Optimální (statistická) interpolace

- Interpolace v 2D
- Označení:

B - naměřená data

P - předběžné pole

A - výsledek objektivní analýzy

T - skutečnost (pravda)

Odchylky od skutečnosti:

$b = B - T$ … odchylka měření

$p = P - T$ … odchylka předběžného pole

$a = A - T$ … odchylka analýzy

$\langle u \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$ … průměr přes velký počet dat n

Střední kvadratická chyba a relativní kvadratická chyba:

$E_b = \langle b^2 \rangle^{1/2}$ $\beta = b/E_b$ $\varepsilon_b = E_b/E_p$

Předpoklady:

- EP je konstantní, tj. nezávisí na místě
- nejsou systematické chyby, (lze odstranit odečtením)

  Tzn., že pro chyby u, v platí:

  $< u > = 0 \quad a \quad < v > = 0$

$$\mathrm{cov}(u, v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i - < u >\right)\left(v_i - < v >\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

kovariance = skalární součin

- řešení je v lineárním tvaru:

$$A_k = P_k + \sum_{i=1}^{n} v_{ik}(B_i - P_i)$$

Odvození optimální interpolace:

i … místa měření

n … počet měření

k … místo analýzy

wik … (neznámé) váhy

$$A_k = P_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}(B_i - P_i)$$

$$A_k - T_k = P_k - T_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}((B_i - T_i) - (P_i - T_i))$$

$$a_k = p_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}(b_i - p_i)$$

$$E_k^a \frac{a_k}{E_k^a} = E_k^p \frac{p_k}{E_k^p} + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}\left(E_i^b \frac{b_i}{E_i^b} - E_i^p \frac{p_i}{E_i^p}\right)$$

$$E_k^a \alpha_k = E_k^p \Pi_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}(E_i^b \beta_i - E_i^p \Pi_i)$$

$$\alpha_k \varepsilon_k^a = \Pi_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}(\beta_i \varepsilon_i^b - \Pi_i)$$

úpravy

Vyjádření chyby:

$$\alpha_k \varepsilon_k^a = \Pi_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}\left(\beta_i \varepsilon_i^b - \Pi_i\right)$$

OI minimalizuje chybu: $\left(\varepsilon_k^a\right)^2$

$$\left\langle \alpha_k \varepsilon_k^a \alpha_k \varepsilon_k^a \right\rangle = \left(\varepsilon_k^a\right)^2 \xrightarrow{w_{ik}} \min$$

$$\left(\varepsilon_k^a\right)^2 = \left(\Pi_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}\left(\beta_i \varepsilon_i^b - \Pi_i\right)\right)^2 =$$

$$= 1 + 2\sum_{i=1}^{n} w_{ik}\left(\left\langle \Pi_k \beta_i \right\rangle \varepsilon_i^b - \left\langle \Pi_k \Pi_i \right\rangle\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\{ w_{ik} w_{jk}\left(\left\langle \Pi_i \Pi_j \right\rangle + \varepsilon_i^b \left\langle \beta_i \beta_j \right\rangle \varepsilon_j^b - \varepsilon_i^b \left\langle \beta_i \Pi_j \right\rangle - \left\langle \Pi_i \beta_j \right\rangle \varepsilon_j^b \right)\right\}$$

$$(\varepsilon_k^a)^2 = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} w_{ik}\left(\langle \Pi_k \beta_i \rangle \varepsilon_i^b - \langle \Pi_k \Pi_i \rangle\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{ w_{ik} w_{jk}\left(\langle \Pi_i \Pi_j \rangle + \varepsilon_i^b \langle \beta_i \beta_j \rangle \varepsilon_j^b - \varepsilon_i^b \langle \beta_i \Pi_j \rangle - \langle \Pi_i \beta_j \rangle \varepsilon_j^b\right)\right\}$$

Označení:

wk = { wik }, i=1,…,n

hk = { < ΠkΠi > + < Πkβi > εib }, i=1,…,n,

M = { < ΠiΠj > + εib < βiβj > εjb + εib < βiΠj > - εjb < Πiβi > }, i=1,…,n, j=1,…,n

$$(\varepsilon_k^a)^2 = 1 - 2\mathbf{w}_k^T \mathbf{h}_k + \mathbf{w}_k^T \mathbf{M} \mathbf{w}_k$$

Minimalizace chyby:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_k}(\varepsilon_k^a)^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{w}_k = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}_k \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{M}\mathbf{w}_k = \mathbf{h}_k$$

Chyba: $(\varepsilon_k^a)^2 = 1 - \mathbf{h}_k^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}_k = 1 - \mathbf{h}_k^T w_k$

Vyjádření korelací chyb

- korelace - chyba předběžného pole x chyba měření

$< \Pi k \beta i > = 0 \quad \Rightarrow$

$\mathbf{h}k = \{ < \Pi k \Pi i > \}, \quad i=1,\ldots,n,$

- korelace – chyba měření x chyba měření

$< \beta i \beta j > = 0 \qquad \text{pro } \; i \neq j,$

$< \beta i \beta j > = (\varepsilon ib)2 \quad \text{pro } \; i = j$

$\mathbf{M} = \{ < \Pi i \Pi j > \} + (\varepsilon ib)2 \; I, \quad i=1,\ldots,n, \; j=1,\ldots,n$

Realizace OI

- **Modelování statistických vztahů:**
  1. Jak určit < ΠiΠj > ?
  2. Existuje M-1 ?
  3. Jak určit εib ?

- **Algoritmus výpočtu:**
  1. Jaký algoritmus výpočtu použít ?
  2. Co to je „super-observations“ ?

1. Jak určit < ΠiΠj > ?

$$\langle \Pi_i \Pi_j \rangle E_i^p E_j^p =$$

$$= \langle (P_i - T_i)(P_j - T_j) \rangle =$$

$$= \langle [(P_i - B_i) - (T_i - B_i)][(P_j - B_j) - (T_j - B_j)] \rangle =$$

$$= \langle (P_i - B_i)(P_j - B_j) - (T_i - B_i)(P_j - B_j) - (P_i - B_i)(T_j - B_j) + (T_i - B_i)(T_j - B_j) \rangle =$$

$$= \langle (P_i - B_i)(P_j - B_j) \rangle$$

$$\langle \Pi_i \Pi_j \rangle = \langle (P_i - B_i)(P_j - B_j) \rangle / E_i^p E_j^p$$ pro i≠j

2. Existuje M-1 ?

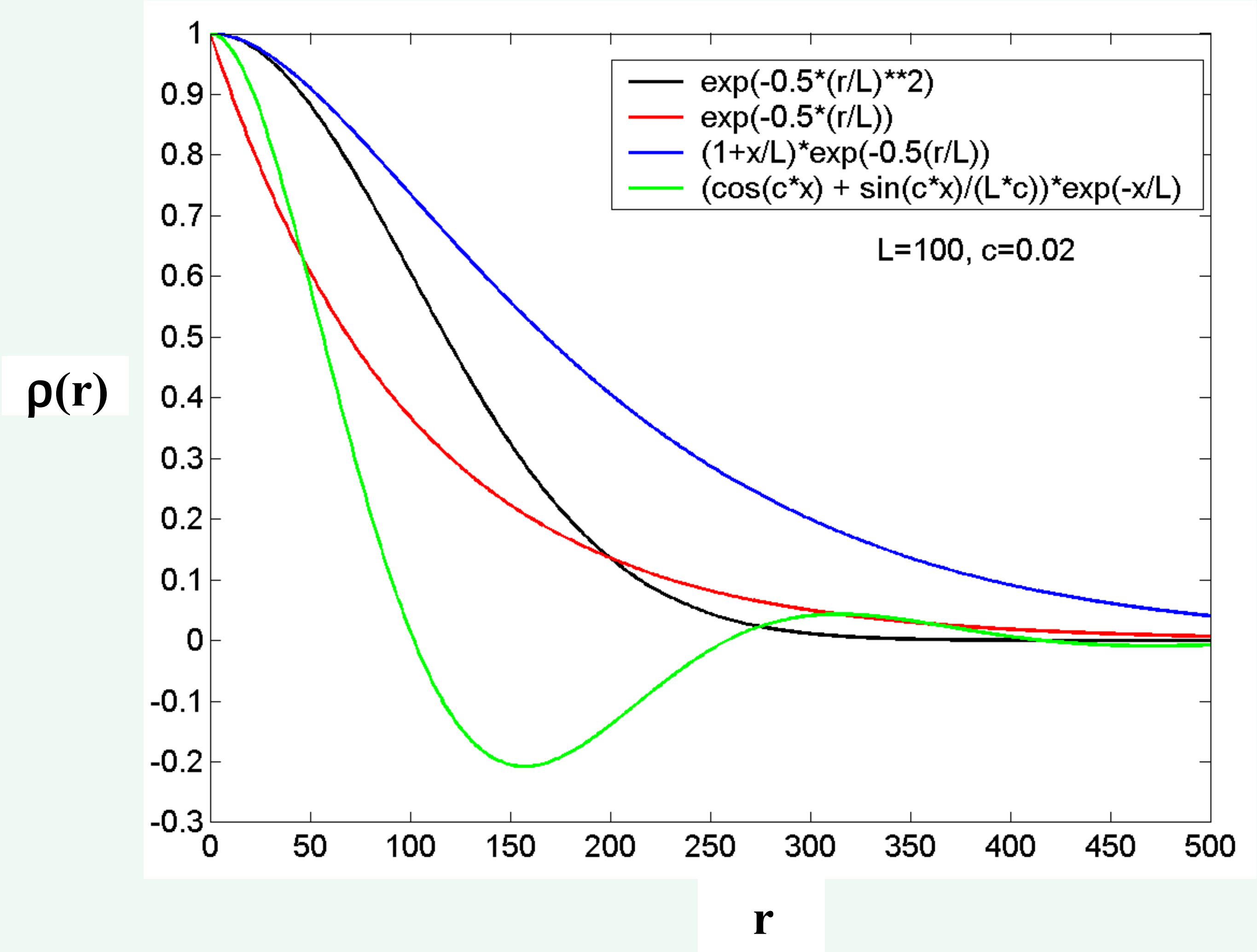
a) $$\rho(r) = \exp\left(\frac{-r^2}{2L^2}\right)$$

b) $$\rho(r) = \exp\left(\frac{-r}{L}\right)$$

c) $$\rho(r) = \left(1 + \frac{r}{L}\right)\exp\left(\frac{-r}{L}\right)$$

d) $$\rho(r) = \left(\cos(cr) + \frac{\sin(cr)}{Lc}\right)\exp\left(\frac{-r}{L}\right)$$

Analytické vyjádření korelačních závislostí - ρ(r)



