Variační metoda - 3DVAR

Označení:

- x - hodnoty analyzované veličiny v uzlových bodech

  xi, i=1,…,NX

- K - interpolační operátor: uzlové hodnoty → hodnoty na stanicích

  y = K(x)

- y - interpolované hodnoty na stanicích
- xT - přesné hodnoty v uzlových bodech
- yO - naměřené hodnoty na stanicích

Formulace variačního problému

- Bayesův vztah:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

- Formulace variačního problému:

jev A : x=xT

jev B : y=yO

$$P(x = x_T / y = y_O) \approx P(y = y_O / x = x_T)P(x = x_T)$$

$$P(x = x_T / y = y_O) \approx P(y = y_O / x = x_T)P(x = x_T)$$

- Označení

  PA(x) = P(x=xT / y=yO) - hustota pravděpodobnosti

- Jak vybrat x ?

  Maximální pravděpodobnost: xA= x, PA(x) je maximální

  Průměr (minimální variance): $x_A = \int x P_A(x)dx$

Formulace variačního problému

$$P_A(x) \approx P(y = y_O / x = x_T)\; P(x = x_T)$$

Nová informace

Apriorní znalost

Apriorní znalost

$$P(x = x_T / y = y_O) \approx P(y = y_O / x = x_T)\,P(x = x_T)$$

Přesnost odhadu se vyjádří pomocí předběžného pole xB ve formě:

$$P(x = x_T) = P_B(x - x_B) = P_B(x - x_B, x_T)$$

Vyjádření PB pomocí Gaussova rozdělení:

$$P_B(x - x_B) \approx \exp[-0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B)]$$

$$B = \left\langle (x - x_B)(x - x_B)^T \right\rangle$$

Vliv naměřených hodnot

$$P(x = x_T / y = y_O) \approx \boxed{P(y = y_O / x = x_T)}\, P(x = x_T)$$

$$P(y = y_O / x = x_T)$$

P závisí na:

- Chybě měření
- Chybě interpolace (y a x jsou různé)

Chyba měření

y1 … přesná hodnota

$$P(y = y_O / y_1 = y_T) = P_O(y_O - y_T) = P_O(y_O - y_T, x_T)$$

Vyjádření PO pomocí Gaussova rozdělení:

$$P_O(y - y_O) \approx \exp[-0.5(y - y_O)^T O^{-1}(y - y_O)]$$

$$O = \left\langle (y - y_O)(y - y_O)^T \right\rangle$$

Chyba interpolace

K … interpolační operátor: uzly $\longrightarrow$ stanice

$$y_F = K(x_T)$$

Pokud K není přesný, pak $y_F \neq y_T$ a

$$P(y_1 = y_T / x = x_T) = P_F(y_1 - y_F) = P_F(y_1 - y_F, x_T)$$

Vyjádření PF:

$$P_F(y - y_F) \approx \exp[-0.5(y - y_F)^T F^{-1}(y - y_F)]$$

$$F = \langle (y - K(x_T))(y - K(x_T))^T \rangle$$

Spojení chyby měření a chyby interpolace

Vyjádření pravděpodobnosti P(A):

$$P(A) = \int P(A / B) P(B) db$$

B je jev: parametr má hodnotu od b do b+db

$$P(y = y_O / x = x_T) =$$

$$\int P(y = y_O / x = x_T \,\&\, y_1 = y_T) P(y_1 = y_T / x = x_T) dy_1 =$$

$$\int P_O(y_O - y_T) P_F(y_1 - y_T) dy_1$$

Definice hustot pravděpodobnosti PO, PB a PF:

Chyba předběžného pole:

$$P_B(x - x_B) \approx \exp[-0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B)$$

$$B = \left\langle (x - x_B)(x - x_B)^T \right\rangle$$

Chyba měření:

$$P_O(y - y_O) \approx \exp[-0.5(y - y_O)^T O^{-1}(y - y_O)]$$

$$O = \left\langle (y - y_O)(y - y_O)^T \right\rangle$$

Chyba operátoru K (forward operator):

$$P_F(y - y_F) \approx \exp[-0.5(y - y_F)^T F^{-1}(y - y_F)]$$

$$F = \left\langle (y - K(x_T))(y - K(x_T))^T \right\rangle$$

Shrnutí

Vyjádření PA:

$$P_A(x) = P(x = x_T / y = y_O) \approx P(y = y_O / x = x_T) P(x = x_T)$$

$$P(x = x_T) = P_B(x - x_B)$$

$$P(y = y_O / x = x_T) =$$
$$\int P_O(y_O - y_T) P_F(y_1 - y_T) dy_1 =$$
$$\exp\left[- 0.5(y_O - y_F)^T (O + F)^{-1} (y_O - y_F)\right]$$

$$P_A(x) = \exp[- 0.5(y_O - K(x))^T (O + F)^{-1} (y_O - K(x)) - 0.5(x - x_B)^T B^{-1} (x - x_B)]$$

Definice hustot pravděpodobnosti PO, PB a PF:

Chyba předběžného pole:

$$P_B(x - x_B) \approx \exp[-0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B)$$

$$B = \left\langle (x - x_B)(x - x_B)^T \right\rangle$$

Chyba měření:

$$P_O(y - y_O) \approx \exp[-0.5(y - y_O)^T O^{-1}(y - y_O)]$$

$$O = \left\langle (y - y_O)(y - y_O)^T \right\rangle$$

Chyba operátoru K (forward operátor):

$$P_F(y - y_F) \approx \exp[-0.5(y - y_F)^T F^{-1}(y - y_F)]$$

$$F = \left\langle (y - K(x_T))(y - K(x_T))^T \right\rangle$$

$$P_A(x) = \exp[-0.5(y_O - K(x))^T (O + F)^{-1}(y_O - K(x)) - 0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B)]$$

$$J(x) = \underbrace{0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B)}_{JB(x)} + \underbrace{0.5(y_O - K(x))^T (O + F)^{-1}(y_O - K(x))}_{JO(x)} + J_S(x)$$

B ... kovariance chyb předběžného pole

O+F=R ... kovariance chyb měření (chyba měření + chyba reprezentativnosti)

JS(x) ... hlazení

Metody řešení

$$J(x) = 0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B) + 0.5(y_O - K(x))^T (O + F)^{-1}(y_O - K(x))$$

- K lineární
  - Malý počet uzlových bodů nebo naměřených dat

  ➔ soustava lineárních rovnic

  - Velký počet …

  ➔ iterační metoda minimalizace J(x)
- K nelineární

  ➔ iterační metoda minimalizace J(x)

I. Iterační metoda VAR

Algoritmus:

α ... konstanta

x0 = xB

$$\nabla_x J = B^{-1}(x - x_B) + K_d^T R^{-1}\left[K(x) - y_O\right]$$

$$x^{n+1} = x^n - \alpha \nabla_x J$$

$$x^{VAR} = x^{\infty}$$

II. Metoda bez inverze matice B - VAN

$$v = B^{-1}(x - x_B)$$

$$J(x) = 0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B) + 0.5(y_O - K(x))^T (O + F)^{-1}(y_O - K(x)) =$$
$$0.5 v^T B^T v + 0.5\left[K(Bv + x_B) - y_O\right]^T R^{-1}\left[K(Bv + x_B) - y_O\right]$$

Algoritmus:

$$v^0 = B^{-1}(x_0 - x_B)$$

$$v^0 = 0$$

$$\nabla_v J = B^T\left\{v + K_d^T R^{-1}\left[K(Bv + x_B) - y_O\right]\right\}$$

$$v^{n+1} = v^n - \alpha \nabla_v J$$

$$x^{VAN} = x_B + Bv^{\infty}$$

III. Variační analýza s použitím filtrů - VAF

- Rozměr B ~ 1014
  - Nestačí paměť
  - Je třeba stále počítat prvky matice B při výpočtu gradientu J

