Úvod k moderním metodám

Zadání problému:

- Jsou dána dvě měření teploty v jenom místě   T1, T2
- $T1 = Tt + \varepsilon 1$
- $T2 = Tt + \varepsilon 2$
- $\varepsilon 1$, $\varepsilon 2$ … chyba měření:

$E(\varepsilon 12) = \sigma 12$, $E(\varepsilon 22) = \sigma 22$,   … velikost chyby

$E(\varepsilon 1) = 0$, $E(\varepsilon 2) = 0$,   … není systematická chyba

$E(\varepsilon 1 \varepsilon 2) = 0$ … nezávislé chyby

Jak odhadnout správnou teplotu Tt   (Ta … odhad) ?

a) Přístup „optimální interpolace“

- Lineární kombinace

$$T_a = a_1 T_1 + a_2 T_2$$

- Bez systematické chyby (T1, T2 nemají systematickou chybu)

$$a_1 + a_2 = 1$$

- Minimalizace kvadratické chyby

$$\sigma_a^2 = E\left[(T_a - T_t)^2\right] = E\left[\left(a_1(T_1 - T_t) + a_2(T_2 - T_t)\right)^2\right]$$

Minimalizace funkcionálu:

$$F(a_1) = \sigma_a^2 = E\left[(T_a - T_t)^2\right] = E\left[\left(a_1(T_1 - T_t) + (1 - a_1)(T_2 - T_t)\right)^2\right] \longrightarrow \min$$

Řešení:

$$a_1 = \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad a_2 = \frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Chyba odhadu:

$$\frac{1}{\sigma_a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \qquad \sigma_a^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

b) Variační přístup (minimalizace penalizační funkce)

$$J(T_a) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(T_1 - T_a\right)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\left(T_2 - T_a\right)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

Odvození funkcionálu:

1. pravděpodobnostní přístup (maximalizace pravděpodobnosti)

Za předpokladu Gaussova rozdělení:

$$p_{\sigma_1}(T_a \mid T_1) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_1}\exp\left(-\frac{(T_1 - T_a)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

$$p_{\sigma_2}(T_a \mid T_2) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_2}\exp\left(-\frac{(T_2 - T_a)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

Hledáme Ta , které maximalizuje pravděpodobnost za podmínky, že:

- naměřeno T1, T2
- Gaussovo rozdělení chyby
- chyby jsou nezávislé

$$J'(T) = \max\left\{ p(T \mid T_1, T_2)\right\} =$$

$$= p_{\sigma_1}(T \mid T_1)\, p_{\sigma_2}(T \mid T_2) =$$

$$= \frac{1}{2\Pi\, \sigma_1 \sigma_2} \exp\left(- \frac{(T_1 - T)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(T_2 - T)^2}{2\sigma_2^2} \right) \rightarrow \max$$

$$J(T_a) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(T_1 - T_a\right)^2}{\sigma_1^2} + \frac{\left(T_2 - T_a\right)^2}{\sigma_2^2} \right] \quad \rightarrow \quad \min$$

Odvození funkcionálu:
2. Bayesova aposteriorní pravděpodobnost (maximalizace pravděpodobnosti)

Bayesova pravděpodobnost:

$$p(A \mid B) = \frac{p(B \mid A)p(A)}{p(B)}$$

Předpoklady:

- naměřeno T1 a T2
- Gaussovo rozdělení chyby
- chyby jsou nezávislé

---

1. Je naměřeno T1

$$p_{\sigma_1}(T_a \mid T_1) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_1}\exp\left(-\frac{(T_1 - T_a)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

2. Je naměřeno T2

$$p_{\sigma_2}(T_a \mid T_2) = \frac{p_{\sigma_2}(T_2 \mid T_a)\,p_{\sigma_1}(T_a \mid T_1)}{p_{\sigma_2}(T_2)}$$

$$J'(T_a) = p_{\sigma_2}(T_a \mid T_2) = \frac{p_{\sigma_2}(T_2 \mid T_a)\,p_{\sigma_1}(T_a \mid T_1)}{p_{\sigma_2}(T_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_2}\exp\left(-\frac{(T_2 - T_a)^2}{2\sigma_2^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_1}\exp\left(-\frac{(T_1 - T_a)^2}{2\sigma_1^2}\right)}{\int_{T'}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_2}\exp\left(-\frac{(T_2 - T')^2}{2\sigma_2^2}\right)dT'} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_2}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_1}}{\int_{T'}\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_2}\exp\left(-\frac{(T_2 - T')^2}{2\sigma_2^2}\right)dT'}}}_{\textbf{Konstanta}}\;\underbrace{\boxed{\exp\left(-\frac{(T_2 - T_a)^2}{2\sigma_2^2}\right)\exp\left(-\frac{(T_1 - T_a)^2}{2\sigma_1^2}\right)}}_{\textbf{Minimalizace}}$$

$$\boxed{J(T_a) = \frac{1}{2}\left[\frac{(T_1 - T_a)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(T_2 - T_a)^2}{\sigma_2^2}\right] \quad \rightarrow \quad \min}$$