3. Jak určit εib ?

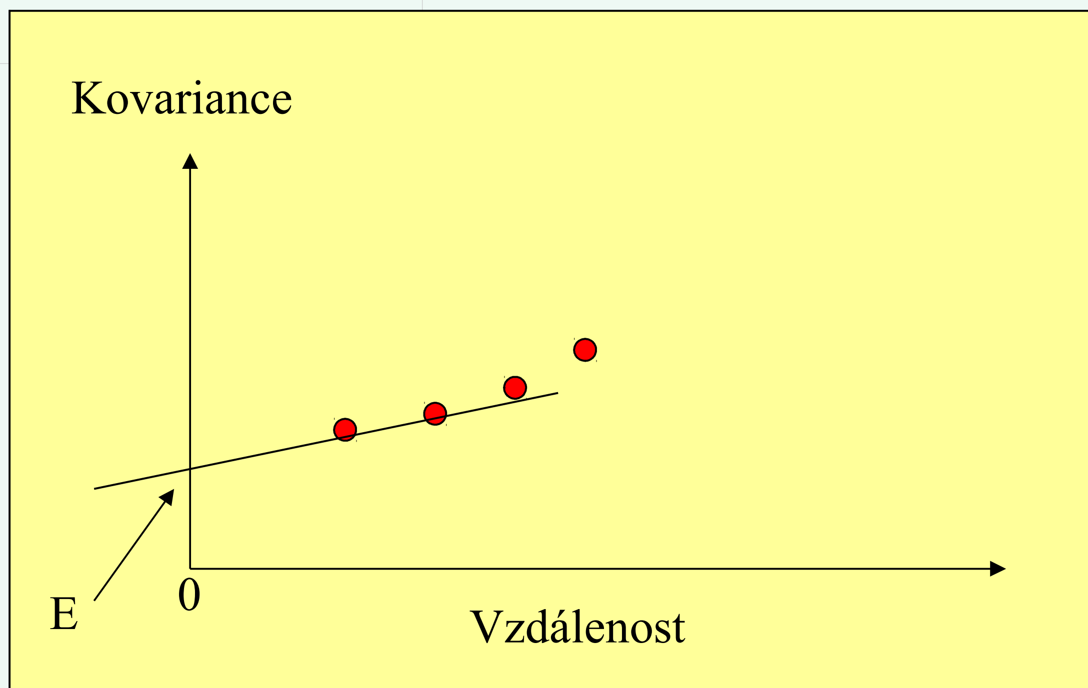
$$\left\langle \left(B_i - T_i\right)\left(B_j - T_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(B_i - \left\langle B_i\right\rangle + \left\langle B_i\right\rangle - T_i\right)\left(B_j - \left\langle B_j\right\rangle + \left\langle B_j\right\rangle - T_j\right)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(B_i - \left\langle B_i\right\rangle\right)\left(B_j - \left\langle B_j\right\rangle\right)\right\rangle + \left\langle \left(\left\langle B_i\right\rangle - T_i\right)\left(B_j - \left\langle B_j\right\rangle\right)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \left(B_i - \left\langle B_i\right\rangle\right)\left(B_j - \left\langle T_j\right\rangle\right)\right) + \left(B_i - \left\langle T_i\right\rangle\right)\left(B_j - \left\langle T_j\right\rangle\right)\right\rangle$$

$$= \left\langle \left(B_i - \left\langle B_i\right\rangle\right)\left(B_j - \left\langle B_j\right\rangle\right)\right\rangle$$



Jaký algoritmus výpočtu použít ?

$$r_k = \sum_{i=1}^{n} w_{ik} q_i = \mathbf{w}_k^T \mathbf{q}$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}_k$$

$$r_k = \mathbf{h}_k^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{h}_k^T \mathbf{s}$$,

kde $s = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{q}$ t.j $\mathbf{M} s = \mathbf{q}$

Označení:

$$A_k = P_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik} (B_i - P_i)$$

$$\left(A_k - P_k\right) / E_k^p = \sum_{i=1}^{n} w_{ik} (B_i - P_i) / E_k^p$$

$$r_k = \left(A_k - P_k\right) / E_k^p$$

$$q_i = (B_i - P_i) / E_i^p$$

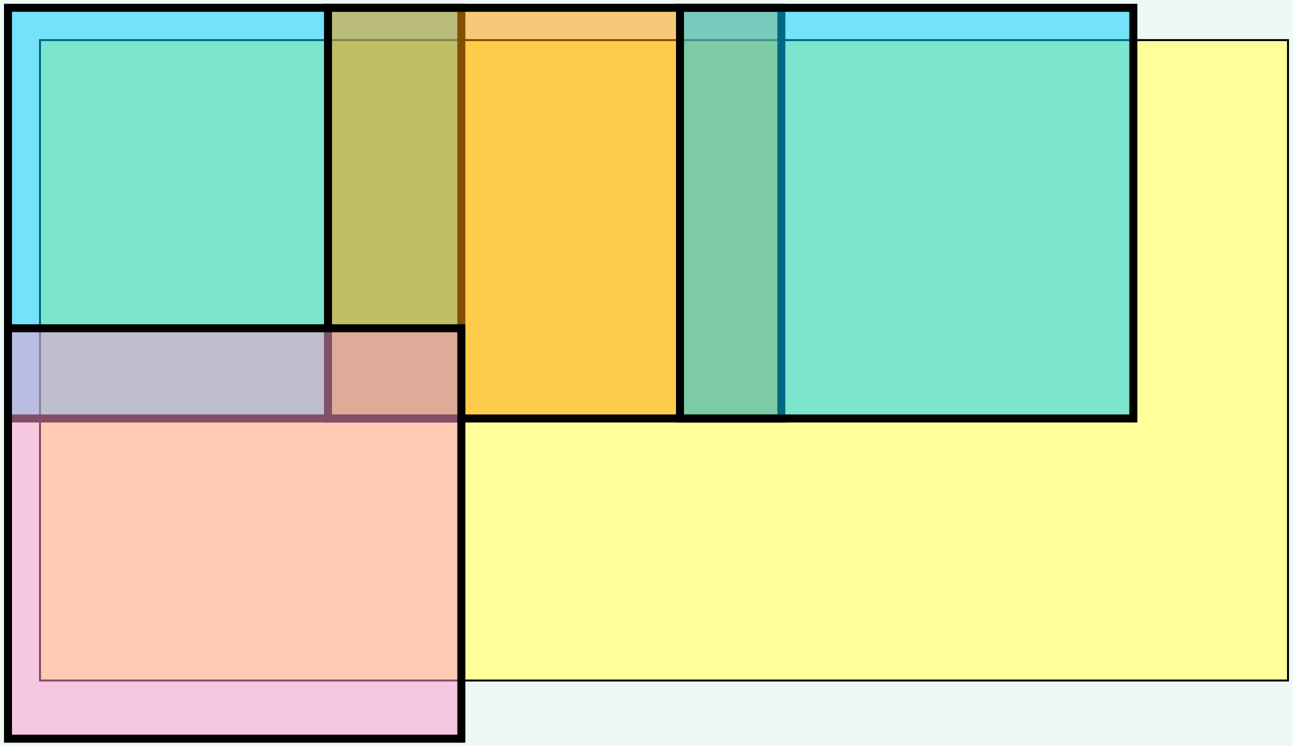
Algoritmus:

1. Sestaví se: **M** (závisí na poloze stanic, nezávisí na uzlu)
2. Vypočte se **q**
3. Vyřeší se soustava rovnic, tj. vypočte se **s** : $\mathbf{M} s = \mathbf{q}$
4. Pro uzlové body, k, se vypočte: **hk**, rk, Ak, $\left({}_k^a\right)^2$

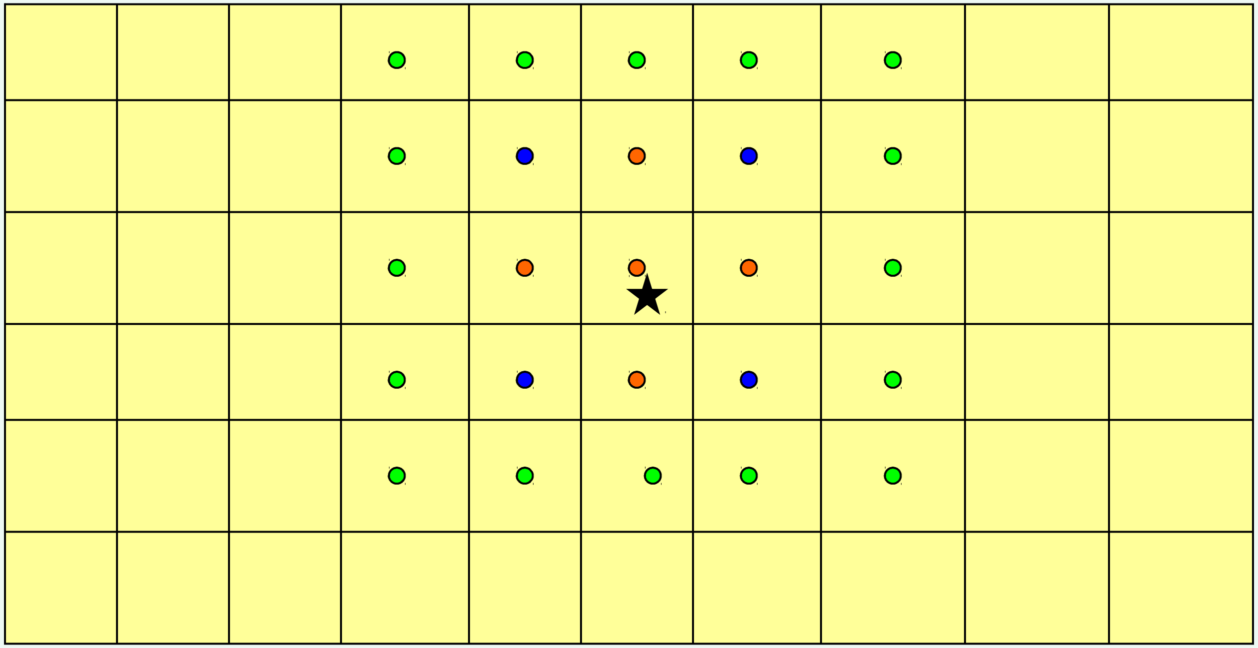
$$r_k = \mathbf{h}_k^T \mathbf{s} \qquad A_k = P_k + r_k E_k^p$$

Výběr naměřených dat:

Rozdělení oblasti na podoblasti s překrytím



Výběr naměřených dat: rozdělení oblasti na podoblasti



“Super observations”

- Pokud je několik měření blízko u sebe, potom korelace chyb předběžného pole mezi místy odpovídajícími těmto měřením jsou blízko 1 $\langle \Pi_i \Pi_j \rangle = \rho(r_{i,j}) \approx 1$

  pro $r \sim 0$.

  Proto prvky matice M jsou $m_{i,j} \sim 1$ a mohou vést k tomu, že matice M je téměř singulární.
- Co s tím?
  - Blízká data se spojí do jednoho měření
  - Upraví se přesnost měření
  - Použije se jedno měření v OI

Spojení “Super observations”

- Měření Bk , k=1,…,n
- Chyba měření σk , k=1,…,n

$$A = a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_nB_n \qquad a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$$

$$\begin{aligned} E\left[(A - T)^2\right] &= E\left[(a_1B_1 + a_2B_2 + \dots + a_nB_n - T)^2\right] = \\ &= E\left[\left(a_1(B_1 - T) + a_2(B_2 - T) + \dots + a_n(B_n - T)\right)^2\right] = \\ &= E\left[(a_1(B_1 - T))^2\right] + \dots + E\left[(a_n(B_n - T))^2\right] \\ &+ \dots + E\left[a_ia_j(B_i - T)(B_j - T)\right] \end{aligned}$$

Spojení dvou měření

Zadání problému:

- Jsou dána dvě měření teploty v jenom místě   T1, T2
- $T1 = Tt + \varepsilon 1$
- $T2 = Tt + \varepsilon 2$
- $\varepsilon 1, \varepsilon 2$ … chyba měření:

$E(\varepsilon 12) = \sigma 12$, $E(\varepsilon 22) = \sigma 22$,   … velikost chyby

$E(\varepsilon 1) = 0$, $E(\varepsilon 2) = 0$,   … není systematická chyba

$E(\varepsilon 1 \varepsilon 2) = 0$ … nezávislé chyby

Jak odhadnout správnou teplotu Tt   (Ta … odhad) ?

Výchozí předpoklady:

- Lineární kombinace

$$T_a = a_1 T_1 + a_2 T_2$$

- Bez systematické chyby (T1, T2 nemají systematickou chybu)

$$a_1 + a_2 = 1$$

- Minimalizace kvadratické chyby

$$\sigma_a^2 = E\left[(T_a - T_t)^2\right] = E\left[\left(a_1(T_1 - T_t) + a_2(T_2 - T_t)\right)^2\right]$$

Nalezení optimálních váh:

$$F(a_1) = \sigma_a^2 = E\left[\left(T_a - T_t\right)^2\right] = E\left[\left(a_1\left(T_1 - T_t\right) + (1 - a_1)\left(T_2 - T_t\right)\right)^2\right] \longrightarrow \min$$

Řešení:

$$a_1 = \frac{1/\sigma_1^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2} \qquad a_2 = \frac{1/\sigma_2^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2}$$

Chyba odhadu:

$$\frac{1}{\sigma_a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

Vytvoření vertikálního profilu z přízemních měření

Podmínka: vertikální hodnoty jsou nezávislé na předběžném poli

- Dáno:

  P1, P2 … předběžné pole
  B1 … naměřená hodnota

- Úkol:

  Vypočítat A2 (analyzovaná hodnota) tak, aby:
  <α2Π2> = 0
  Potom B2 = A2 a lze B2 použít při OI hladiny P2.