- Použití filtru
  - Předpoklad: ekvidistantní síť

- Násobení vektoru maticí – filtrace (prvky matice jsou váhy)

Matice B: $B = \left\{ b_{i,j}, i = 1,\ldots,N, j = 1,\ldots,N \right\}$

$$x_i' = \sum_{j=1}^{N} b_{ij} x_j$$

- Algoritmus

$$v^0 = 0$$

$$\nabla_v J = G^T\left\{v + K_d{}^T R^{-1}\left[K(Gv + x_B) - y_O\right]\right\}$$

$$v^{n+1} = v^n - \alpha \nabla_v J$$

$$x^{VAN} = x_B + Gv^{\infty}$$

G … prostorový filtr

B … kovarianční matice chyb předběžného pole

- struktura: homogenní a izotropní
- tvar: Gaussova funkce

$$b_{ij} = \sigma_B^2 \exp\left[-\left(\frac{r_{ij}}{L} \right)^2 \right]$$

i=1,…,N, j=1,…,N, N=nX*nY

σB … std. odchylka chyby předběžného pole

Definice filtru:

$$x' = Gx$$

IV. Nejlepší lineární nestranný odhad – BLUE (Best linear unbiased estimation)

Gradient ∇XJ se položí 0

$$\nabla_x J = B^{-1}(x - x_B) + K_d^T R^{-1}\left[K(x) - y_O\right] = 0$$

$$K(x + dx) \approx K(x) + K_d dx$$

a řeší se soustava lineárních rovnic:

$$B^{-1}(x - x_B) + K_d^T R^{-1}\left[K(x) - y_O\right] = 0$$

$$x_A = x_B + \left\{BK_d^T R^{-1} K_d + I\right\}^{-1} BK_d^T R^{-1}\left\{y_O - K(x_B)\right\}$$

$$x_A = x_B + BK_d^T R^{-1}\left\{K_d B K_d^T R^{-1} + I\right\}^{-1}\left\{y_O - K(x_B)\right\}$$

$$x_A = x_B + BK_d^T\left\{K_d B K_d^T + R\right\}^{-1}\left\{y_O - K(x_B)\right\}$$

I.

$$x_A = x_B + \{BK_d^T R^{-1} K_d + I\}^{-1} BK_d^T R^{-1}\{y_O - K(x_B)\}$$

Řešení:

$$\underbrace{\{BK_d^T R^{-1} K_d + I\}}_{\text{Dim: NxN (počet uzlů)}} x_A = \{BK_d^T R^{-1} K_d + I\} x_B + BK_d^T R^{-1}\{y_O - K(x_B)\}$$

II.

$$x_A = x_B + BK_d^T R^{-1}\{K_d BK_d^T R^{-1} + I\}^{-1}\{y_O - K(x_B)\}$$

Řešení:

$$\underbrace{\{K_d BK_d^T + R + I\}}_{\text{Dim: MxM (počet stanic)}} z = \{y_O - K(x_B)\} \qquad x_A = x_B + BK_d^T R^{-1} z$$

III.

$$x_A = x_B + BK_d^T\{K_d BK_d^T + R\}^{-1}\{y_O - K(x_B)\}$$

Řešení:

$$\underbrace{\{K_d BK_d^T + R\}}_{\text{Dim: MxM}} z = \{y_O - K(x_B)\} \qquad x_A = x_B + BK_d^T z$$

Odhad chyby:

$$E_A^2 = \langle (x_A - x_T)(x_A - x_T)^T \rangle = B - BK_d^T\{K_d BK_d^T + R\}^{-1} K_d B$$

Optimální interpolace (kovarianční formulace)

$$A_i = B_i + \sum_{k=1}^{n} W_{i,k}\left(O_k - B_k\right)$$

O … naměřená hodnota
B … předběžné pole
A … analýza
T … pravda

$$\left\langle B_k - T_k \right\rangle = \left\langle B_i - T_i \right\rangle = \left\langle O_k - T_k \right\rangle = 0$$

Není systematická chyba

$$A_i - T_i = B_i - T_i + \sum_{k=1}^{n} W_{i,k}\left[\left(O_k - B_k\right)\right]$$

$$\left\langle \left(A_i - T_i\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(B_i - T_i + \sum_{k=1}^{n} W_{i,k}\left[\left(O_k - B_k\right)\right] \right)^2 \right\rangle$$

$$\left\langle \left(A_i - T_i\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(B_i - T_i\right)^2 \right\rangle + 2\sum_{k=1}^{n} W_{i,k}\left\langle \left(O_k - B_k\right)\left(B_i - T_i\right) \right\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} W_{i,k}W_{i,l}\left\langle \left(O_k - B_k\right)\left(O_l - B_l\right) \right\rangle$$

$$\left\langle (A_i - T_i)^2 \right\rangle = \left\langle (B_i - T_i)^2 \right\rangle + 2\sum_{k=1}^{n} W_{i,k} \left\langle (O_k - B_k)(B_i - T_i) \right\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} W_{i,k} W_{i,l} \left\langle (O_k - B_k)(O_l - B_l) \right\rangle$$

$$\left\langle (A_i - T_i)^2 \right\rangle \longrightarrow \min$$

$$\sum_{l=1}^{n} W_{i,l} \left\langle (O_k - B_k)(O_l - B_l) \right\rangle = -\left\langle (O_k - B_k)(B_i - T_i) \right\rangle$$

Úprava pravé strany:

$$-\left\langle (O_k - B_k)(B_i - T_i) \right\rangle = -\left\langle (O_k - T_k)(B_i - T_i) \right\rangle + \left\langle (B_k - T_k)(B_i - T_i) \right\rangle = \boxed{\left\langle (B_k - T_k)(B_i - T_i) \right\rangle}$$

Úprava levé strany:

$$\left\langle (O_k - B_k)(O_l - B_l) \right\rangle = \left\langle (O_k - T_k) - (B_k - T_k) \right\rangle \left\langle (O_l - T_l) - (B_l - T_l) \right\rangle =$$

$$= \left\langle (O_k - T_k)(O_l - T_l) \right\rangle + \left\langle (B_k - T_k)(O_l - T_l) \right\rangle + \left\langle (O_k - T_k)(B_l - T_l) \right\rangle + \left\langle (B_k - T_k)(B_l - T_l) \right\rangle =$$

$$\boxed{= \left\langle (B_k - T_k)(B_l - T_l) \right\rangle + \left\langle (O_k - T_k)(O_l - T_l) \right\rangle}$$

Řeší se soustava rovnic:

$$\sum_{l=1}^{n} W_{i,l}\left\langle (B_k - T_k)(B_l - T_l)\right\rangle + \left\langle (O_k - T_k)(O_i - T_i)\right\rangle = \left\langle (B_k - T_k)(B_i - T_i)\right\rangle$$

$$\left[\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{O}}\right]\underline{W}_i = \underline{B}_i$$

$$A_i = B_i + \sum_{k=1}^{n} W_{i,k}\left(O_k - B_k\right) = B_i + \underline{W}_i^{T}\left(O - B\right)$$

$$\underline{W}_i = \left[\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{O}}\right]^{-1}\underline{B}_i \quad \Rightarrow \quad \underline{W}_i^{T} = \underline{B}_i^{T}\left[\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{O}}\right]^{-1}$$

$$x_A = x_B + BK_d^{T}\left\{K_d B K_d^{T} + R\right\}^{-1}\left\{y_o - K(x_B)\right\} \qquad <--- \quad \text{3DVAR}$$

$$\underline{A}_i = \underline{B}_i + \underline{B}_i^{T}\left[\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{O}}\right]^{-1}\left[\underline{O} - \underline{B}\right] \qquad <--- \quad \text{OI}$$

V. Variační analýza ve fyzikálním prostoru - PSAS

(III.)

$$x_A = x_B + BK_d^T\left\{K_d B K_d^T + R\right\}^{-1}\left\{y_O - K(x_B)\right\}$$

$$(*)\quad \left\{K_d B K_d^T + R\right\} z = \left\{y_O - K(x_B)\right\} \qquad\qquad x_A = x_B + BK_d z$$

