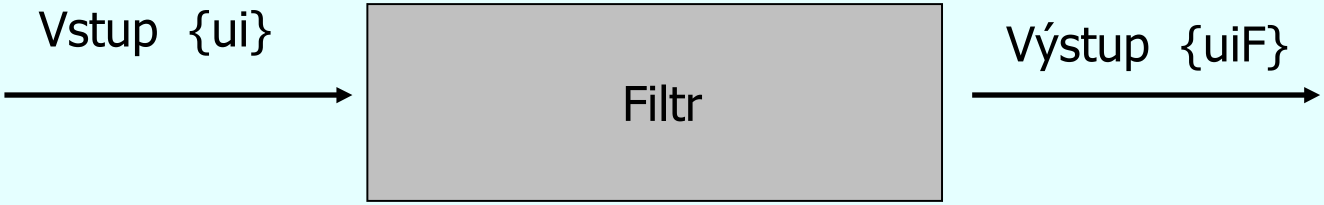
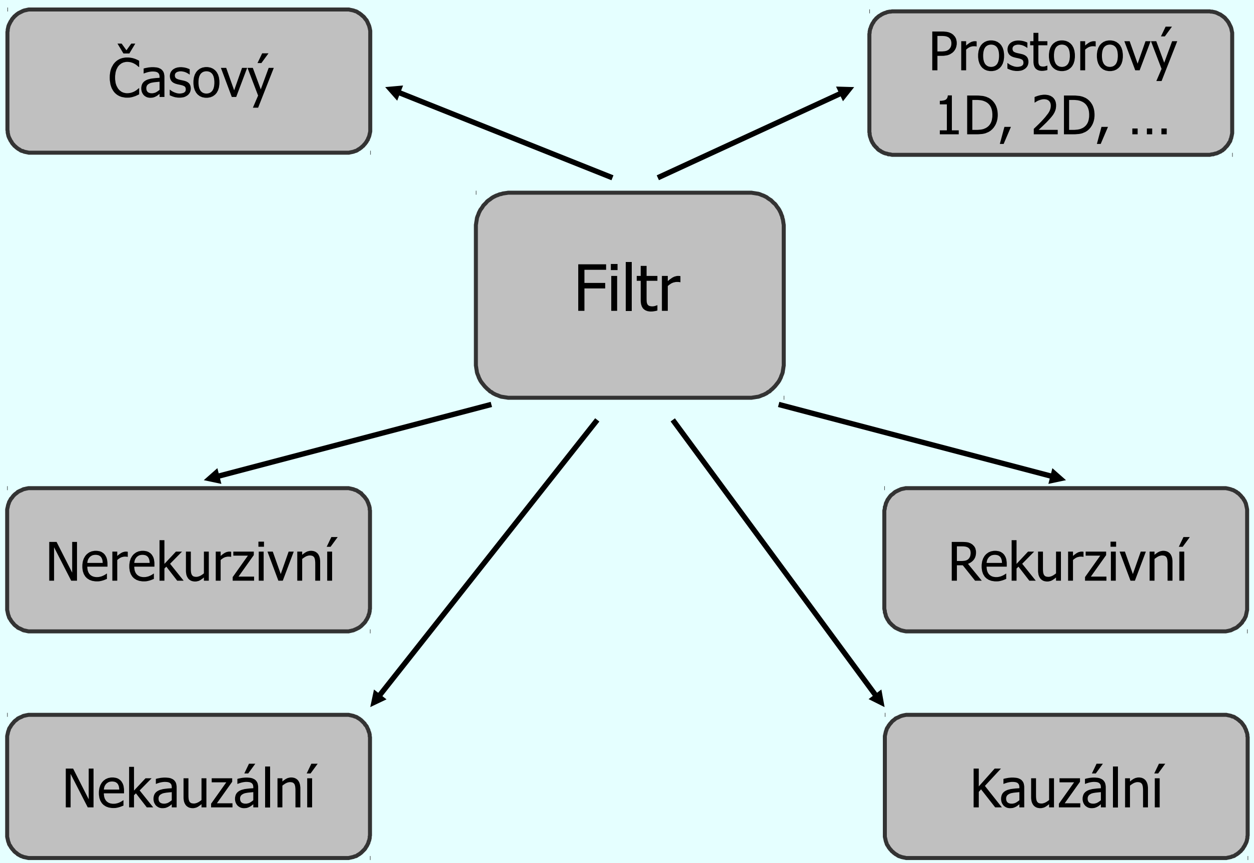
Digitální filtry v meteorologii