Řešení:

$\alpha_k \varepsilon_k^a = \Pi_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik} (\beta_i \varepsilon_i^b - \Pi_i)$ za podmínky: $\langle \alpha_k \Pi_k \rangle = 0$

$$\left\langle \alpha_k \varepsilon_k^a \Pi_k \right\rangle = \left\langle \Pi_k \Pi_k \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{n} w_{ik} (\beta_i \varepsilon_i^b - \Pi_i) \Pi_k \right\rangle = 0$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} w_{ik} \left\langle \beta_i \varepsilon_i^b \Pi_k \right\rangle - w_{ik} \left\langle \Pi_k \Pi_i \right\rangle =$$

$$1 - \sum_{i=1}^{n} w_{ik} \left\langle \Pi_k \Pi_i \right\rangle = 0$$

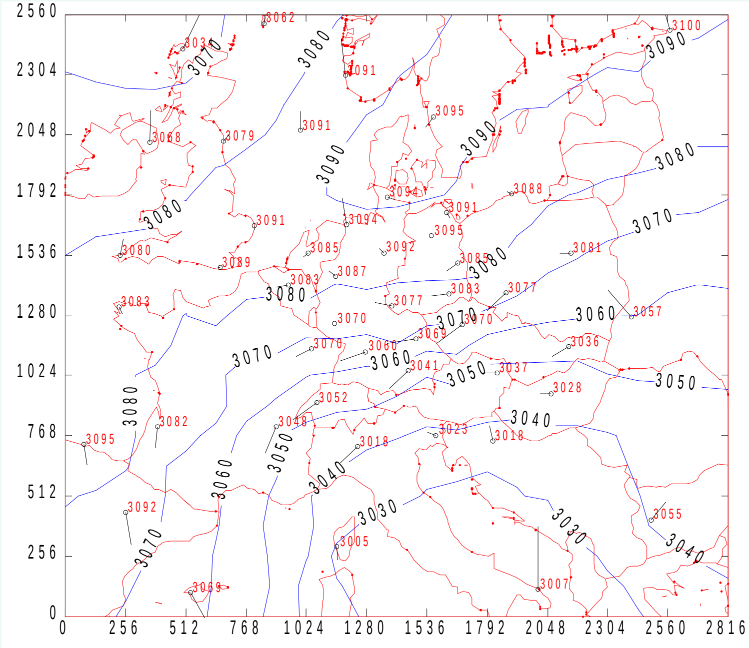
tj. podmínka: $\mathbf{w}_k^T \mathbf{h}_k = 1$

Podmíněná minimalizace:

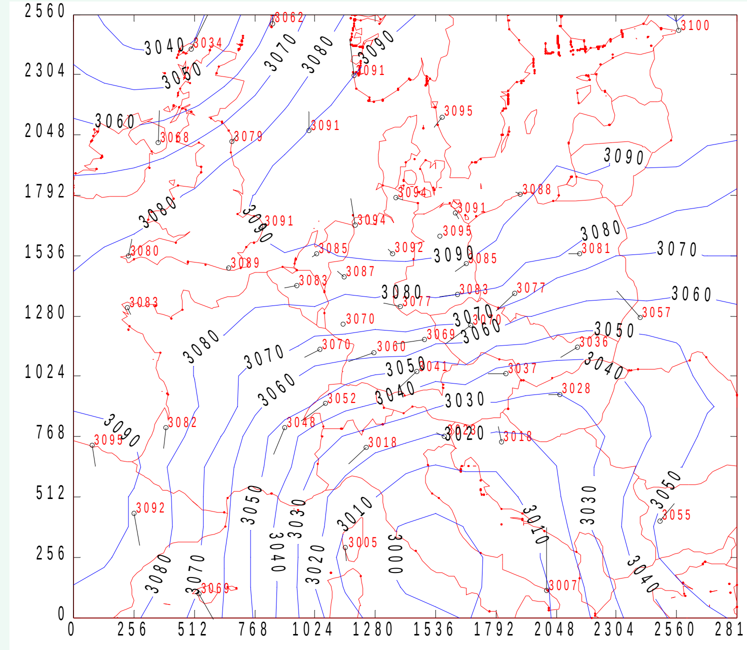
$$\theta(w) = 1 - 2\mathbf{w}_k^T \mathbf{h}_k + \mathbf{w}_k^T \mathbf{M} \mathbf{w}_k + 2\lambda \left(\mathbf{w}_k^T \mathbf{h}_k - 1 \right) \longrightarrow \min$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad \begin{bmatrix} M & h \\ h^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odhad