Řešení rovnice (*) minimalizací funkcionálu J(z):

$$J(z) = 0.5 z^T \underbrace{(K_d B K_d^T + R)} z - z^T (y_O - K_d x_B)$$

Dim: MxM

- není potřeba invertovat matici
- místo toho se minimalizuje funkcionál v prostoru měření
- násobení matice * vektor je časově náročné
- ekvivalentní jsou řešení (body minim), nikoli mezivýsledky

Numerické řešení (K nelineární) minimalizace funkcionálu:

R … diagonální

$$J(x) = 0.5(y_O - K(x))^T R^{-1}(y_O - K(x)) + 0.5(x - x_B)^T B^{-1}(x - x_B) \rightarrow \min$$

Minimalizace Newtonovou iterační metodou

$$x(k+1) = x(k) - (J'')^{-1} J'$$

$$K_d = K_d(x(k))$$

$$x(k+1) = x(k) + \left\{ B^{-1} + K_d^T R^{-1} K_d \right\}^{-1} \left\{ B^{-1}(x_B - x(k)) + K_d^T R^{-1}(y_O - K(x(k))) \right\}$$

Iterační metody:

a) korekční metoda

$$W = BK_d^T R^{-1} \qquad Q = (I + WK_d)^{-1}$$

$$x(k+1) = x(k) + \left\{ B^{-1} + B^{-1} BK_d^T R^{-1} K_d \right\}^{-1} \left\{ B^{-1}(x_B - x(k)) + B^{-1} BK_d^T R^{-1}(y_O - K(x(k))) \right\} =$$

$$= x(k) + \left\{ B^{-1} + B^{-1} WK_d \right\}^{-1} \left\{ B^{-1}(x_B - x(k)) + B^{-1} W(y_O - K(x(k))) \right\} =$$

$$= x(k) + (I + WK_d)^{-1} BB^{-1}(W(y_O - K(x(k)) + (x_B - x(k)))$$

$$x(k+1) = x(k) + Q^{-1}(W(y_O - K(x(k)) + (x_B - x(k)))$$

Newtonova iterační metoda

$$Qz = (W(y_O - K(x(k))) + Q(x_B - x(k))) \qquad z = \left[x(k+1) - x(k) \right]$$

Způsob řešení

- V každé iteraci je třeba řešit soustavu s N rovnicemi
- Nelze v praxi realizovat
- Nemusí konvergovat
- Proto se používají zjednodušené postupy

Praktická realizace minimalizace:

Aproximace Q :

$$Q = (I + WK_d)^{-1}$$

- W … váhy, dimenze NX x NY
- Q … hustota dat, dimenze NX x NX

$$q_{kk} = \left(\sum_i W_{ki} + 1 \right)^{-1}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{N_X,N_X} \end{bmatrix}$$

Vlastnosti aproximované Q:

- Q diagonální ➔ snadno se invertuje
- i ... měření
- k … uzel

Vlastnosti metody:

- Konverguje pomalu
- Pro malý počet iterací je velká chyba při extrapolaci (daleko od měření)
- qkk závisí na uzlu, a proto dochází k porušení vztahů mezi současně analyzovanými veličinami
- Q normalizace pro uzly
- Pro malý počet iterací lze zanedbat (xB – x(k)). Jinak metoda konverguje k měřením a nebere v úvahu xB

b) modifikovaná korekční metoda

$$x(k+1) = x(k) + QW(y_0 - K(x(k)) + Q(x_B - x(k))$$

$$W = BK_d^T R^{-1}$$

$$Q' = (I + K_d W)^{-1}$$

Vlastnosti:

- W … váhy, dimenze NX x NY
- Q … hustota dat, dimenze NX x NX
- Q’… dimenze NY x NY

$$x(k+1) = x(k) + WQ'(y_0 - K(x(k))) + Q(x_B - x(k)) \qquad (*)$$

Odvození (*):

$$WQ' = QW$$

$$W(I + K_d W)^{-1} = (I + WK_d)^{-1} W$$

$$(I + WK_d)W = W(I + K_d W)$$

$$W + WK_d W = W + WK_d W$$

Aproximace Q’ :

$$q'_{ii} = \left(\sum_k w_{ki} + 1 \right)^{-1}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} q'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q'_{N_Y,N_Y} \end{bmatrix}$$

Vlastnosti aproximované Q’:

- Q diagonální ➔ snadno se invertuje
- i ... měření
- k … uzel

Algoritmus:

$$x(0) = x_b \qquad y(0) = y_0$$

$$x(k+1) = x(k) + WQ'(y(k) - K(x(k)))$$

$$y(k+1) = y(k) - Q(y(k) - K(x(k)))$$

Vlastnosti metody:

- Konverguje
- I pro malý počet iterací zachovává přibližně vztahy mezi současně analyzovanými veličinami
- Q’ normalizace pro měření

Další modifikace iterační metody:

$$x(0) = x_b$$

$$x(k+1) = x(k) + QW(y_0 - K(x(k)) \qquad \text{(a)}$$

$$x(k+1) = x(k) + WQ'(y_0 - K(x(k)) \qquad \text{(b)}$$

Vlastnosti metody:

- Nepoužívá se předběžné pole (pouze na začátku).
- Předběžné pole má vliv pouze pro několik prvních iterací.
- Konverguje k naměřeným hodnotám.
- Je třeba včas ukončit iterování.

Objektivní analýza více proměnných:

- Vztahy mezi proměnnými se využijí při formulaci interpolačního operátoru K,

  K=K(z,u,v)

- Využití geostrofického vztahu
- Využití optimální interpolace (vztah výška, vorticita, divergence)

- Využití nepřímých měření

  - x a y nemusí být stejné veličiny
  - podstatný je vztah   K(x) = y

Optimální (statistická) interpolace (z, u, v)

Použije se Helmholtzův vztah k transformaci proměnných:

ψ … proudová funkce

χ … vektorový potenciál

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$\langle \psi_i \psi_j \rangle^* = E_\psi^{\,2} F(r)$$

$$\langle \chi_i \chi_j \rangle^* = E_\psi^{\,2} G(r)$$

$$\langle \psi_i \chi_j \rangle^* = \langle \chi_i \psi_j \rangle^* = E_\psi E_\chi H(r)$$

$$\langle z_i \psi_j \rangle^* = \langle \psi_i z_j \rangle^* = E_\psi E_z I(r)$$

$$\langle z_i \chi_j \rangle^* = \langle \chi_i z_j \rangle^* = E_\psi E_\chi J(r)$$

$$\langle z_i z_j \rangle^* = E_z^{\,2} K(r)$$

Vztahy:

