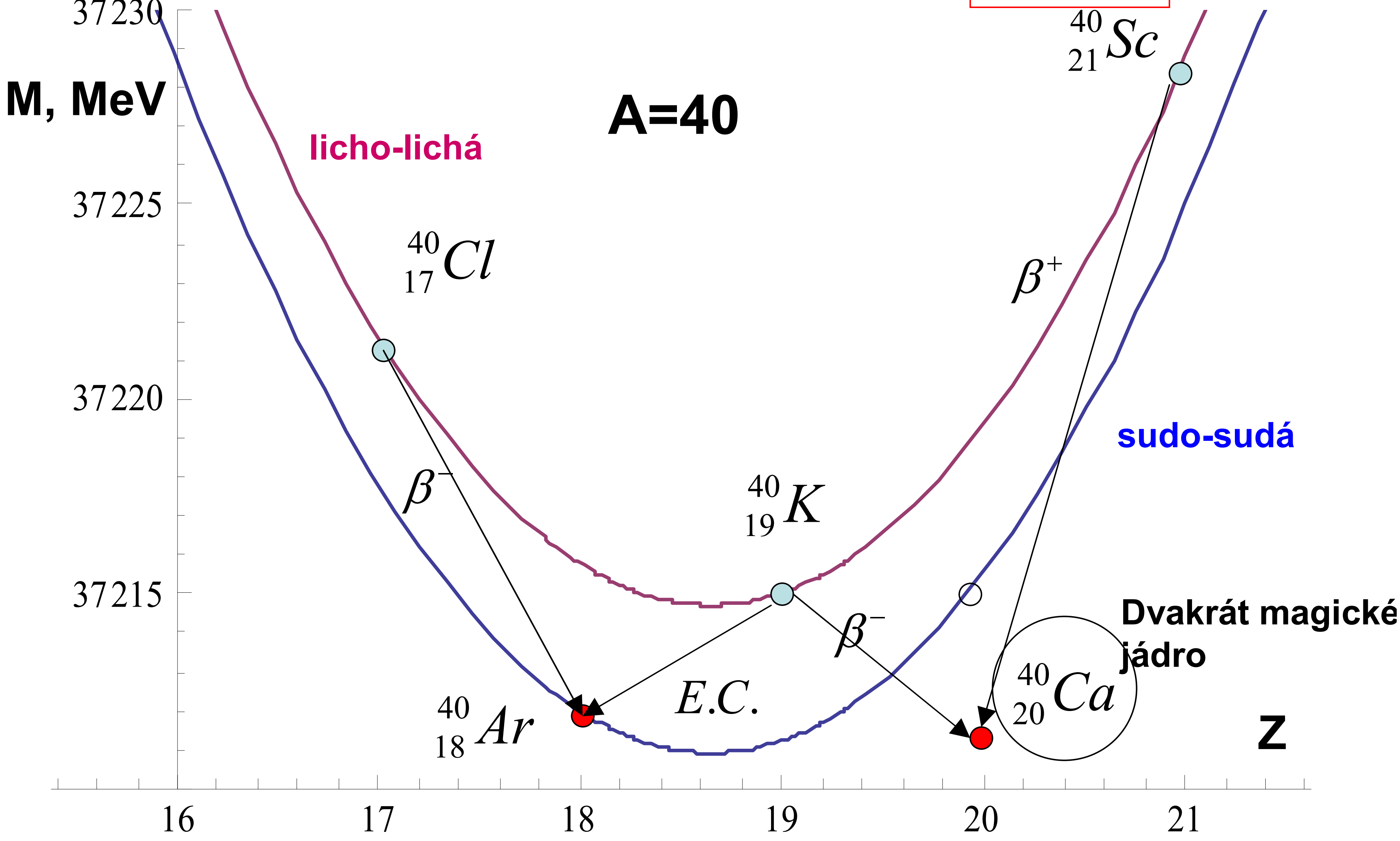
$$M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - B(A,Z) =$$

$$Zm_p + (A-Z)m_n - \left(A \cdot 15{,}6\,MeV - A^{2/3} \cdot 17{,}2\,MeV - \frac{Z^2}{A^{1/3}} \cdot 0{,}7\,MeV - \frac{(A-2Z)^2}{A} \cdot 23{,}3\,MeV \right)$$



$$M(A,Z) = Zm_p + (A-Z)m_n - B(A,Z) =$$

$$Zm_p + (A-Z)m_n - \left(A\cdot 15{,}6MeV - A^{2/3}\cdot 17{,}2MeV - \frac{Z^2}{A^{1/3}}\cdot 0{,}7MeV - \frac{(A-2Z)^2}{A}\cdot 23{,}3MeV \boxed{\mp \frac{1}{A^{1/2}} 12{,}0MeV} \right)$$