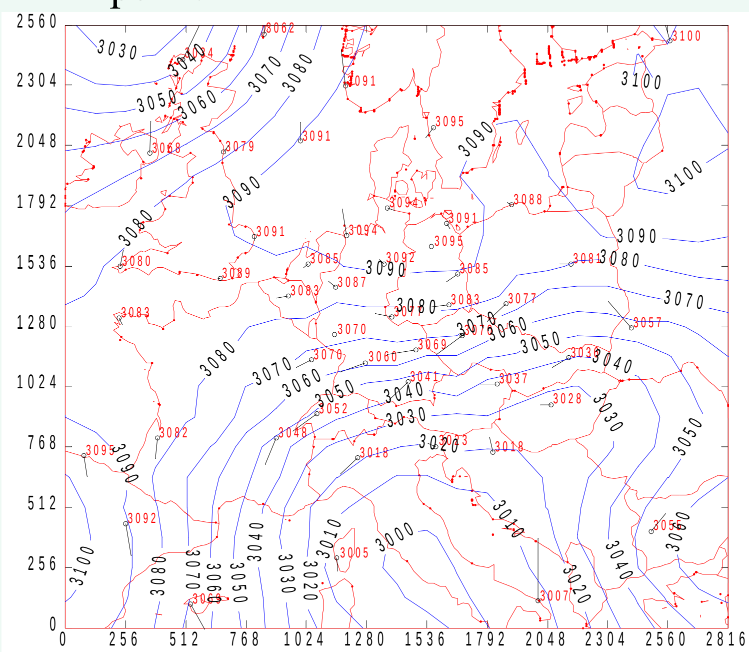
Eps=0.1 R=500



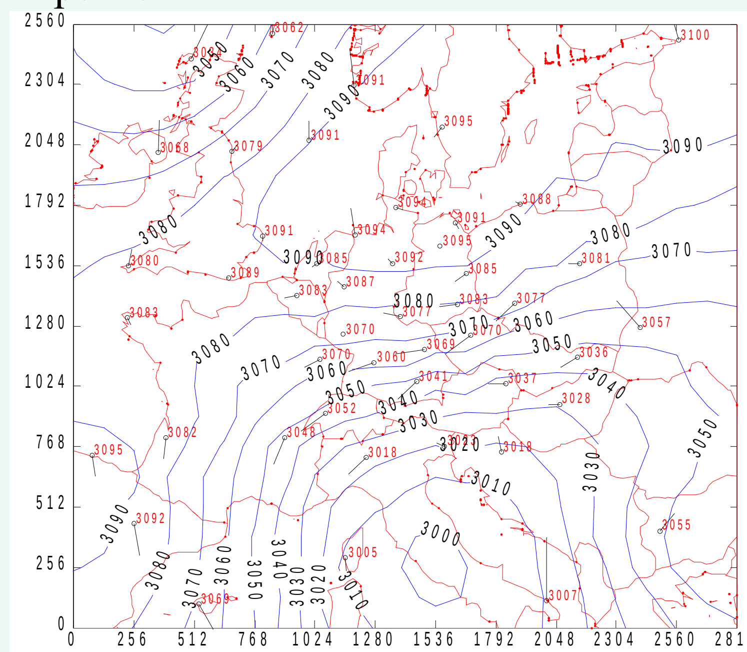
OI 1D

$$\rho(r) = \exp\left(\frac{-r^2}{2R^2}\right)$$

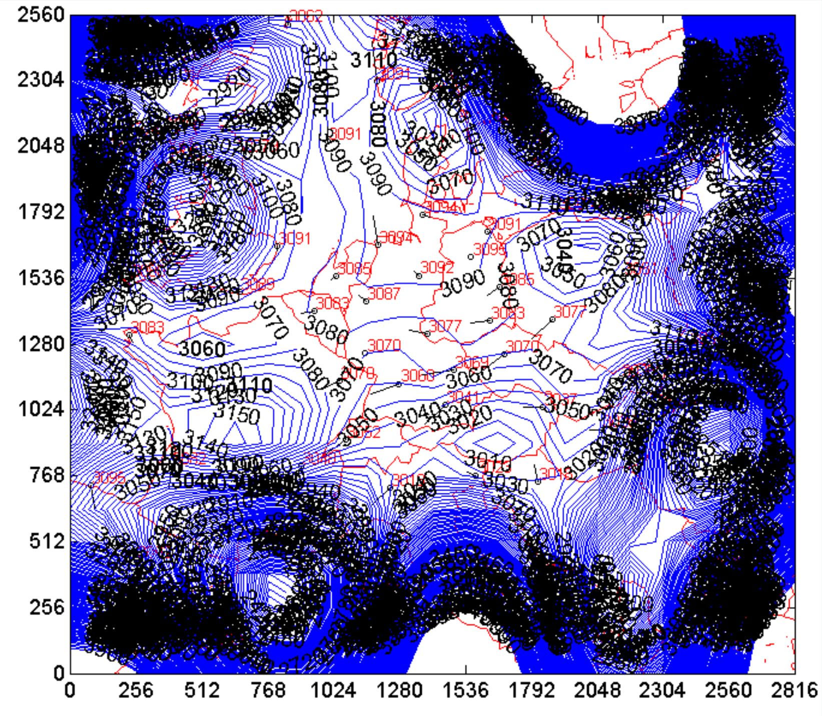
Eps=0.01 R=500



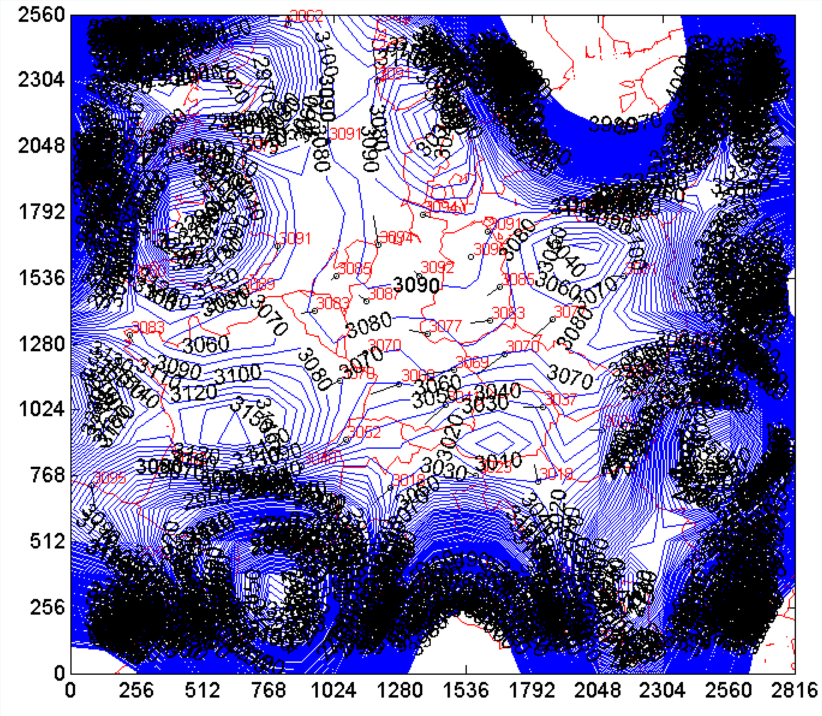
Eps=0.2 R=500



Eps=0 R=500

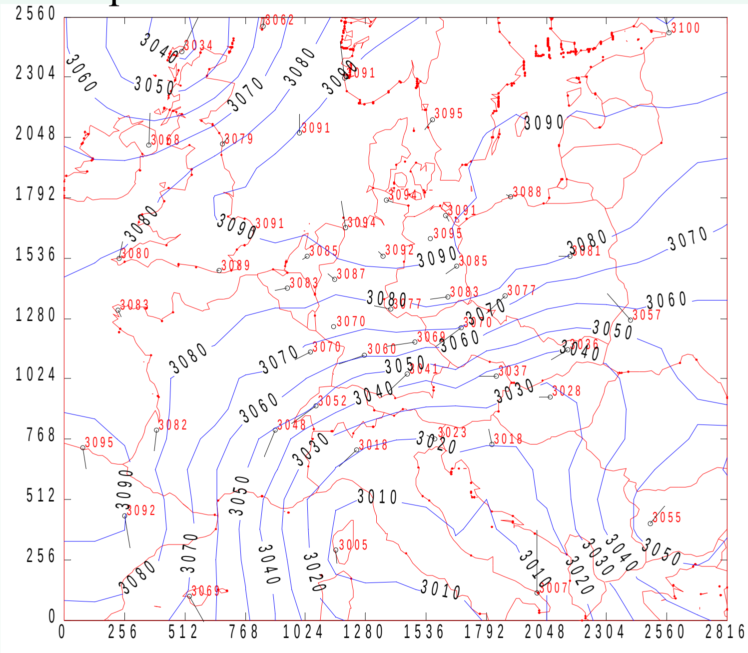


Eps=0.1 R=700

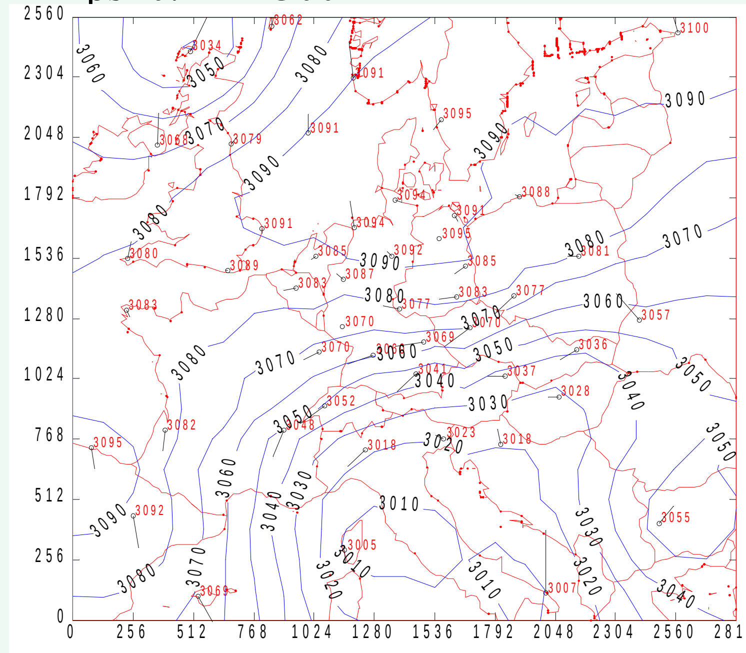


OI 1D

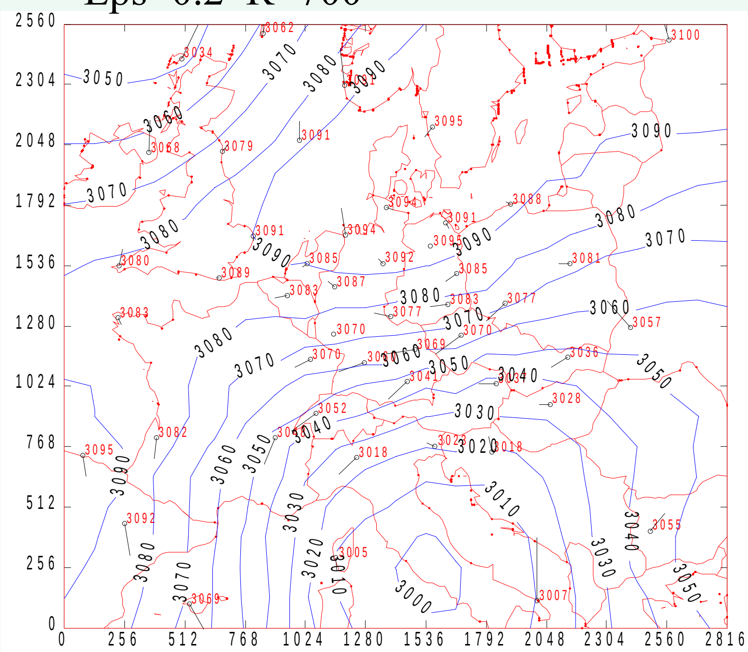
Eps=0.1 R=300



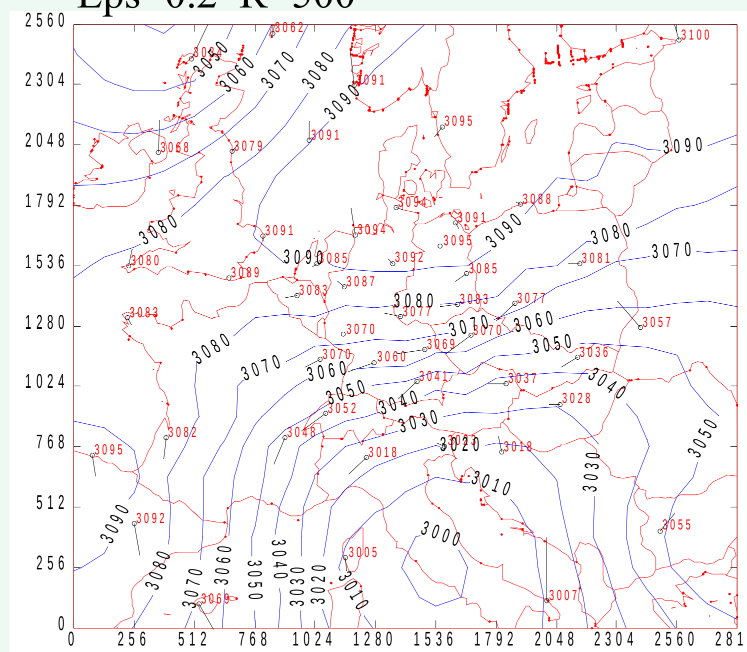
Eps=0.2 R=300



Eps=0.2 R=700



Eps=0.2 R=500



3D objektivní analýza

Korelační funkce

$$< \; > = f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \;=\; f(r, \Delta z)$$

$$< \; > = f(r)g(\Delta z) \qquad\qquad \text{aproximace}$$

Data

- TEMP (vertikální sondáž)
  2D OA – po hladinách
- SYNOP (pozemní měření)
  vypočte se umělý profil (super-observation)
  2D OA – po hladinách
- TOVS (vertikální profily z družicových měření)
  problém – korelované chyby

Iterační metoda konvergující k OI

Metoda OI:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}_k \qquad A_k = P_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}(B_i - P_i)$$

Iterační metoda výpočtu inverzní matice:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\left\{\mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}\right\}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\left\{\mathbf{I} - \left[\mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}\right]\right\}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\left\{\mathbf{I} - \mathbf{R}\right\}^{-1},$$

kde $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{M}\mathbf{Q}^{-1}$

Volba $\mathbf{Q}$:

- $\mathbf{Q}$ je diagonální: $\mathbf{Q} = \{q_{ii}\}$ $\quad q_{ii} = \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|$
- $\mathbf{Q}$ je zvoleno tak, aby: $|\rho(\mathbf{R})| < 1$
- potom:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^3 + \ldots \longrightarrow \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{R}^j$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{R}^{j}$$

Algoritmus:

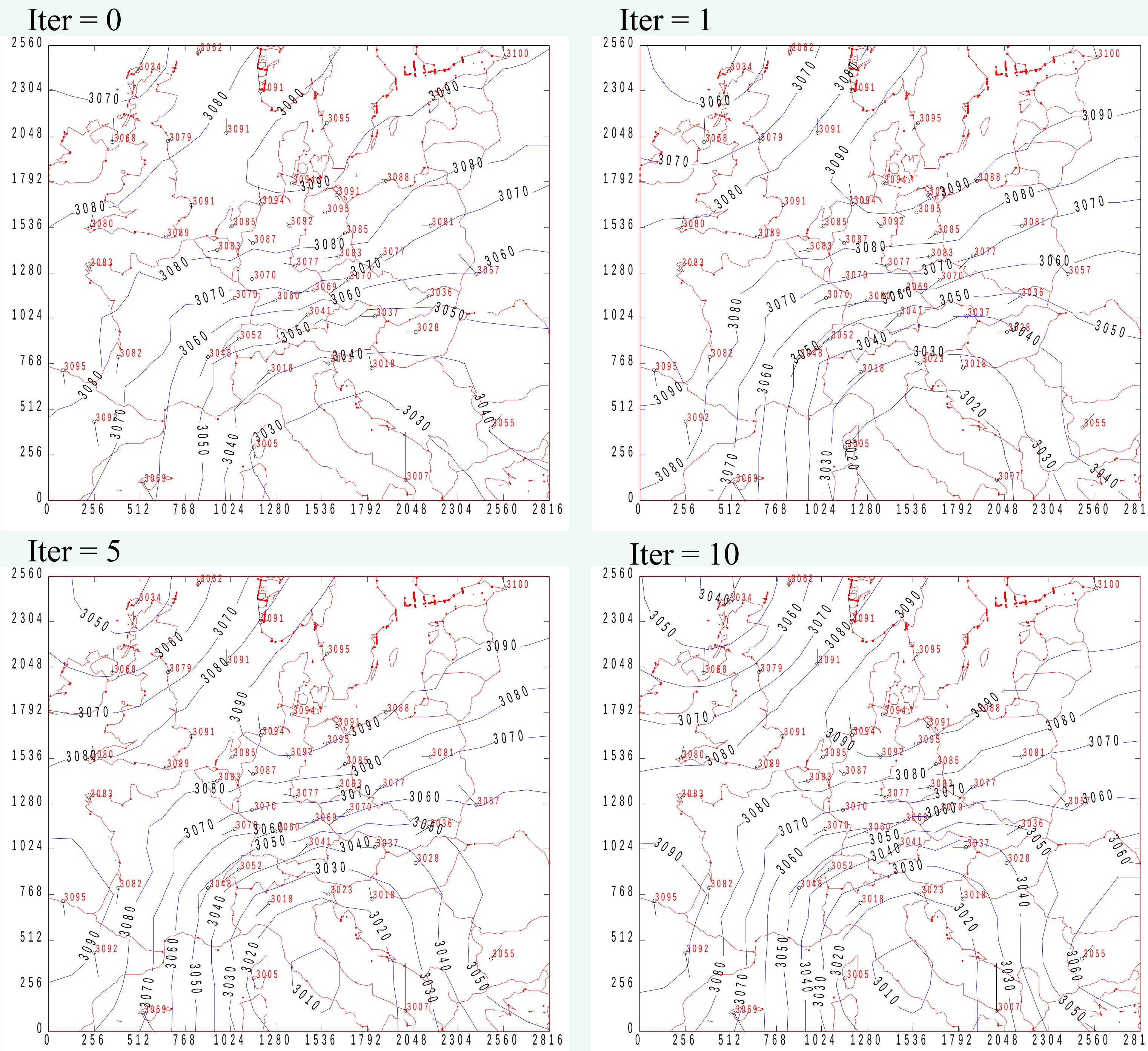
$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{B} - \mathbf{P}$$

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{d}_{j-1} + \mathbf{R}\,\mathbf{d}_{j-1}$$

$$A_k = P_k + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{d}_{\infty}\,\mathbf{h}_k$$

Vlastnosti metody:

- Iterační metoda
- Stačí malý počet iterací (3 až 10 obvykle stačí)
- Ekonomická metoda
- OI není optimální, proto není třeba mnoho iterací