b … charakteristická délka F

bχ … charakteristická délka G

G = F(r/α) α = bχ/b

H = λF

I = μF

J = λ*F

K = F

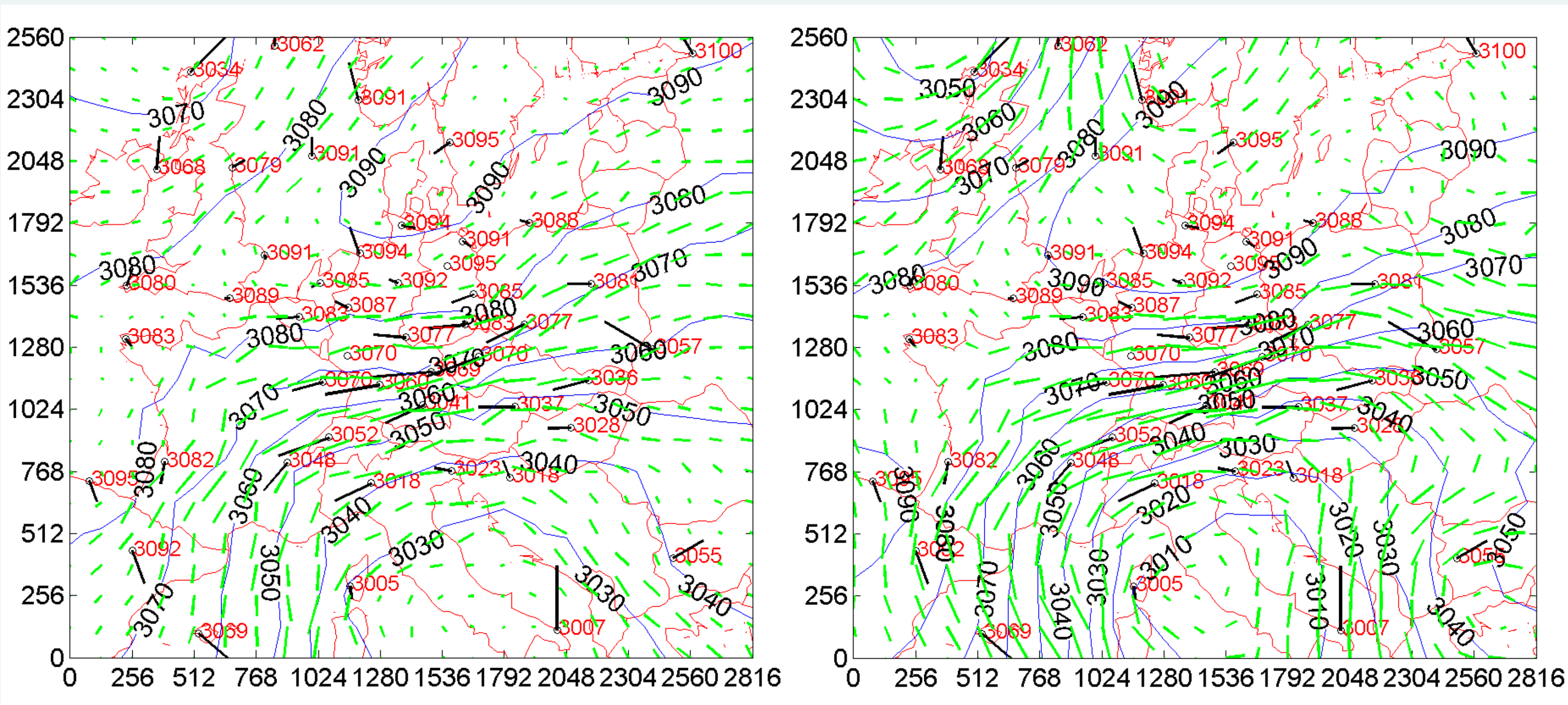
F(r) = exp(-0.5r2)

3D VAR

$(\alpha = 1, \mu = 0, \nu = 0, \lambda = 0, \lambda^* = 0)$

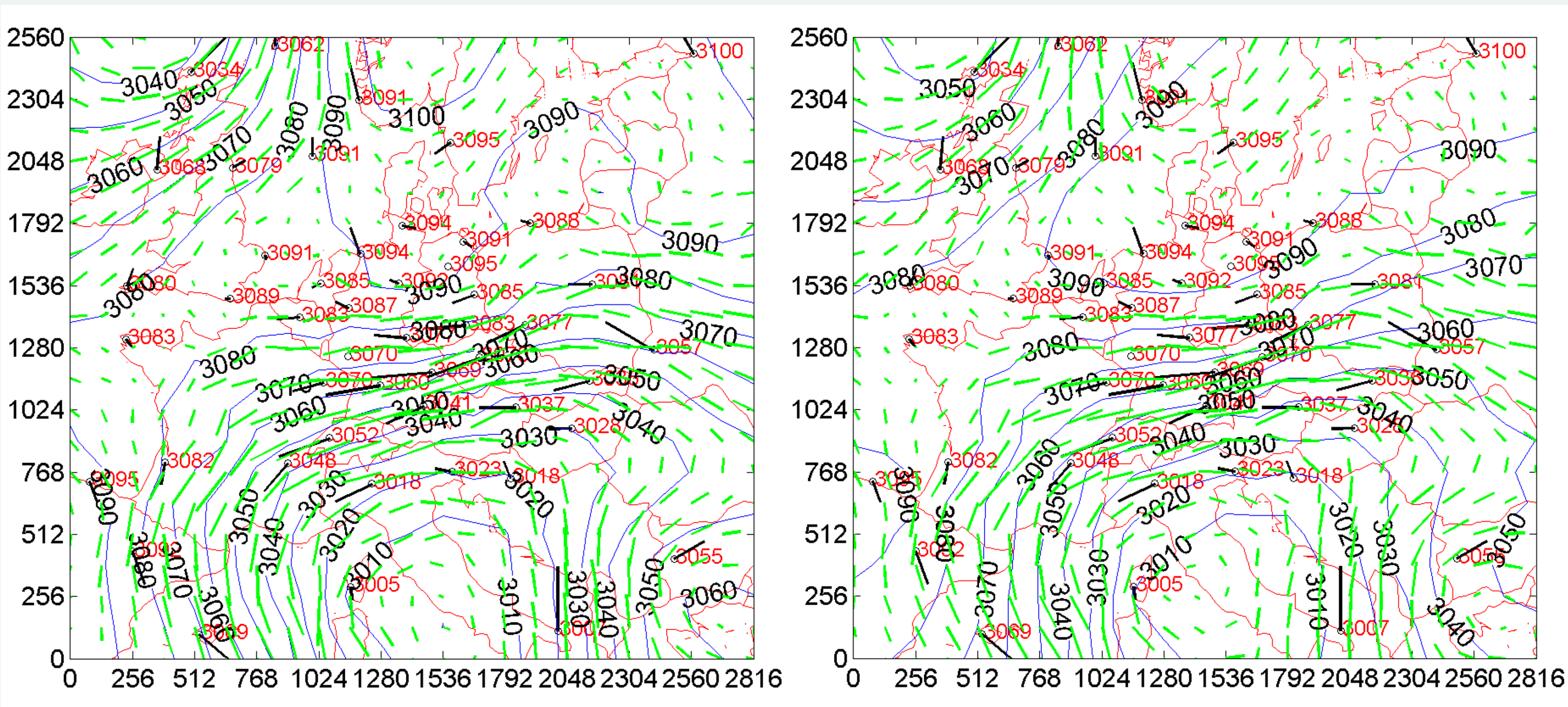
Předběžné pole

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



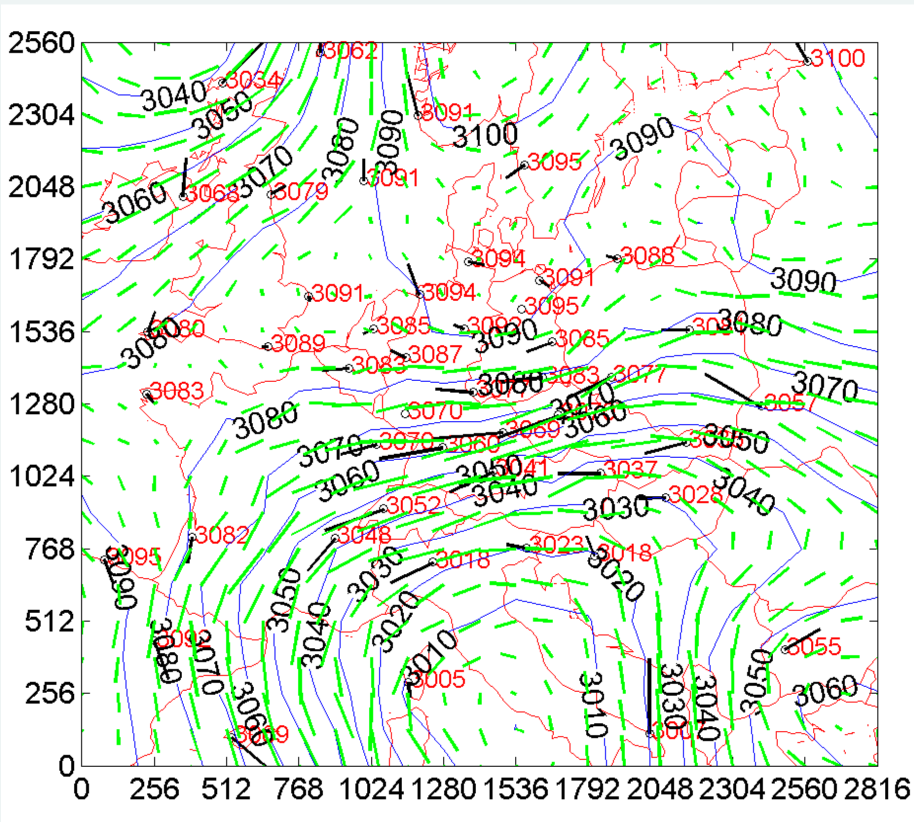
(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0, λ* = 0) (α = 1, μ = 0, ν = 0, λ = 0, λ* = 0)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5) ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