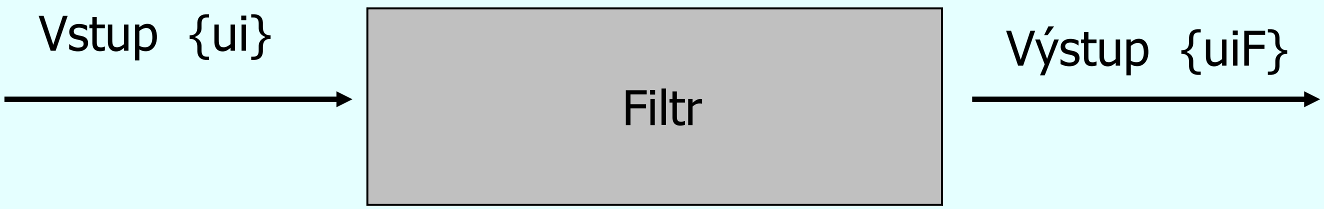


Klasifikace filtrů:

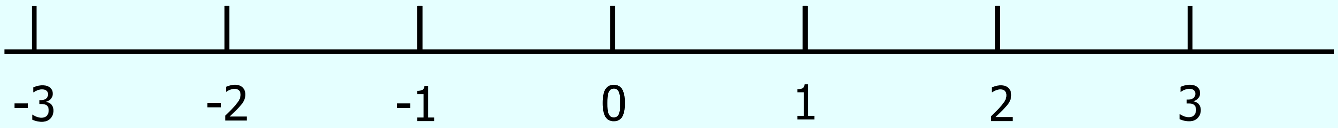


Filtry:

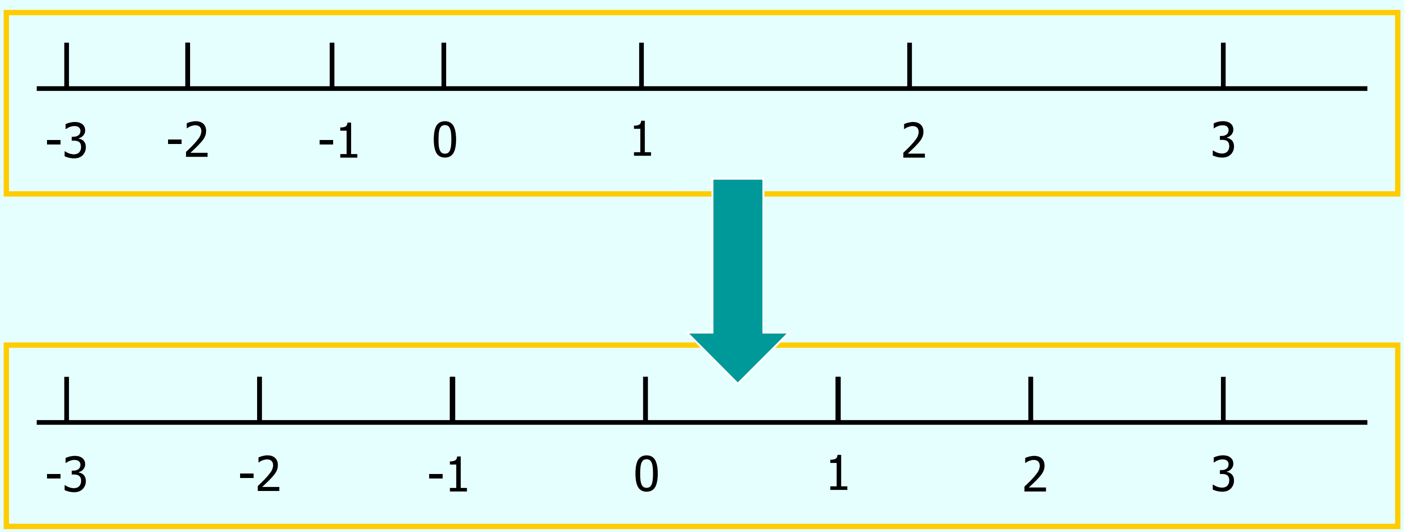
- nerekurzivní
    - nekauzální $$u_k^F = \sum_{j=-N}^{N} c_j u_{k-j}$$
    - kauzální $$u_k^F = \sum_{j=0}^{N} c_j u_{k-j}$$
- rekurzivní
    - nekauzální $$u_k^F = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_{k-j}^F + \sum_{j=-N}^{N} c_j u_{k-j}$$
    - kauzální $$u_k^F = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_{k-j}^F + \sum_{j=0}^{N} c_j u_{k-j}$$



Předpoklad: ekvidistantní síť s krokem Δx



Pokud je sít neekvidistantní, provede se transformace.