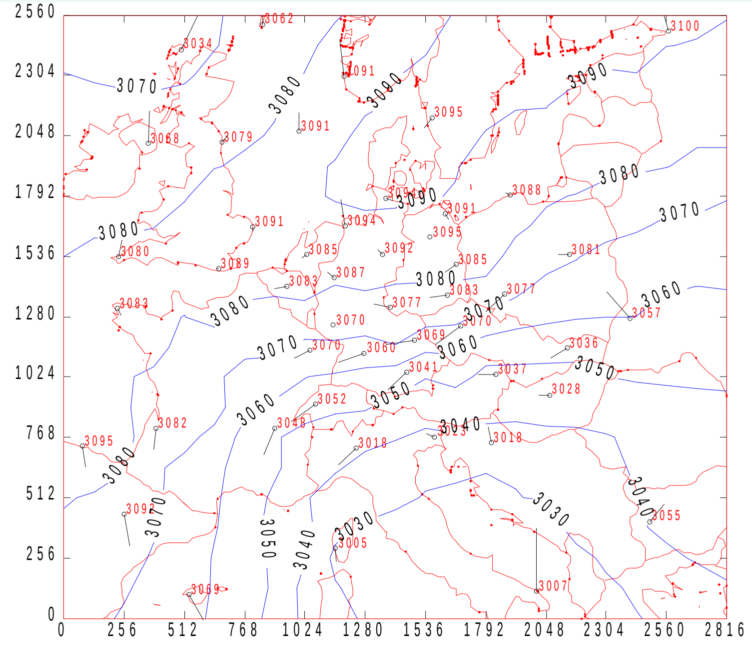
OI iterace

R=500

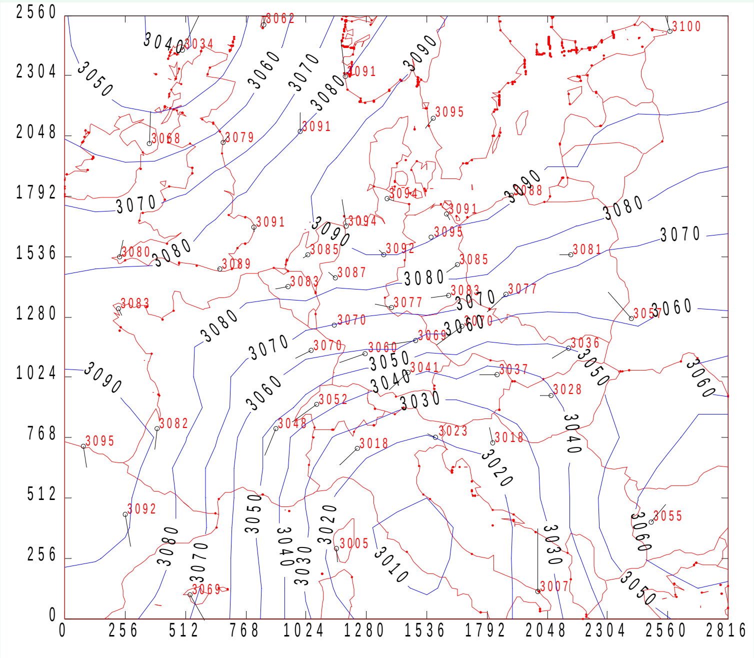
Eps=0.1

Alfa=0.5

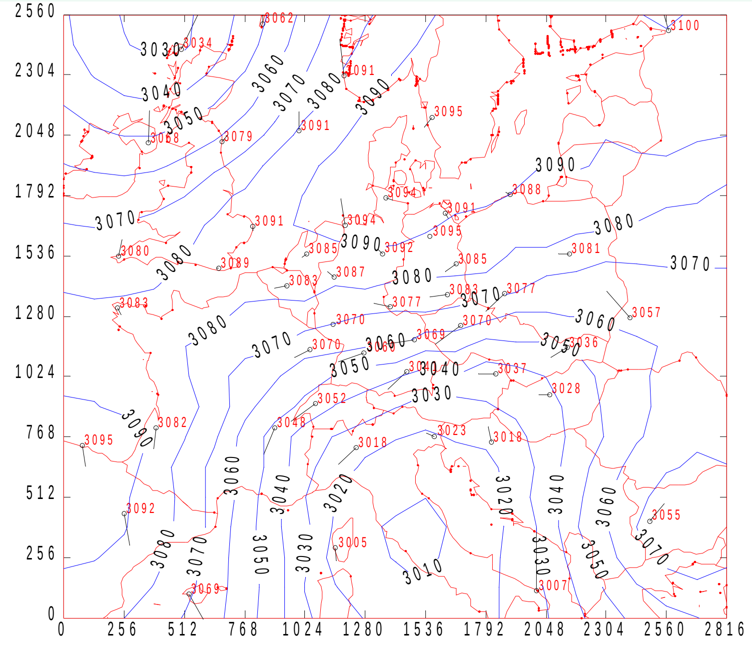
Iter = 0



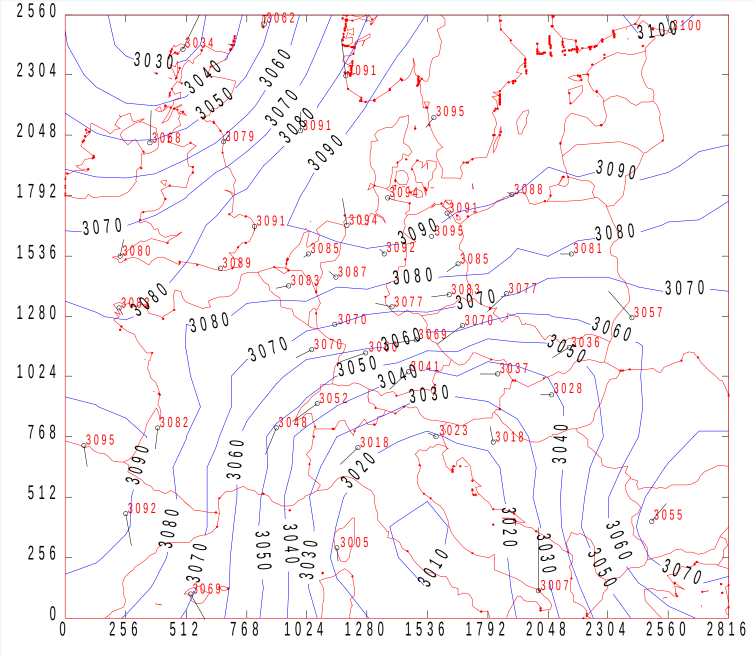
Iter = 10



Iter = 50



Iter = 100



Kriging – metoda 1

Předpoklad metody kriging: **není odhad předběžného pole P**

Odvození jako pro OI za předpokladu:

1. $$A_k = \sum_{i=1}^{n} w_{ik} B_i$$

2. $$\sum_{i=1}^{n} w_{ik} = 1$$

3. $$P_k = \sum_{i=1}^{n} w_{ik} P_i$$

$$A_k = P_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}(B_i - P_i)$$

$$A_k - T_k = P_k - T_k + \sum_{i=1}^{n} w_{ik}((B_i - T_i) - (P_i - T_i))$$

$$\boxed{\begin{aligned}(\varepsilon_k^a)^2 = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} w_{ik}\left(\langle \Pi_k \beta_i \rangle \varepsilon_i^b - \langle \Pi_k \Pi_i \rangle\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{ w_{jk} w_{ik}\left(\langle \Pi_i \Pi_j \rangle + \varepsilon_i^b \langle \beta_i \beta_j \rangle \varepsilon_j^b - \varepsilon_i^b \langle \beta_i \Pi_j \rangle - \langle \Pi_i \beta_j \rangle \varepsilon_j^b\right)\right\} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}(w_{ik} - 1)\right)\end{aligned}}$$

Minimalizace funkcionálu:

$$J(w,\lambda) = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} w_i h_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j m_{ij} + 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}(w_i - 1)\right)$$

Řešení:

$$\frac{\partial J(w,\lambda)}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial J(w,\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & . & m_{1n} & 1 \\ . & . & . & . \\ m_{n1} & . & m_{nn} & 1 \\ 1 & . & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ . \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ . \\ h_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kriging – metoda 2

Předpoklady:

- Analyzovaná hodnota A je lineární kombinací naměřených hodnot: $A = \sum_{i=1}^{N} w_i B_i$
- Váhy jsou normalizované $1 = \sum_{i=1}^{N} w_i$

Označení:

- chyba v bodě k: $r_k = A_k - T_k$
- průměrná chyba: $m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} r_k = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (A_k - T_k)$
- směrodatná odchylka chyby δ:

$$\delta_R^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(r_k - m)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[A_k - B_k - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(A_j - B_j)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[A_k - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} A_j - B_k + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} B_j\right]^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(A_k - \langle A\rangle\right) - \left(B_k - \langle B\rangle\right)\right]^2$$

Výpočet vah wij v bodě x0 :

- minimalizace δR2
- podmínka normalizace vah: $1 = \sum_{k=1}^{N} w_k$

Minimalizace δR2 (označení z geofyzikálních věd):

$$\delta_R^2 = \delta^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j C_{i,j} - 2\sum_{i=1}^{N} w_i C_{i,0} + 2\mu \left(\sum_{i=1}^{N} w_i - 1 \right) \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_i C_{i,j} + \mu = C_{i0}$$

Ci,j ... kovariance

Ordinary kriging – obyčejný kriging:

Semivariogram:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (x_i - y_i)^2 \qquad \| x_i - y_i \| = h$$

$$\| x_i - x^h_i \| = h \qquad \| y_i - y^h_i \| = h$$

Křížový semivariogram:

$$\gamma_{x,y}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (x_i - x^h{}_i)(y_i - y^h{}_i)$$

Kovariance:

$$C(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} x_i y_i - \frac{1}{2N^2(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} x_i \sum_{i=1}^{N(h)} y_i$$

Variance:

$$C(0)$$

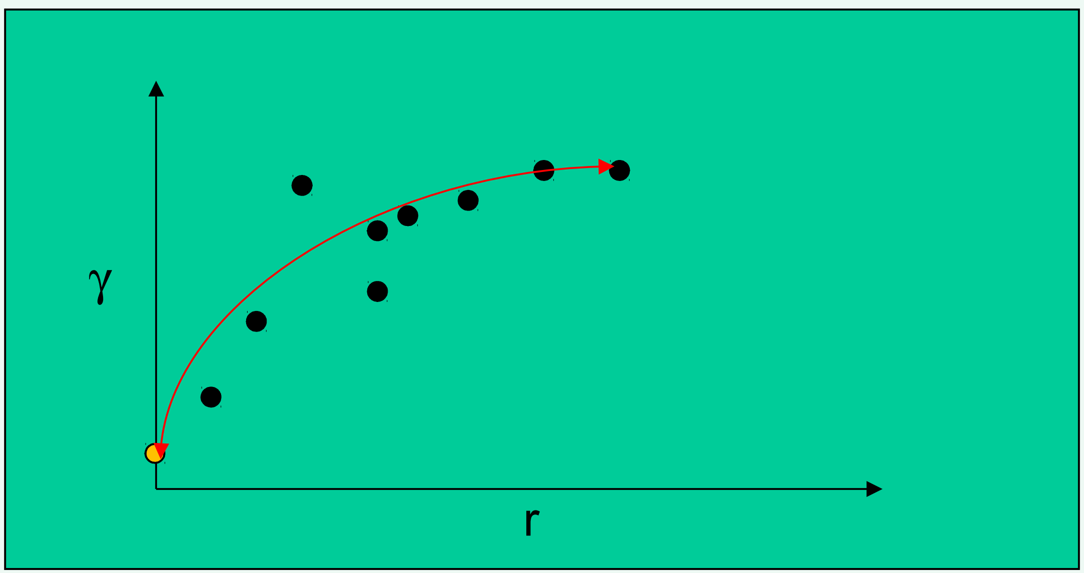
Semivariance:

$$\gamma(h) = 0.5\left[C(0) - C(h)\right]$$

$$\begin{bmatrix} \gamma(h_{11}) & \gamma(h_{12}) & . & 1 \\ \gamma(h_{21}) & \gamma(h_{22}) & . & 1 \\ . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(h_{1p}) \\ \gamma(h_{2p}) \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

Výpočet variogramu:

Data: xi , yi i=1,…,n tj. celkem n*(n-1) dvojic



Vlastnosti metody kriging:

- Podobné OI - „Optimální interpolace s normovanými váhami"
- Není potřeba předběžné pole
- Často se používá pro analýzu srážek
- Aktuální data i statistika pro výpočet statistické struktury

Optimální (statistická) interpolace pro více proměnných (z,u,v)