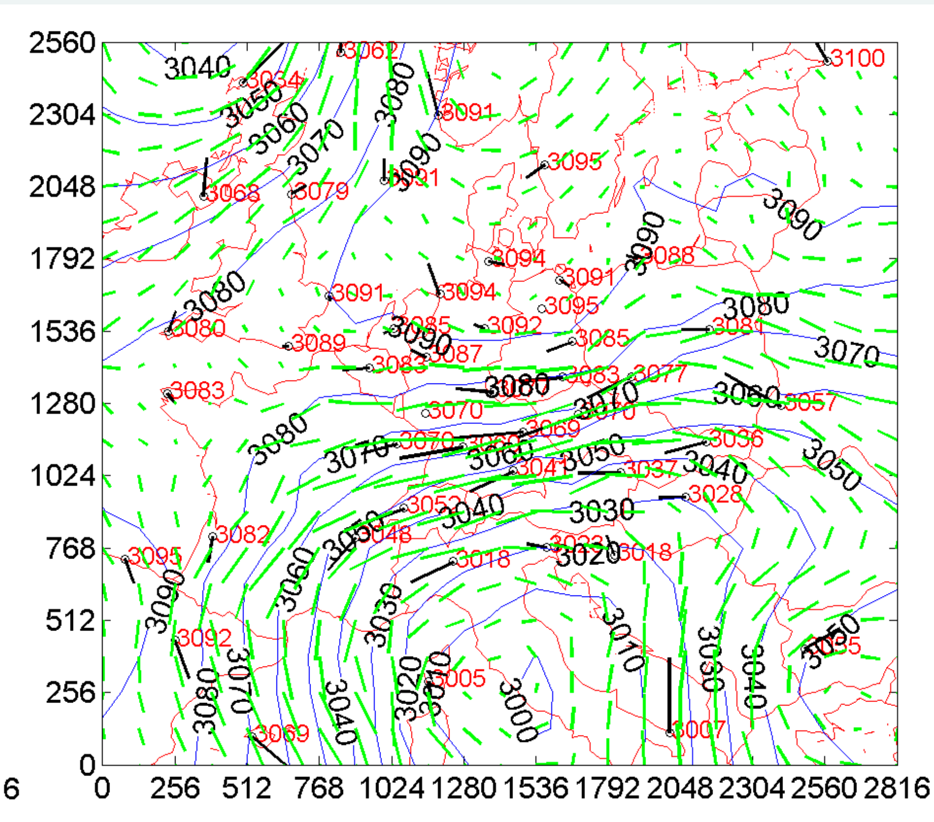
($\alpha = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda^* = 0$)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



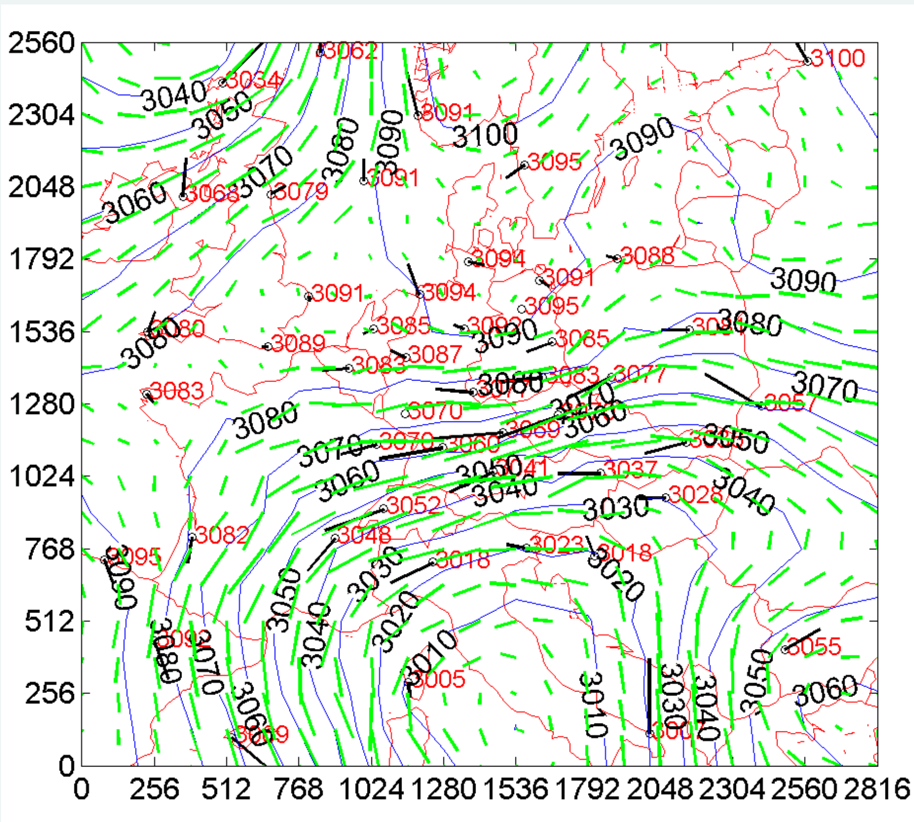
($\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda^* = 0$)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



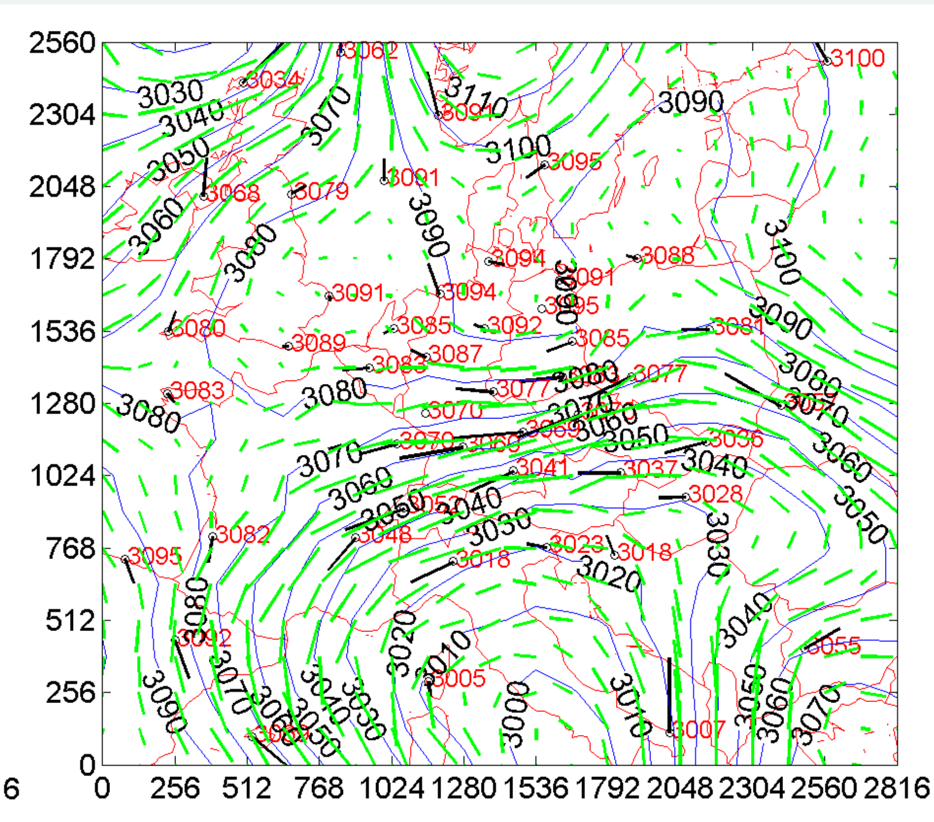
$(\alpha = 1, \mu = 1, \nu = 0, \lambda = 0, \lambda^* = 0)$