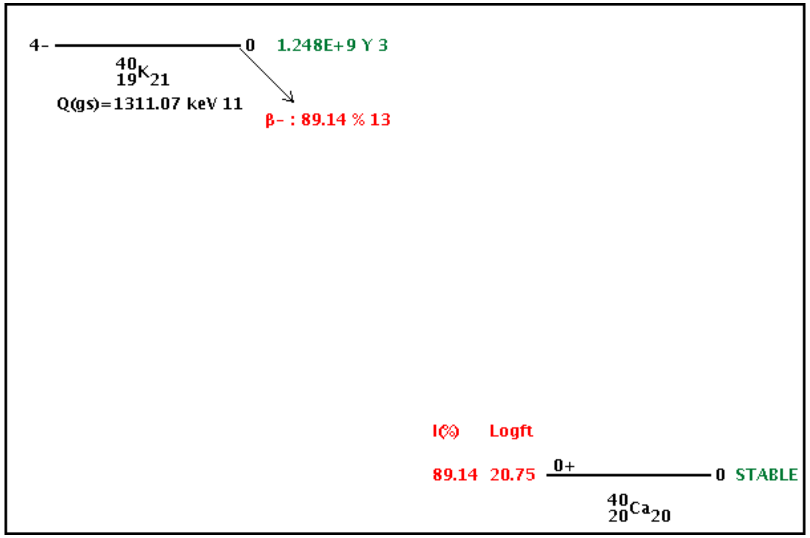
Jak radioaktivní je lidské tělo?

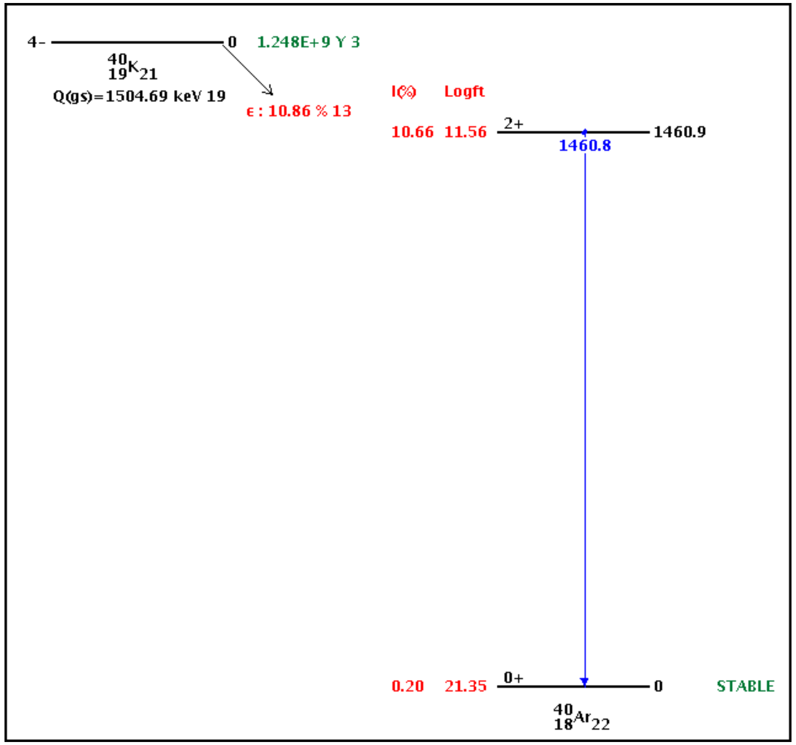
1,2x10^(-4) K 40, 200 g K v lidském těle

$$200g\ \ K \Rightarrow \frac{200g \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-4}}{40g/mol} 6{,}023 \cdot 10^{23} = 3{,}6 \cdot 10^{20}\ jader\ \ {}^{40}_{19}K$$