Kalmánův filtr – jednoduchá asimilace pro skalární veličinu

Místo dvou měření T1, T2 máme:

T1 = Tb … předpověď

T2 = To … naměřená hodnota

1. $$T_a = T_b + W(T_o - T_b)$$

Oprava odhadu

(To - Tb) … inovace naměřené hodnoty

2. $$W = \sigma_b^2(\sigma_b^2 + \sigma_o^2)^{-1}$$

Optimální váha W

3. $$\sigma_a^2 = (\sigma_b^{-2} + \sigma_o^{-2})^{-1}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_b^2\sigma_o^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} = (1 - W)\sigma_b^2$$

Odhad chyby interpolace σa2

Cyklus asimilace (analýza – předpověď)

M … předpovědní model, ti … aktuální čas

1. Optimální interpolace (OI)

$T_b(t_{i+1}) = M[T_a(t_i)]$ předpověď

$\sigma_b^2(t_{i+1}) = \alpha\, \sigma_a^2(t_i)$ odhad chyby předpovědi při OI

2. Kalmánův filtr

$$T_b(t_{i+1}) = M[T_a(t_i)]$$ předpověď

$$T_t(t_{i+1}) = M[T_t(t_i)] - \varepsilon_M$$

Vlastnosti chyby:

$$E(\varepsilon_M) = 0$$ … nemá systematickou chybu

$$E(\varepsilon_M^2) = Q^2$$

Odvození chyby předpovědi:

$$\varepsilon_b(t_{i+1}) = T_b(t_{i+1}) - T_t(t_{i+1}) = M\left(T_a(t_i)\right) - M\left(T_t(t_i)\right) + \varepsilon_M \approx \frac{\partial M}{\partial T}\left(T_a(t_i) - T_t(t_i)\right) + \varepsilon_M$$

$$\varepsilon_b(t_{i+1}) = \mathbf{M}\varepsilon_a(t_i) + \varepsilon_M$$

$$\sigma_b^2(t_{i+1}) = E\left(\varepsilon_b^2(t_{i+1})\right) = E\left[\left(\mathbf{M}\varepsilon_a(t_i) + \varepsilon_M\right)^2\right] = E\left[\left(\mathbf{M}^2\varepsilon_a^2(t_i) + 2\mathbf{M}\varepsilon_a(t_i)\varepsilon_M + \varepsilon_M^2\right)\right]$$

$$\sigma_b^2(t_{i+1}) = \mathbf{M}^2\sigma_a^2(t_i) + Q^2$$

Shrnutí: Cyklus asimilace (analýza – předpověď)

M … předpovědní model, ti … aktuální čas

1. Předpověď

$T_b(t_{i+1}) = M[T_a(t_i)]$ předpověď

2. Analýza

$T_o(t_{i+1})$ nové měření

$T_a(t_{i+1}) = T_b(t_{i+1}) + W(T_o(t_{i+1}) - T_b^{(o)}(t_{i+1}))$ nová analýza

$\sigma_b^2(t_{i+1}) = \alpha\, \sigma_a^2(t_i)$ odhad chyby předpovědi při OI

$\sigma_b^2(t_{i+1}) = E\left(\varepsilon_b^2(t_{i+1})\right) = \mathbf{M}^2 \sigma_a^2(t_i) + Q^2$ odhad chyby předpovědi pro KF