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



$(\alpha = 1, \mu = 1, \nu = 0, \lambda = 0, \lambda^* = 0)$

ER(z) = 10, ER(v) = 3, EKOV=(30,5,5)

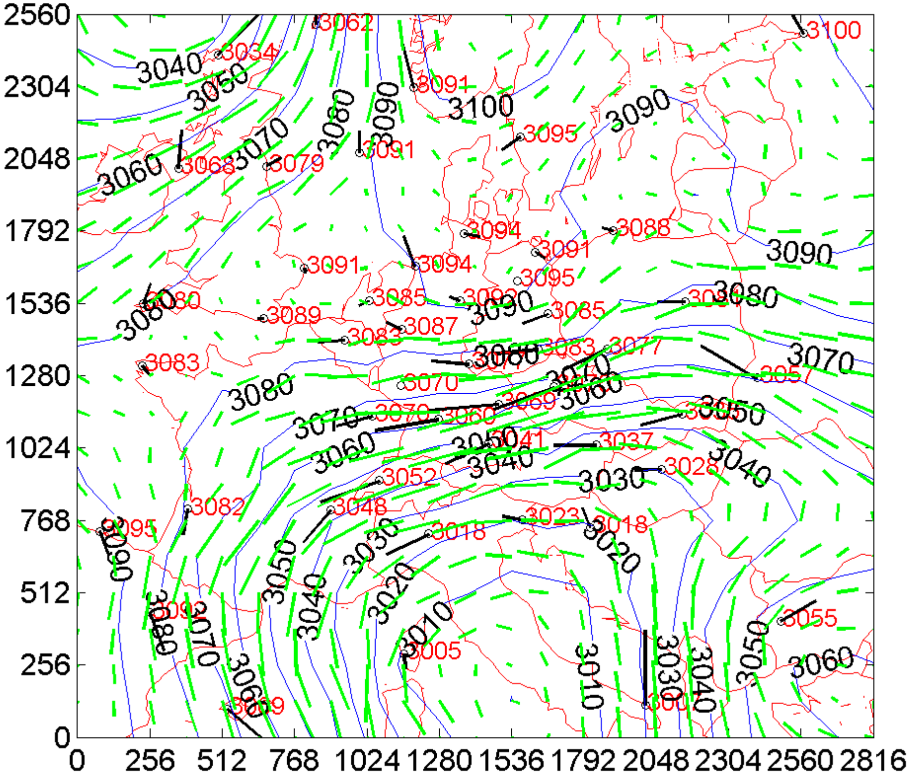


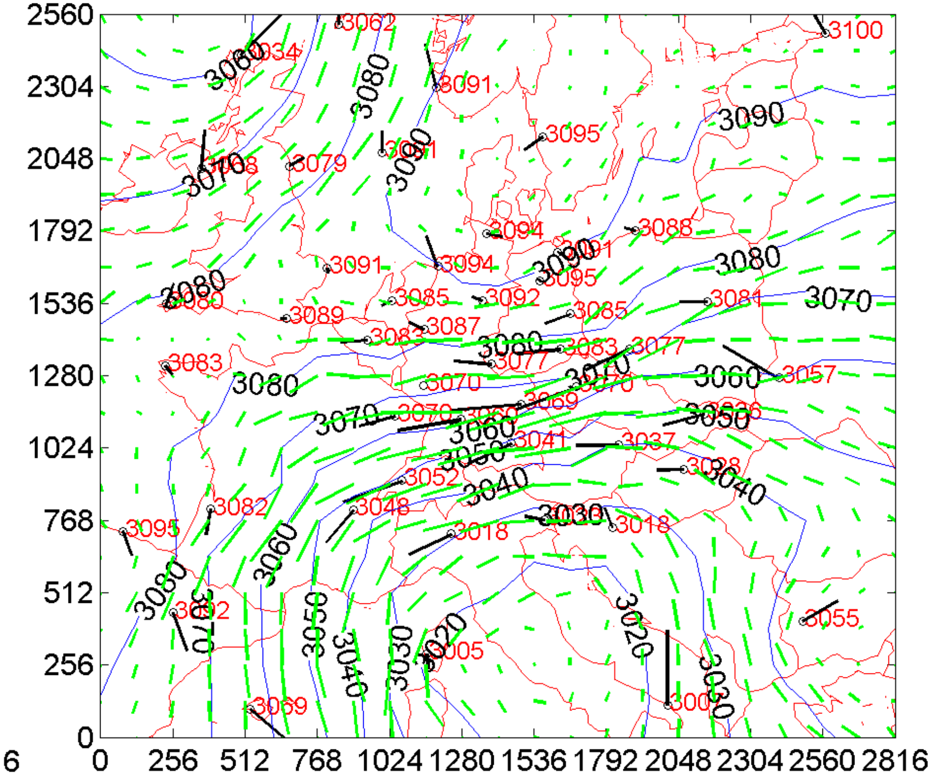
(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0, λ^* = 0, R=500)

(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0, λ^* = 0, R=500)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)

ER(z) = 30, ER(v) = 5, EKOV=(10,2,2)