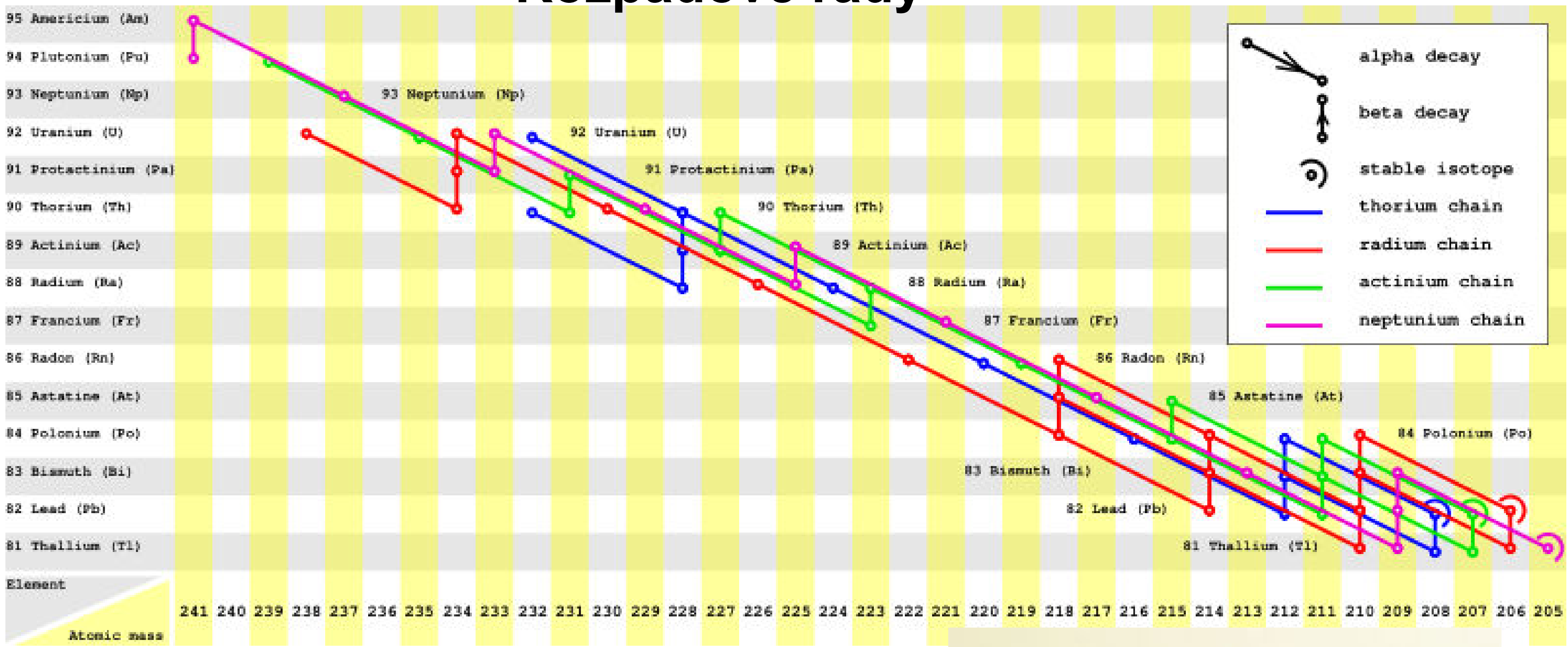
$$\frac{3{,}6 \cdot 10^{20}\ jader}{1{,}25 \cdot 10^{9}\ year \cdot 3{,}15 \cdot 10^{7}\ s/year} \Rightarrow 9 \cdot 10^{3}\ rozpadů/s$$

$$1{,}4MeV\ \ \gamma\ \ je\ \ přítomn\ \ v\ \ 10\% \Rightarrow 9 \cdot 10^{2}\ rozpadů/s$$





Rozpadové řady



thorium series - $_{82}Pb^{208}$

uranium series - $_{82}Pb^{206}$

actinium series - $_{82}Pb^{207}$

neptunium series - $_{83}Bi^{209}$.