Současně se interpolují z, u, v

$$\left.\begin{aligned}
a_k(z) &= p_k(z) + w_{zz}^T\big(b(z) - p(z)\big) + w_{zu}^T\big(b(u) - p(u)\big) + w_{zv}^T\big(b(v) - p(v)\big)\\
a_k(u) &= p_k(u) + w_{uz}^T\big(b(z) - p(z)\big) + w_{uu}^T\big(b(u) - p(u)\big) + w_{uv}^T\big(b(v) - p(v)\big)\\
a_k(v) &= p_k(v) + w_{vz}^T\big(b(z) - p(z)\big) + w_{vu}^T\big(b(u) - p(u)\big) + w_{vv}^T\big(b(v) - p(v)\big)
\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Označení:

- < >* - kovariance
- vektorové označení:

$$w(z)^T = \left(w_{zz}^T, w_{zu}^T, w_{zv}^T\right) \qquad p^T = \left(p(z)^T, p(u)^T, p(v)^T\right) \qquad b^T = \left(b(z)^T, b(u)^T, b(v)^T\right)$$

$$a_k(z) = p_k(z) + w(z)^T(b - p) \qquad (*)$$

Chyba:

$$\left\langle a_k(z)^2\right\rangle^* = \left\langle p_k(z)^2\right\rangle^* + 2\left\langle p_k(z)w^T(z)(b - p)\right\rangle^* + \left\langle w^T(z)(b - p)(b - p)^T w(z)\right\rangle^*$$

- Rovnice pro wzz , wzu , wzv

$$\begin{bmatrix} \langle p_z p_z^T \rangle^* + \langle b_z b_z^T \rangle^* & \langle p_z p_u^T \rangle^* + \langle b_z b_u^T \rangle^* & \langle p_z p_v^T \rangle^* + \langle b_z b_v^T \rangle^* \\ \langle p_u p_z^T \rangle^* + \langle b_u b_z^T \rangle^* & \langle p_u p_u^T \rangle^* + \langle b_u b_u^T \rangle^* & \langle p_u p_v^T \rangle^* + \langle b_u b_v^T \rangle^* \\ \langle p_v p_z^T \rangle^* + \langle b_v b_z^T \rangle^* & \langle p_v p_v^T \rangle^* + \langle b_v b_u^T \rangle^* & \langle p_v p_v^T \rangle^* + \langle b_v b_v^T \rangle^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{zz}^T \\ w_{zu}^T \\ w_{zv}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle p_k(z) p_z^T \rangle^* \\ \langle p_k(z) p_u^T \rangle^* \\ \langle p_k(z) p_v^T \rangle^* \end{bmatrix}$$

- Obdobné rovnice se sestaví pro wuz , wuu , wuv a wvz , wvu , wvv

Modelování kovariance (korelace):

$$\langle p_z p_z^T \rangle^* = E_z^2 \langle b_z b_z^T \rangle = E_z^2 \langle z z^T \rangle \qquad \langle b_z b_u^T \rangle^* = E_z^o E_u^o I$$

$$\langle p_z p_u^T \rangle^* = E_z E_v \langle b_z b_u^T \rangle = E_z E_v \langle z u^T \rangle \qquad \langle p_z p_v^T \rangle^* = E_z E_v \langle b_z b_v^T \rangle = E_z E_v \langle z v^T \rangle$$

$$\langle p_v p_u^T \rangle^* = E_v^2 \langle b_v b_u^T \rangle = E_v^2 \langle v u^T \rangle$$

Je třeba vyjádřit následující korelace:

$\langle z_i z_j \rangle = ?$ $\quad \langle z_i v_j \rangle = ?$ $\quad \langle z_i u_j \rangle = ?$ $\quad \langle u_i u_j \rangle = ?$ $\quad \langle v_i v_j \rangle = ?$ $\quad \langle u_i v_j \rangle = ?$

Modelování kovariance/korelace:

- homogenní izotropní kovariance – závisí pouze na vzdálenosti bodů

$$f(r) = \langle a(x, y) b(x', y') \rangle = \langle a(q) b(q + r) \rangle$$

- kovariance se modelují pomocí hladkých funkcí, potom:

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle a(q) b(q + r) \rangle, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} \langle a(q) b(q + r) \rangle, \quad \frac{\partial}{\partial y} \langle a(q) b(q + r) \rangle$$

1. Je třeba vyjádřit:

$\langle z_i z_j \rangle = ?$ $\langle z_i v_j \rangle = ?$ $\langle z_i u_j \rangle = ?$ $\langle u_i u_j \rangle = ?$ $\langle v_i v_j \rangle = ?$ $\langle u_i v_j \rangle = ?$

2. Modelují se kovariance (korelace):

$\langle z_i z_j \rangle = ?$ $\langle z_i \chi_j \rangle = ?$ $\langle z_i \psi_j \rangle = ?$ $\langle \psi_i \psi_j \rangle = ?$ $\langle \chi_i \chi_j \rangle = ?$ $\langle \chi_i \psi_j \rangle = ?$

Helmholtzův vztah:
ψ … proudová funkce
χ … vektorový potenciál

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

3. Jak vyjádřit vztah mezi kovariancemi (z, u, v) a (z, ψ, χ):

<.> je funkce r(x,y)

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle a(q)b(q+r)\rangle$$

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\langle u_1 v_2\rangle = \langle u(x_1, y_1)\, v(x_2, y_2)\rangle =$$

$$= \left\langle \left(-\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \chi_2}{\partial y_2}\right\rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1}\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}(x_1, y_1)\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_2, y_2)\right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial x_2}\langle \Psi_1 \Psi_2\rangle$$

Optimální (statistická) interpolace (z,u,v) (3)

ψ … proudová funkce

χ … vektorový potenciál

Helmholtzův vztah:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

$$\langle \psi_i \psi_j \rangle^* = E_\psi^{\,2} F(r)$$

$$\langle \chi_i \chi_j \rangle^* = E_\psi^{\,2} G(r)$$

$$\langle \psi_i \chi_j \rangle^* = \langle \chi_i \psi_j \rangle^* = E_\psi E_\chi H(r)$$

$$\langle z_i \psi_j \rangle^* = \langle \psi_i z_j \rangle^* = E_\psi E_z I(r)$$

$$\langle z_i \chi_j \rangle^* = \langle \chi_i z_j \rangle^* = E_\psi E_\chi J(r)$$

$$\langle z_i z_j \rangle^* = E_z^{\,2} K(r)$$

Vztahy:

b … charakteristická délka F

bχ … charakteristická délka G

G = F(r/α) α = bχ/b

H = λF

I = μF

J = λ*F

K = F

F(r) = exp(-0.5r2)

r = (vzdálenost/R)

Optimální (statistická) interpolace (z,u,v)

$$\langle u_i u_j \rangle = (1-\upsilon)\Gamma[F(r)] + \upsilon\alpha^2\Delta[G(r)] + 2(\upsilon-\upsilon^2)^{1/2}\alpha\lambda\Theta[F(r)] \qquad \langle u_i u_j \rangle = \langle u_j u_i \rangle$$

$$\langle v_i v_j \rangle = (1-\upsilon)\Delta[F(r)] + \upsilon\alpha^2\Gamma[G(r)] - 2(\upsilon-\upsilon^2)^{1/2}\alpha\lambda\Theta[F(r)] \qquad \langle v_i v_j \rangle = \langle v_j v_i \rangle$$

$$\langle u_i v_j \rangle = (1-\upsilon)\Theta[F(r)] - \upsilon\alpha^2\Theta[G(r)] + (\upsilon-\upsilon^2)^{1/2}\alpha\lambda\Lambda[F(r)] \qquad \langle u_i v_j \rangle = \langle v_j u_i \rangle$$

$$\langle z_i u_j \rangle = (1-\upsilon)^{1/2}\mu\Xi[F(r)] - \upsilon^{1/2}\alpha\lambda^*\Pi[F(r)] \qquad \langle z_i v_j \rangle = \langle v_i z_j \rangle$$

$$\langle z_i v_j \rangle = -(1-\upsilon)^{1/2}\mu\Pi[F(r)] - \upsilon^{1/2}\alpha\lambda^*\Xi[F(r)] \qquad \langle z_i u_j \rangle = \langle u_i z_j \rangle$$

$$\langle z_i z_j \rangle = F(r)$$

$$\Gamma = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + (y_i - y_j)^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] \qquad \Delta = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + (x_i - x_j)^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$$

$$\Theta = \left[(x_i - x_j)(y_i - y_j)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] \qquad \Theta = \left[(y_i - y_j)^2 - (x_i - x_j)^2\right]\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Xi = \left[(y_i - y_j)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] \qquad \Pi = \left[(x_i - x_j)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$$

$$\nu = \frac{E^2_{v_\chi}}{E^2_v} \qquad E_v^2 = \frac{E_\psi^2}{b^2} + \frac{E_\chi^2}{b_\chi^2} = E^2_{v_\psi} + E^2_{v_\chi}$$

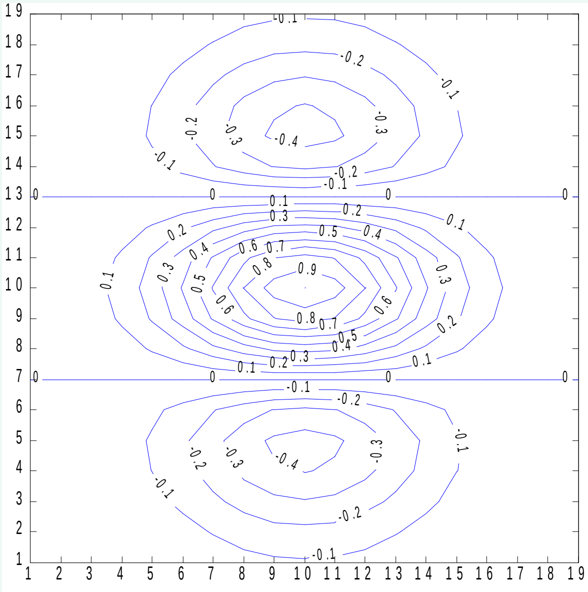
podíl variance chyby předpovědi divergentní složky větru k celkové chybě

Optimální (statistická) interpolace (z,u,v)

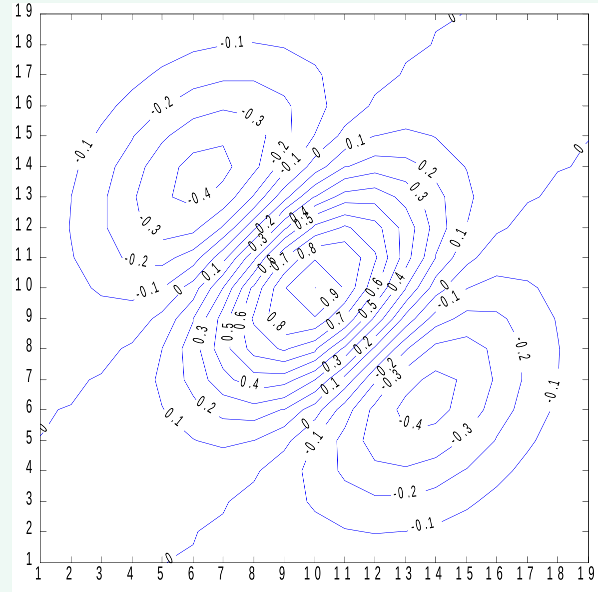
- $\nu = 0$ … korelace rotační složky větru
- $\nu = 1$ … korelace nerotační složky větru
- $\nu = 0$ $\mu = 1$ … Gaussův model, geostrofická vazba
- $\nu = 0.5$ $\alpha=1$ … $\langle u_i v_j \rangle = 0$