Porovnání OA s Kalmánovým filtrem

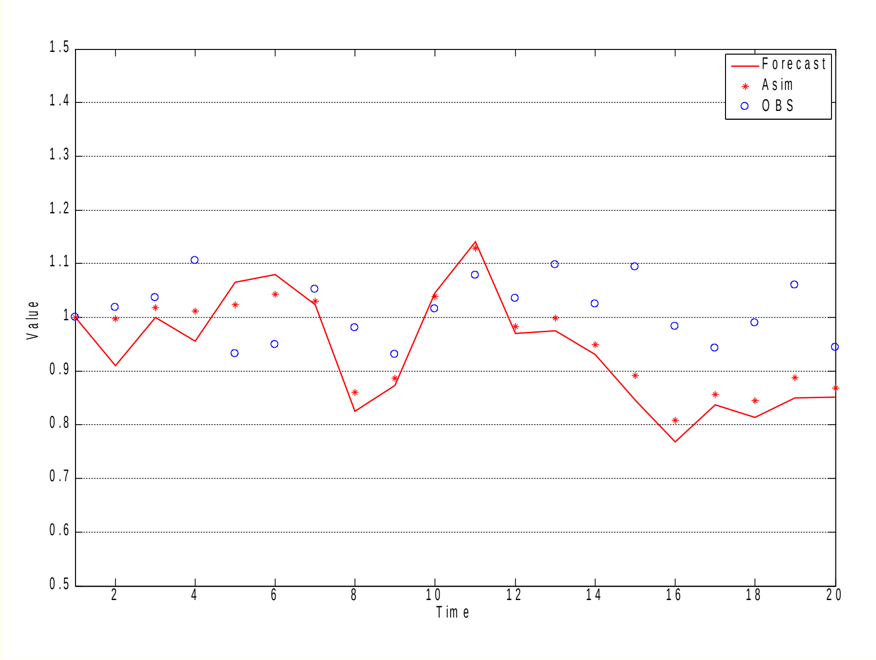
F(k+1) = F(k)   F(1) = 1

σOBS = 0.05

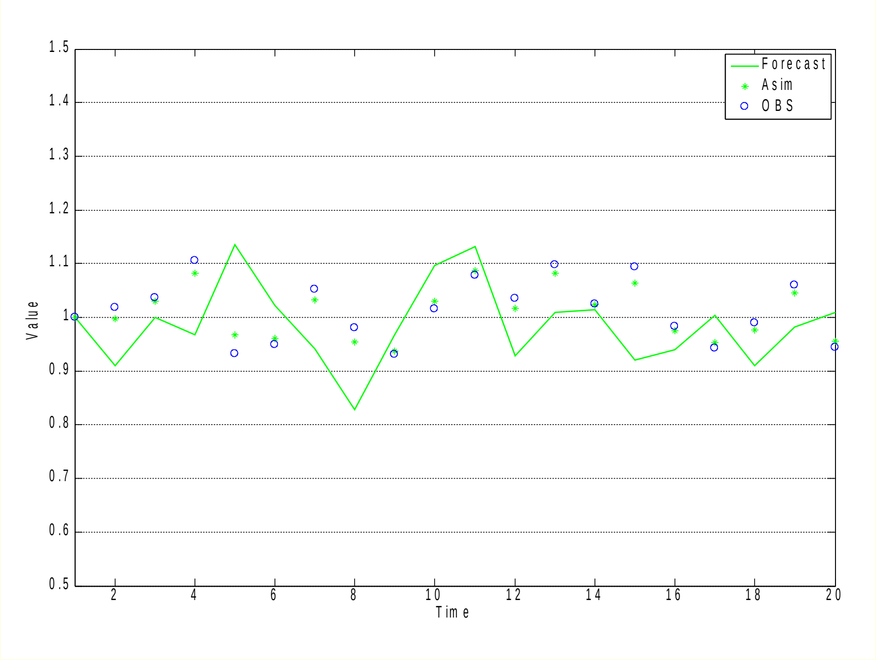
σMOD = 0.1

RMSE(OA) = 0.1182,   RMSE(KF) = 0.0750

OA



KF



Porovnání OA s Kalmánovým filtrem

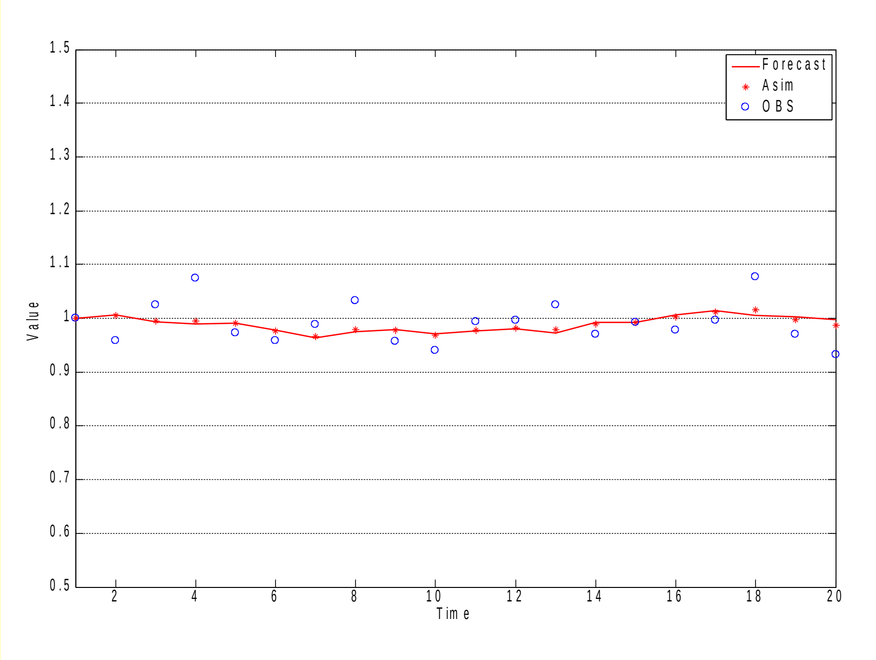
$F(k+1) = F(k) \quad F(1) = 1$

$\sigma OBS = 0.05$

$\sigma MOD = 0.01$

RMSE(OA) = 0.0174,   RMSE(KF) = 0.0156

OA



KF