URANIUM 238 (U238)
RADIOACTIVE DECAY

type of radiation	nuclide	half-life
	uranium—238	4.5×10^{9} years
α		
	thorium—234	24.5 days
β		
	protactinium—234	1.14 minutes
β		
	uranium—234	2.33×10^{5} years
α		
	thorium—230	8.3×10^{4} years
α		
	radium—226	1590 years
α		
	radon—222	3.825 days
α		
	polonium—218	3.05 minutes
α		
	lead—214	26.8 minutes
β		
	bismuth—214	19.7 minutes
β		
	polonium—214	1.5×10^{-4} seconds
α		
	lead—210	22 years
β		
	bismuth—210	5 days
β		
	polonium—210	140 days
α		
	lead—206	stable

$$N_1(t) = N_1(0) \cdot e^{-t/\tau_1}$$

$$N_2(t) = N_2(0) \cdot e^{-t/\tau_2}$$

$$\frac{N_1(t)}{N_1(t)} = \frac{N_1(t)}{N_2(t)} e^{-t\left(1/\tau_1 - 1/\tau_2\right)} = \frac{N_1(t)}{N_2(t)} e^{-t \ln 2\left(1/T_1 - 1/T_2\right)}$$

Slupkový model jádra a Magická čísla

Jádra s určitým počtem neutronů a/nebo protonů vykazují abnormální velkou vazbovou energii.

Tato čísla jsou 2,8,20,28,50,82,126

Příklad Ca 20,40 je dvakrát magické jádro, má magický počet neutronů i protonů (20).
Další příklady = alfa částice (2,4), kyslík (8,16), … , olovo (82,208).

Za objasnění magických čísel dostali Maria Goepert-Mayer a Johannes Jensen Nobelovu cenu.

Magická čísla pro harmonický oscilátor:

1i **26**	2g **18**	3d **10**	4s **2**	**56**	**168**
1h **22**	2f **14**	3p **6**		**42**	**112**
1g **18**	2d **10**	3s **2**		**30**	**70**
1f **14**	2p **6**			**20**	**40**
1d **10**	2s **2**			**12**	**20**
1p **6**				**6**	**8**
1s **2**				**2**	**2**

2,8,20 jsou správně, ale neumí předpovědět 28, 50, 82, 126

Magická čísla pro potenciálovou jámu:

1i **26**	2g **18**	3d **10**	4s **2**	**56**	**168**
	2f **14**	3p **6**		**20**	**112**
1h **22**	2d **10**	3s **2**		**34**	**92**
1g **18**				**18**	**58**
1f **14**	2p **6**			**20**	**40**
1d **10**	2s **2**			**12**	**20**
1p **6**				**6**	**8**
1s **2**				**2**	**2**

Opět 2,8,20 jsou správně, ale neumí předpovědět 28, 50, 82, 126

Spin-orbitální interakce

$$J = L + S$$

$$J = |L - S|, \ldots, L + S$$

$$S = 1/2$$

$$J = L - 1/2, L + 1/2 \quad ; \;\; L \neq 0$$

$$J = L + 1/2$$

$$J \quad ..... \text{degenerace}: (2J+1) \quad .... J_z = -J, \ldots, J$$

$$L = 0 .... s - hladina .... s_J = s_{1/2} ..... \deg enerace : 2 \cdot 1/2 + 1 = 2$$

$$L = 1 .... p - hladina .... p_{1/2} ..... \deg enerace : 2 \cdot 1/2 + 1 = 2$$

$$.. p_{3/2} ..... \deg enerace : 2 \cdot 3/2 + 1 = 4$$

$$L = 2 .... d - hladina .... d_{3/2} ..... \deg enerace : 2 \cdot 3/2 + 1 = 4$$

$$.. d_{5/2} ..... \deg enerace : 2 \cdot 5/2 + 1 = 6$$

Spin-orbitální interakce

potenci

$$-\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}\left(\left(\vec{L}+\vec{S}\right)^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2\right)$$

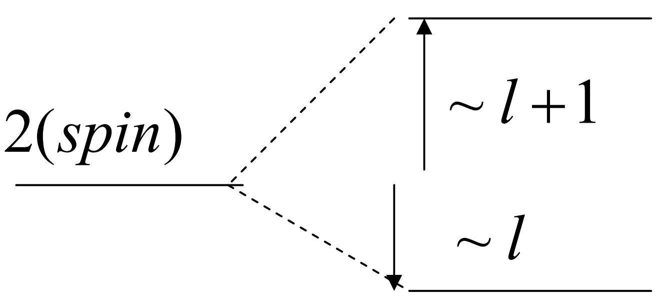
$$\left\langle l_j \middle| -\vec{L}\cdot\vec{S} \middle| l_j \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2}\big(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\big) =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\big((l\pm 1/2)(l\pm 1/2+1) - l(l+1) - 1/2(1/2+1)\big) =$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\big((l^2 \pm l/2 \pm l/2 + 1/4 + l \pm 1/2) - (l^2+l) - 3/4\big) =$$