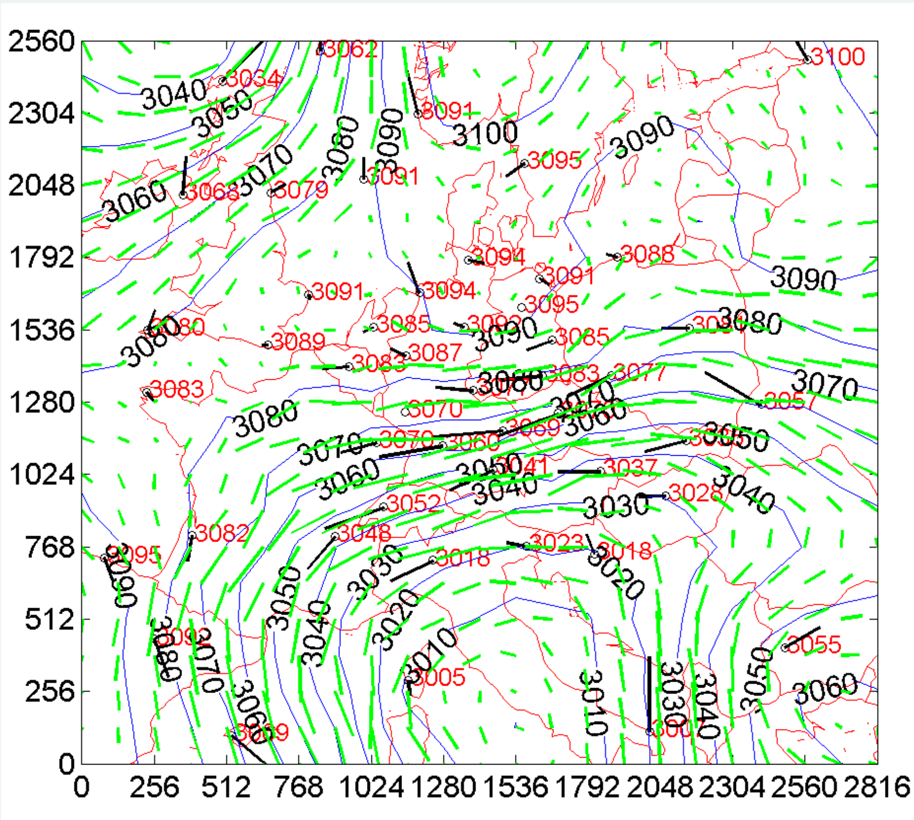


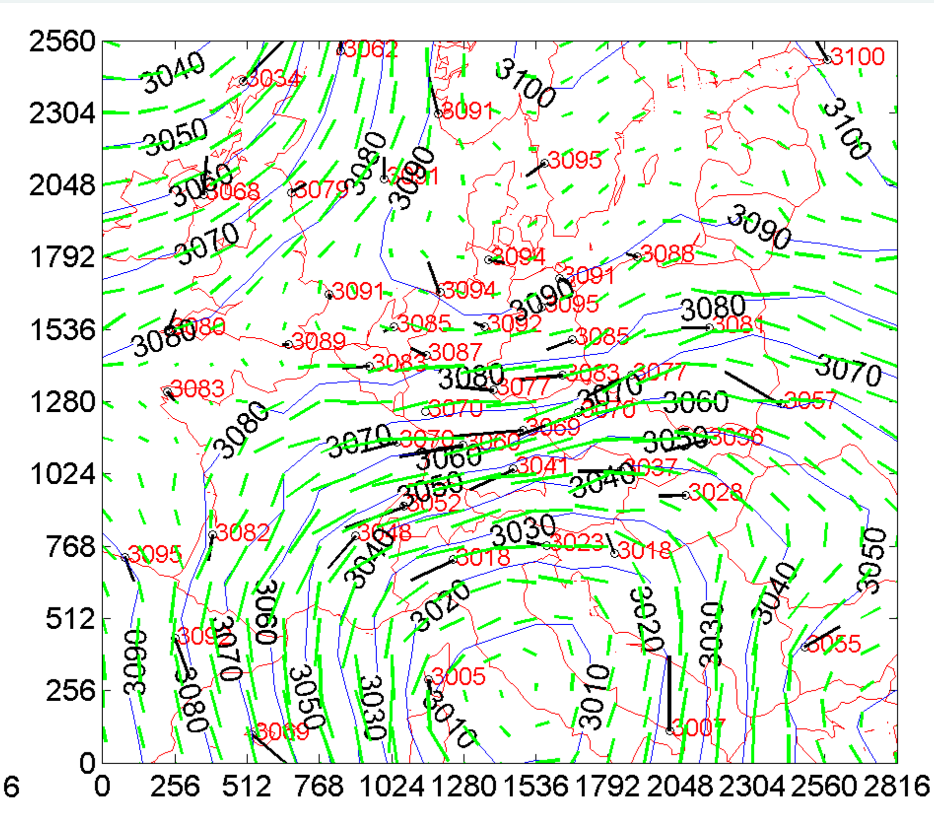
$(\alpha = 1, \mu = 1, \nu = 0, \lambda = 0,$
$\lambda^* = 0, R=500)$

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)

$(\alpha = 1, \mu = 1, \nu = 0, \lambda = 0,$
$\lambda^* = 0, R=700)$

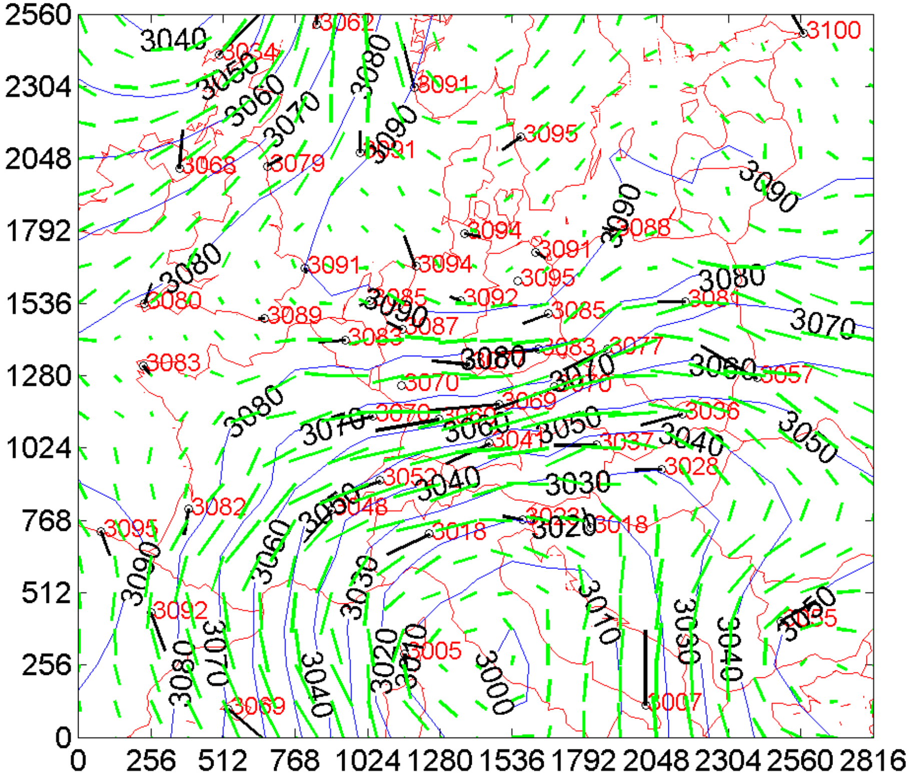
ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,2,2)





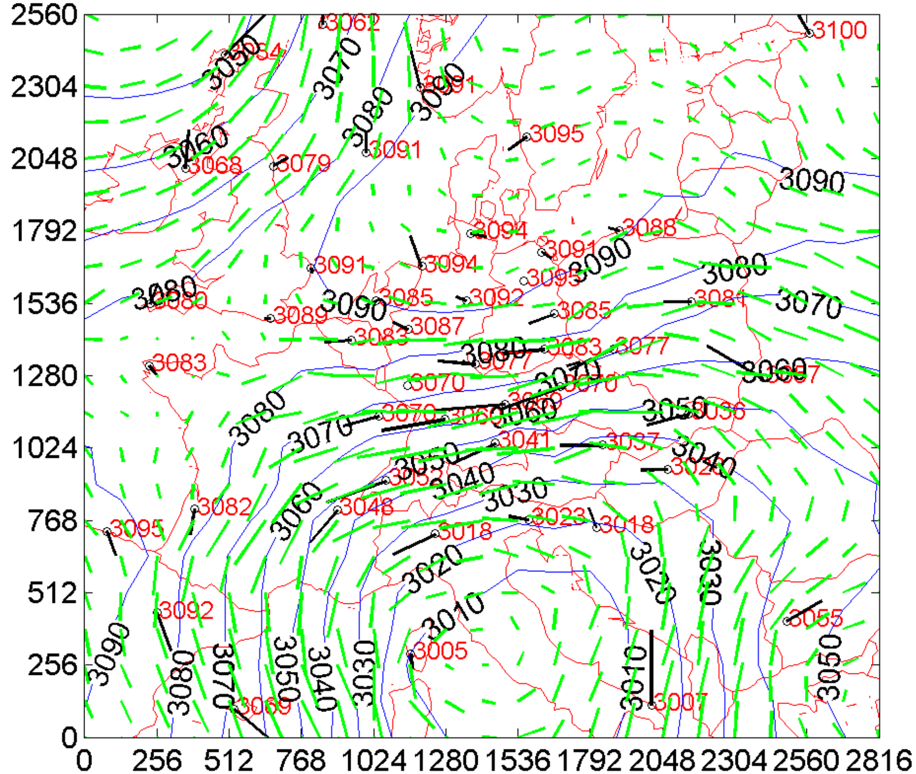
($\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda^* = 0$, R=500)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