Korelace
u-u

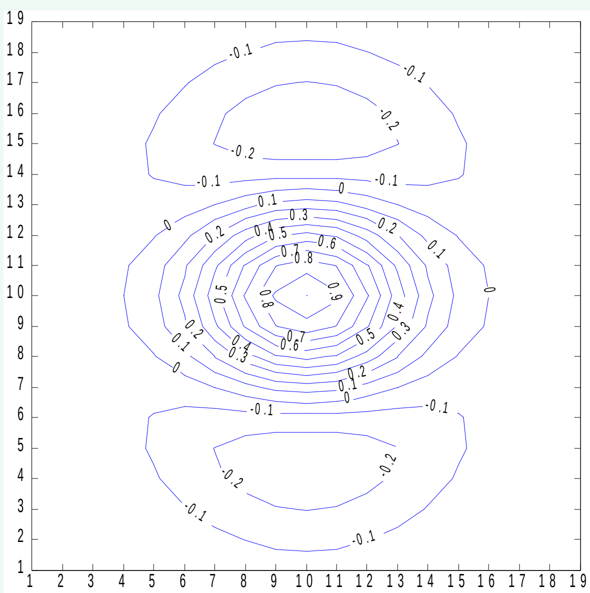
$\nu = 0$



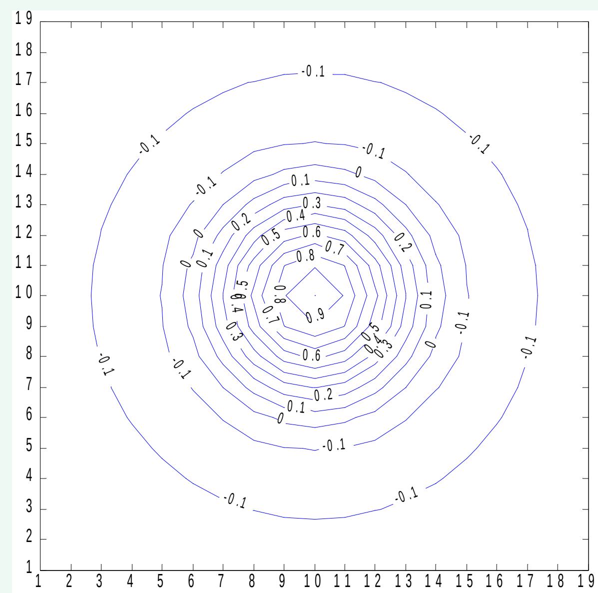
$\nu = 1 \quad \lambda = 0.5$



$\nu = 0.25 \quad \lambda = 0$

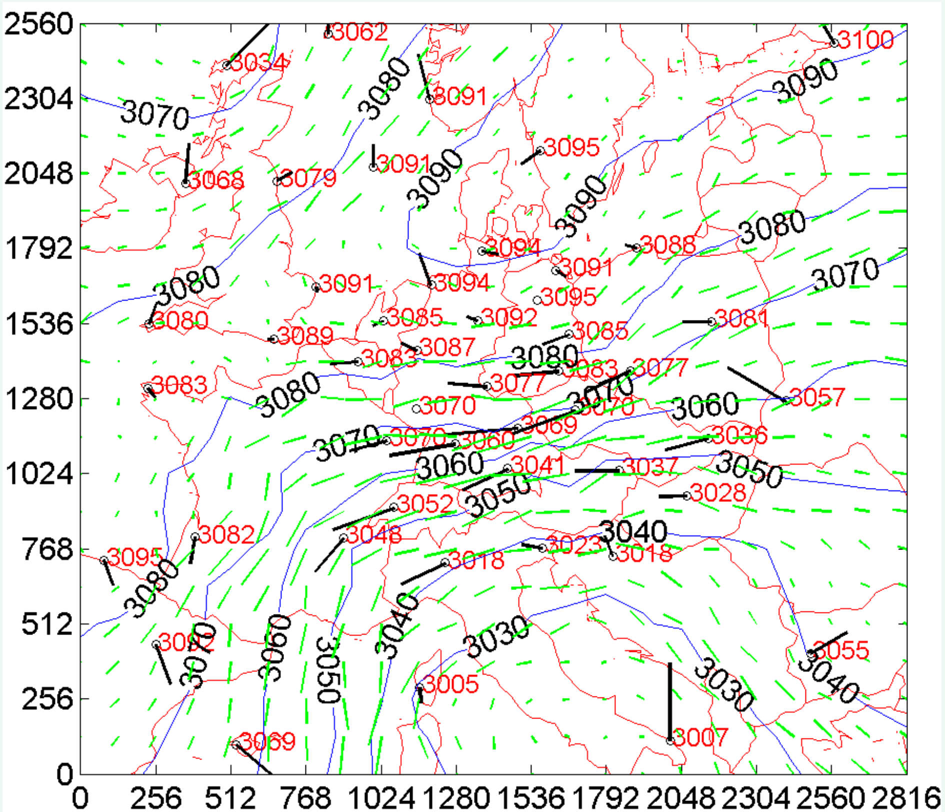


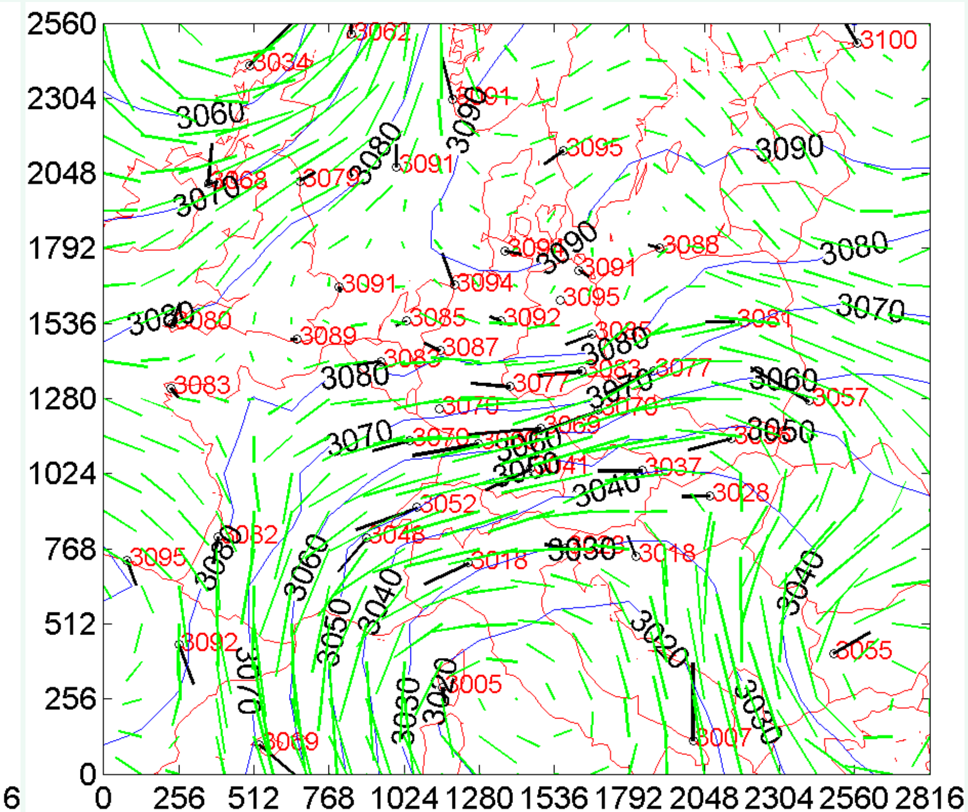
$\nu = 0.5 \quad \lambda = 0$



Předběžné pole

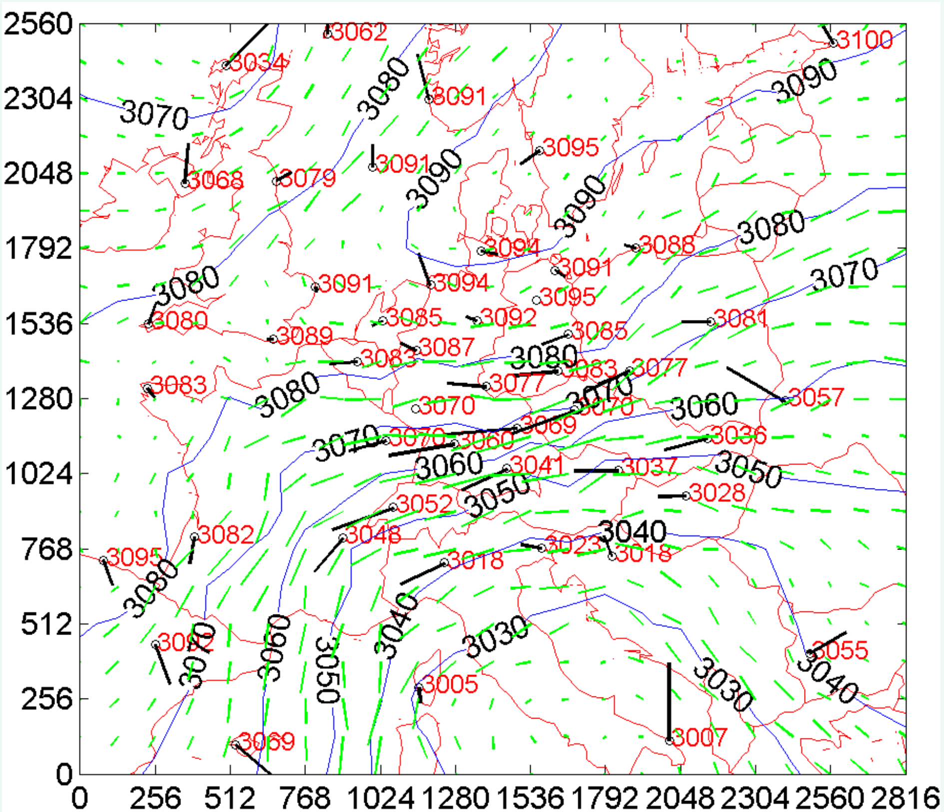
OI3D, R=500, ν =0, mi=1,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2