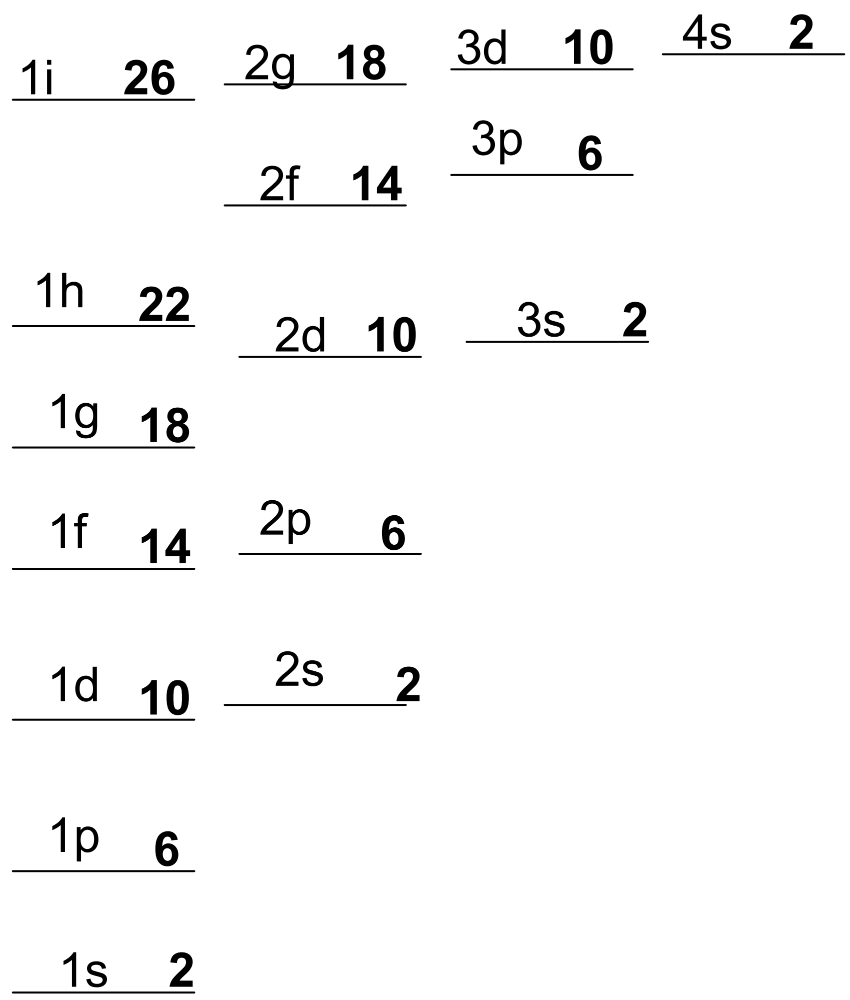
$$-\frac{\hbar^2}{2}\begin{matrix} +l \\ -l-1 \end{matrix}$$