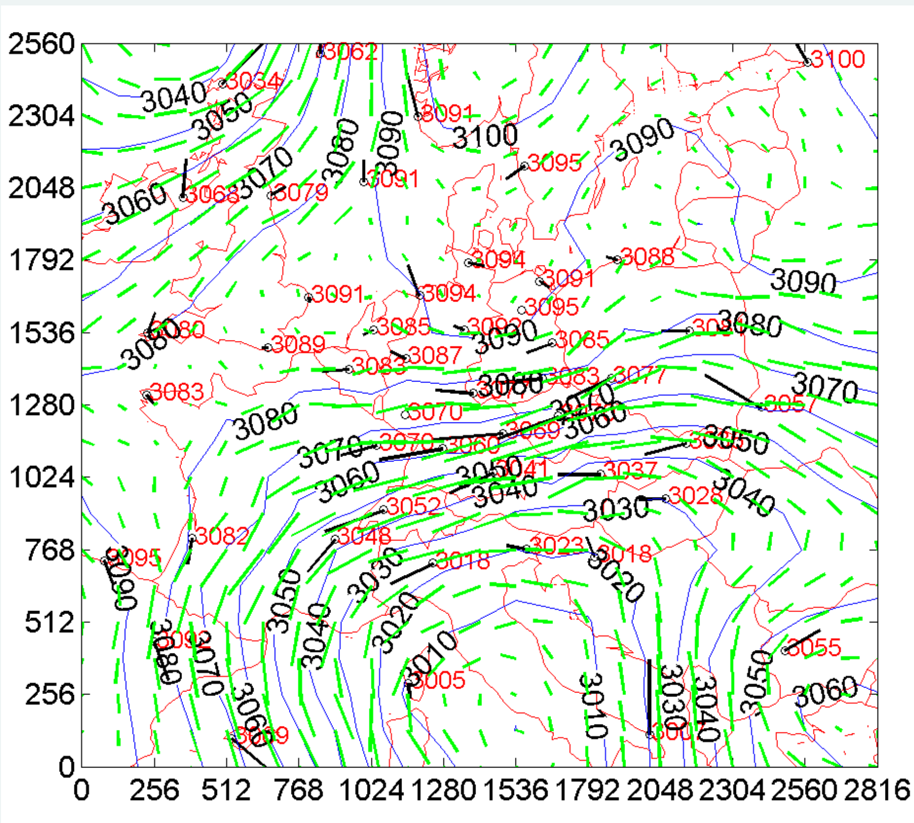
($\alpha = 0.5$, $\mu = 0.5$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda^* = 0$, R=700)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



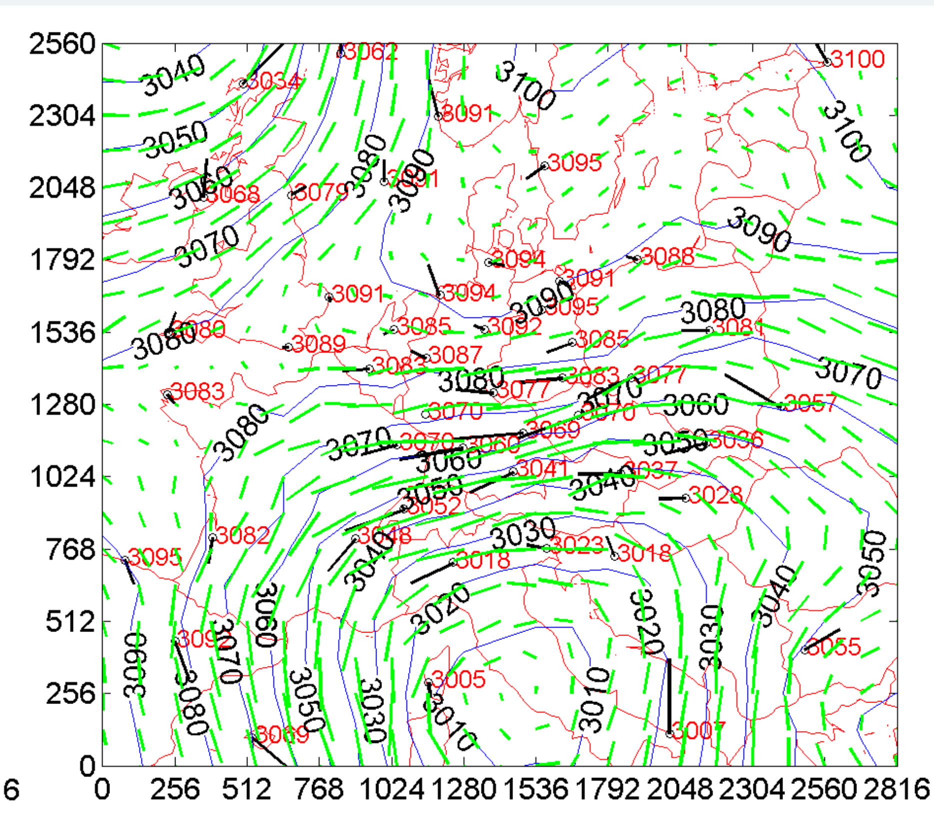
(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0,
λ* = 0, R=500)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



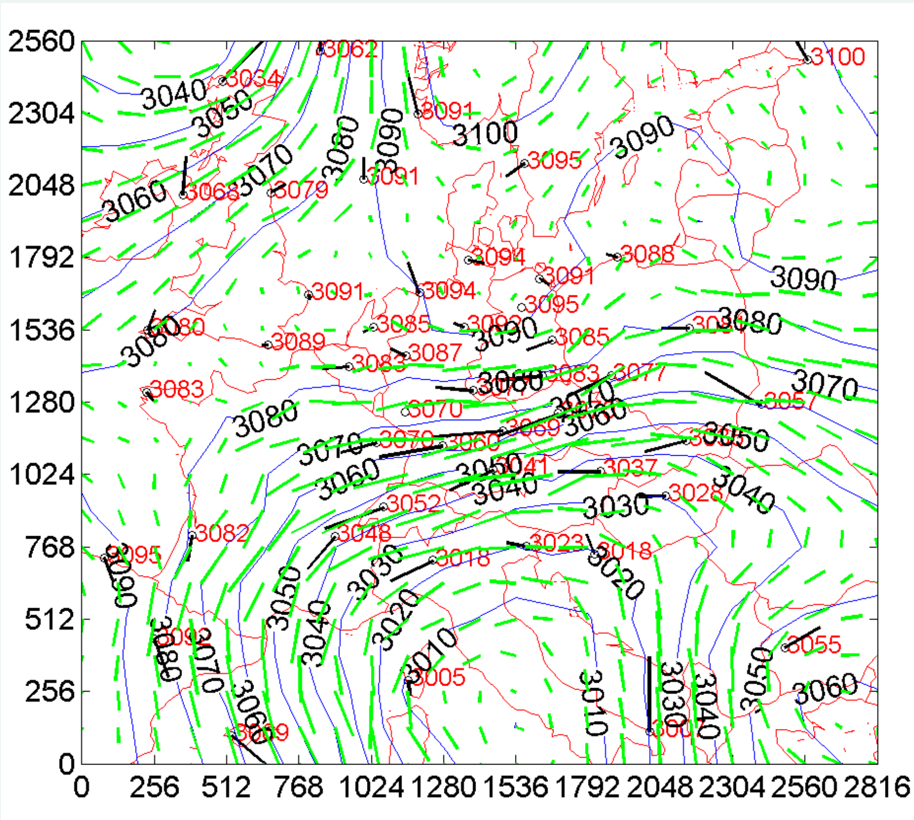
(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0,
λ* = 0, R=700)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,2,2)



(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0,
λ* = 0, R=500)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,5,5)



(α = 1, μ = 1, ν = 0, λ = 0,
λ* = 0, R=900)

ER(z) = 20, ER(v) = 5, EKOV=(30,2,2)