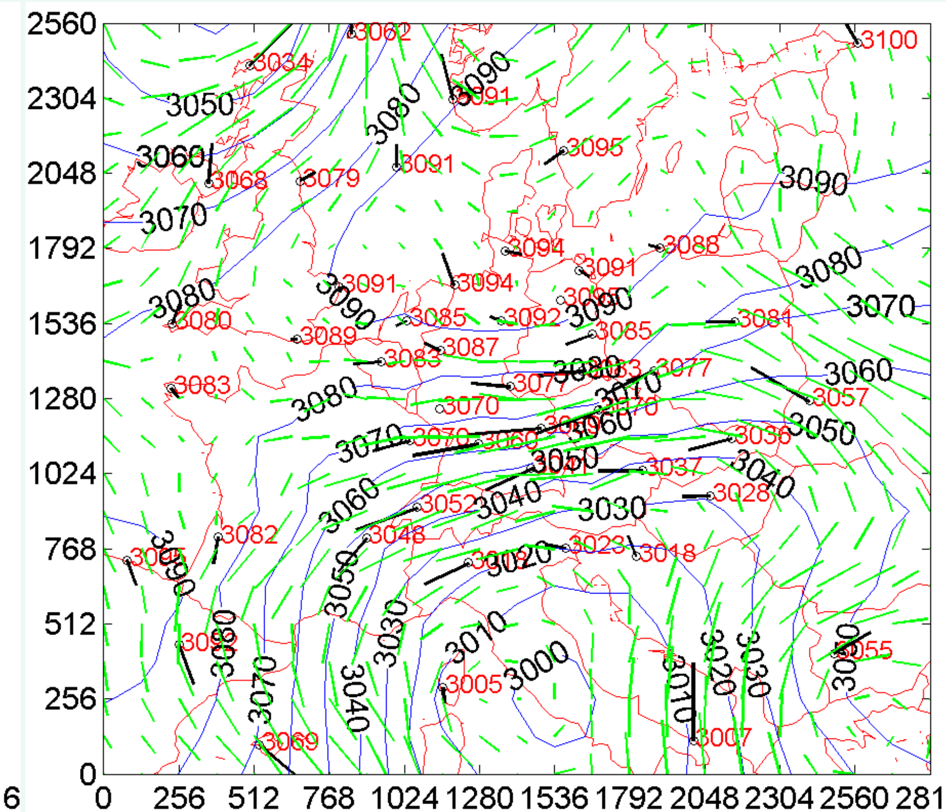


Geostrofická vazba

Předběžné pole

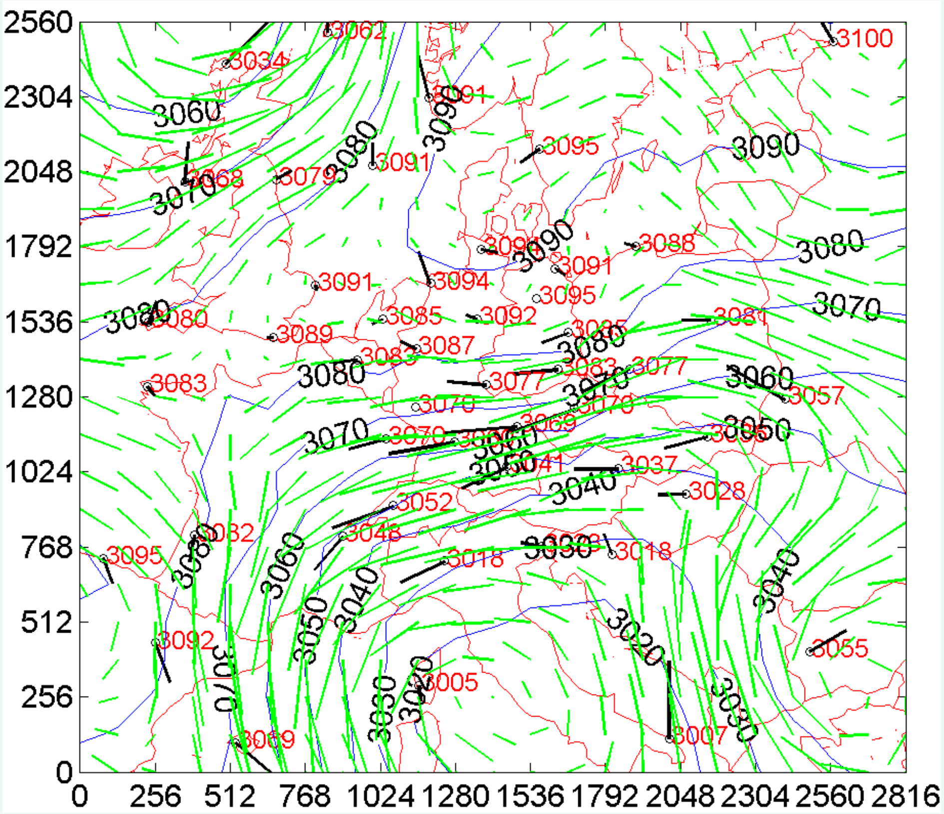


OI3D, R=500, ν =0, mi=0,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2

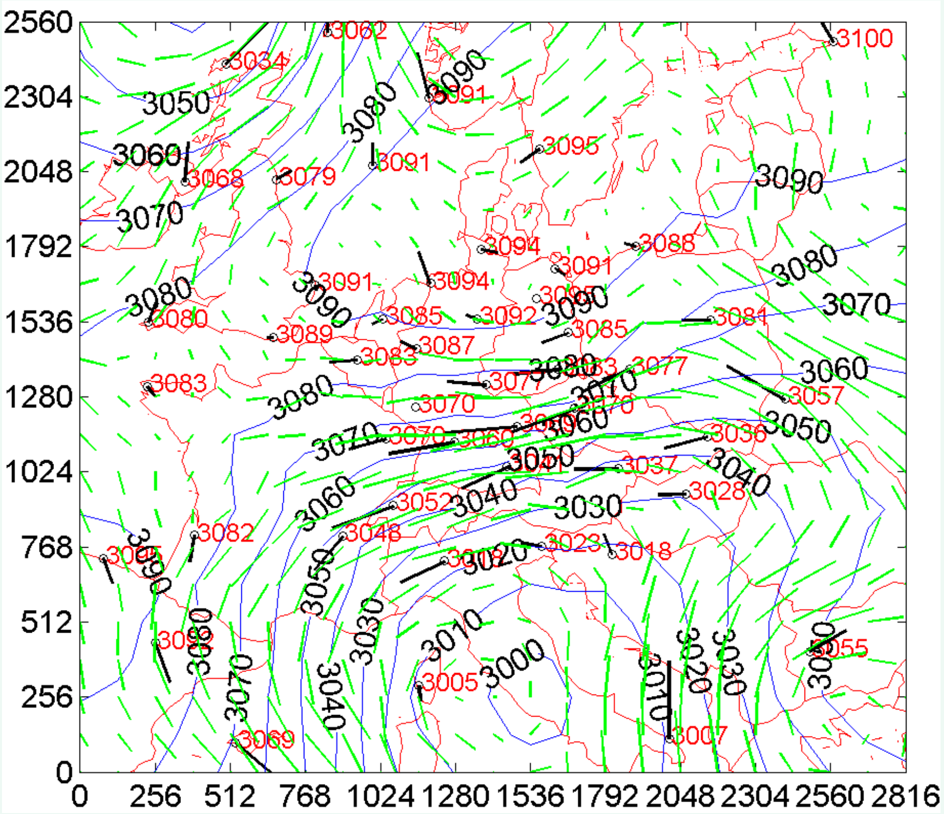


Není geostrofická vazba

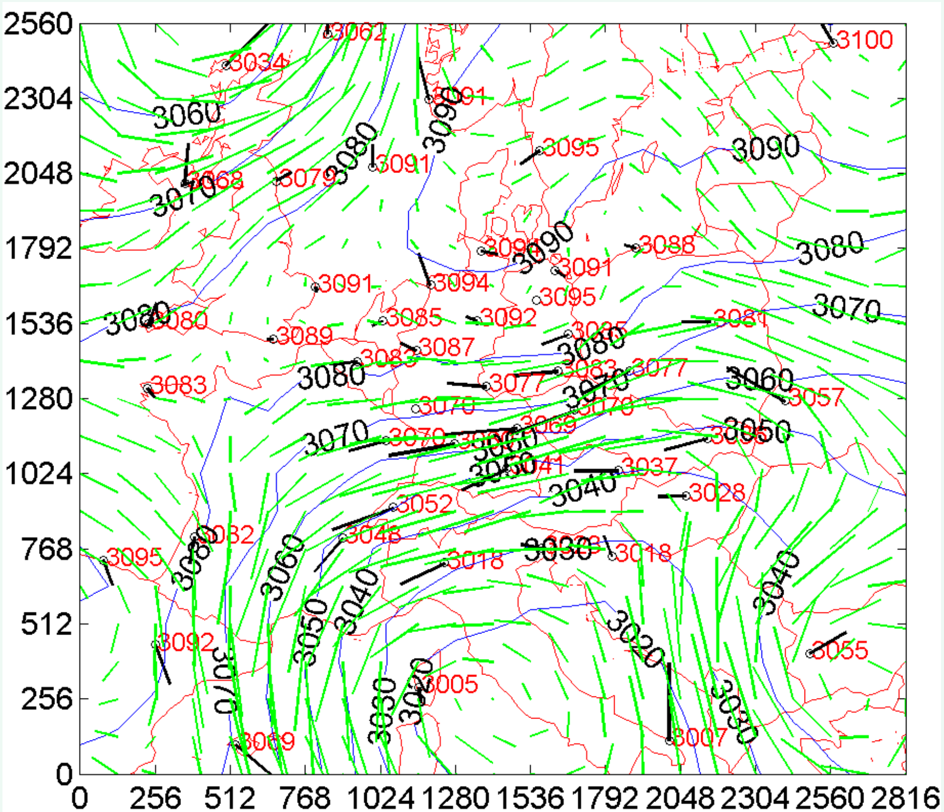
OI3D, R=500, ν =0, mi=1,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2



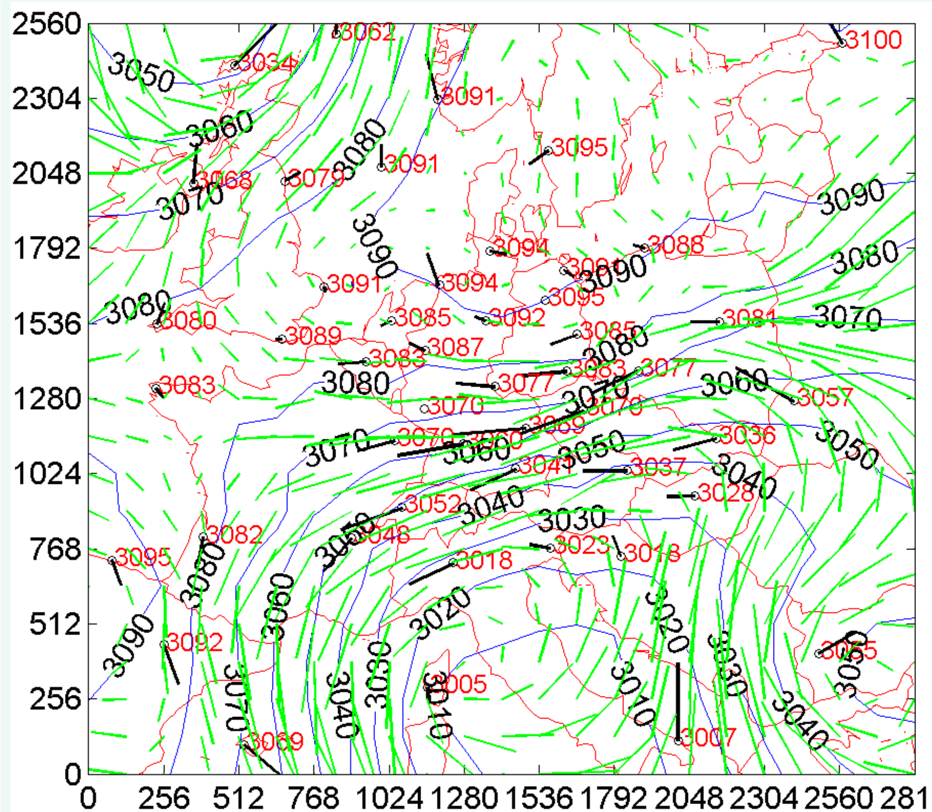
OI3D, R=500, ν =0, mi=0,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2



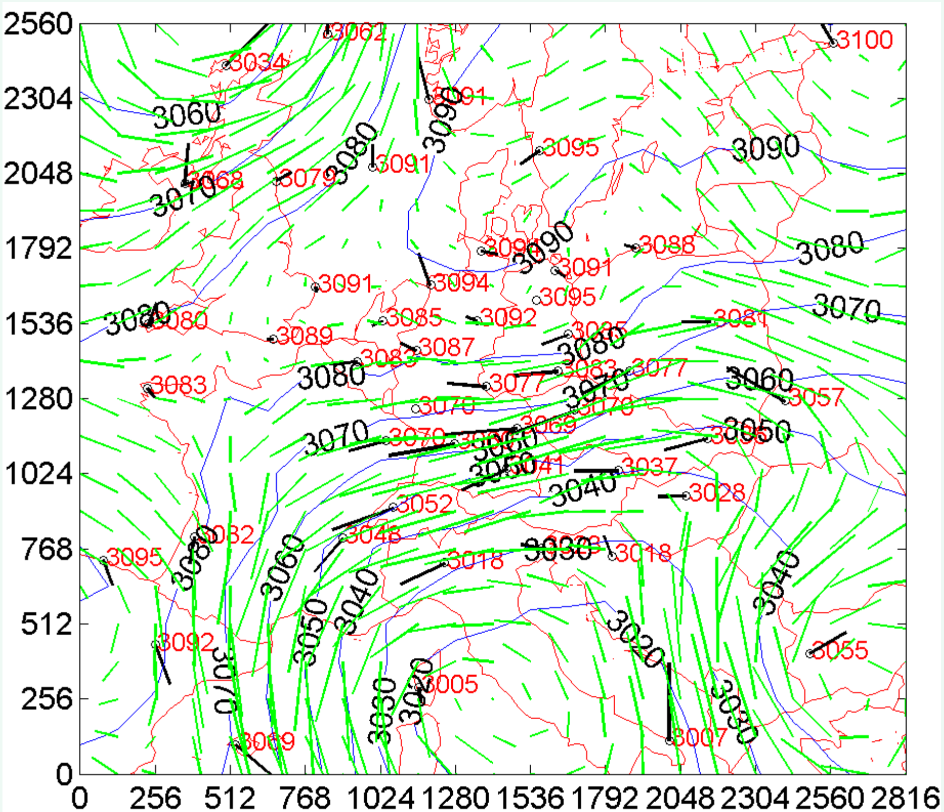
OI3D, R=500, ν =0, mi=1,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2



OI3D, R=500, ν =0.5, mi=1,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2



OI3D, R=500, ν =0, mi=1,
lam=0,lam*=0,eps = 0.2, 0.2, 0.2



Korekční metoda R=500, iter=3