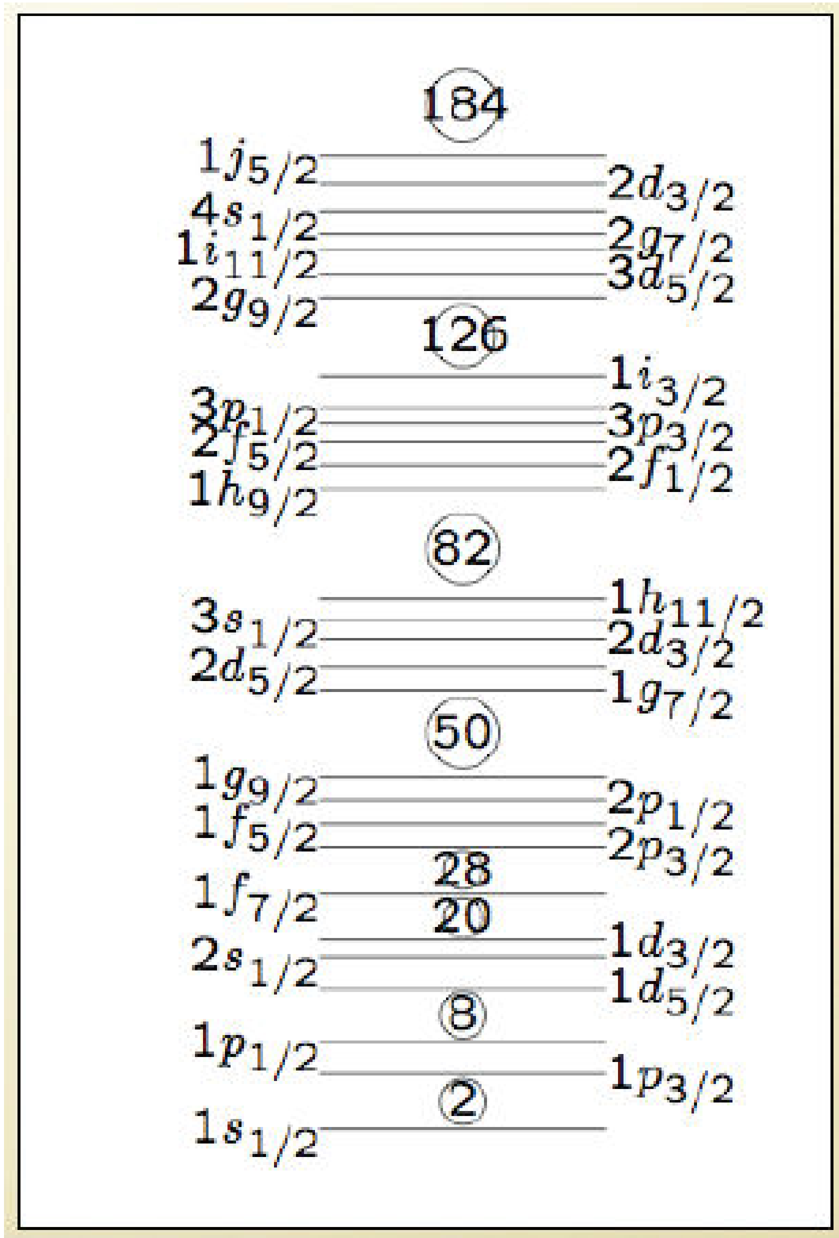
l.......$(2l+1).2(spin)$



$l_{j=l-1/2}$......$2(l-1/2)+1 = 2l$

$l_{j=l+1/2}$......$2(l+1/2)+1 = 2l+2$


4s 2
3d 10
3p 6
3s 2
2g 18
2f 14
2d 10
2p 6
2s 2
1i 26
1h 22
1g 18
1f 14
1d 10
1p 6
1s 2


184
$1j_{5/2}$
$2d_{3/2}$
$4s_{1/2}$
$2g_{7/2}$
$1i_{11/2}$
$3d_{5/2}$
$2g_{9/2}$
126
$1i_{3/2}$
$3p_{1/2}$
$3p_{3/2}$
$2f_{5/2}$
$2f_{1/2}$
$1h_{9/2}$
82
$1h_{11/2}$
$3s_{1/2}$
$2d_{3/2}$
$2d_{5/2}$
$1g_{7/2}$
50
$1g_{9/2}$
$2p_{1/2}$
$1f_{5/2}$
$2p_{3/2}$
28
$1f_{7/2}$
20
$1d_{3/2}$
$2s_{1/2}$
$1d_{5/2}$
8
$1p_{1/2}$
$1p_{3/2}$
2
$1s_{1/2}$

(Celkový) spin (J) a parita základních stavů jader

Sudo-sudá jádra…………..spin=0, parita=+

Licho-sudá a sudo-lichá….spin a parita dány nespárovaným nukleonem
Př.: kyslík 15: nespárovaný neutron má spin J=½ a l=1, tj. zápornou paritu

Licho-lichá……spin je dán součtem spinů nespárovaných nukleonů
Př.: dusík 14: nespárovaný proton i neutron mají spin J=½ a celkový spin jádra může být 0 nebo 1 (je 1).