Nerekurzivní a nekauzální filtry:

$$u_k^F = \sum_{j=-N}^{j=N} c_j u_{k-j}$$

Okno 2N+1: c_{-N} , c_{-N+1} , … , c_0 , …, c_{N-1} , c_N

Příklad:

- měří se u_j+v_j
- máme signál u_j
- šum v_j , vlastnosti: $E(v_j) = 0$, $Var(v_j) = \sigma^2$, $E(v_i v_j) = 0$ pro $i \neq j$
- úkol: rekonstruovat u_j

Aplikujeme filtr:

$$u_k^F = \sum_{j=-N}^{N} c_j (u_{k-j} + v_{k-j})$$

Dostaneme:

$$E\left(u_k^F\right) = E\left(\sum_{j=-N}^{N} c_j \left(u_{k-j} + v_{k-j}\right) \right) = \sum_{j=-N}^{N} c_j u_{k-j}$$

$$Var\left(u_k^F\right) = E\left[u_k^F - E(u_k^F)\right]^2 = E\left[\sum_{j=-N}^{N} c_j \left(u_{k-j} + v_{k-j}\right) - \sum_{j=-N}^{N} c_j u_{k-j} \right]^2 = \sigma^2 \sum_{j=-N}^{N} c_j^2$$

Podmínka pro tlumení šumu: $\sum_{j=-N}^{N} c_j^2 < 1$

Hlazení-průměrování - podmínka: $\sum_{j=-N}^{N} c_j = 1$

Příklad: nalezněte váhy filtru cj tak, aby Var(ujF) byla minimální.

Řešení:

$$L(\lambda, c) = \sigma^2 \sum_{j=-N}^{N} c_j^{\,2} + \lambda\left(\sum_{j=-N}^{N} c_j - 1\right) \quad \to \quad \min$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \\ &\frac{\partial L}{\partial c_j} = 0 \quad , j = -N, \dots, N \end{aligned}\right\} \qquad c_j = \frac{1}{2N+1} \;, j = -N, \dots, N$$

Filtr s minimální variancí:

$$\boxed{u_k^F = \frac{1}{2N+1} \sum_{j=-N}^{N} u_{k-j}}$$

Nízkofrekvenční Schumanův filtr

$$u_k^F = \frac{c}{2} u_{k-1} + (1-c) u_k + \frac{c}{2} u_{k+1}$$

$$= u_k + \frac{c}{2}\left[u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}\right]$$

Schéma: $$u_k^F = \left[\frac{c}{2}, (1-c), \frac{c}{2}\right]$$

$$u_k^F \approx \left(1 + \frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right) u(x), \quad \text{pro } x = k\Delta x$$

Spektrální analýza Schumanova filtru:

- Vyjádříme u(x) pomocí Fourierova rozvoje, kde
  - Aj, Bj jsou amplitudy
  - Lj je vlnová délka,
  - f = 1/L … frekvence
  - k = 2π/L … vlnové číslo

$$u(x) = A_0 + \sum_{j=1}^{N} A_j \cos\left(\frac{2\pi}{L_j}\right)x + \sum_{j=1}^{N} B_j \sin\left(\frac{2\pi}{L_j}\right)x$$

- Vypočteme uF
- Vzhledem k linearitě stačí provést výpočet pro jedno j
- Protože filtrační koeficienty jsou symetrické (c-1 = c1) a sin je lichá funkce, stačí uvažovat členy s cos.

$$u(x) = A_0 + A\cos jx$$

Dosadíme do filtru:

$$u_k^F = \frac{c}{2}u_{k-1} + (1-c)u_k + \frac{c}{2}u_{k+1}$$

$$x_k = k\Delta x$$

$$u_k = u(x_k) = A_0 + A\cos jk\Delta x$$

$$u_{k\pm 1} = u(x_{k\pm 1}) = A_0 + A\cos j(k\pm 1)\Delta x$$

Po úpravách dostaneme:

$$u_k^F = A_0 + A^F\cos jk\Delta x$$

kde

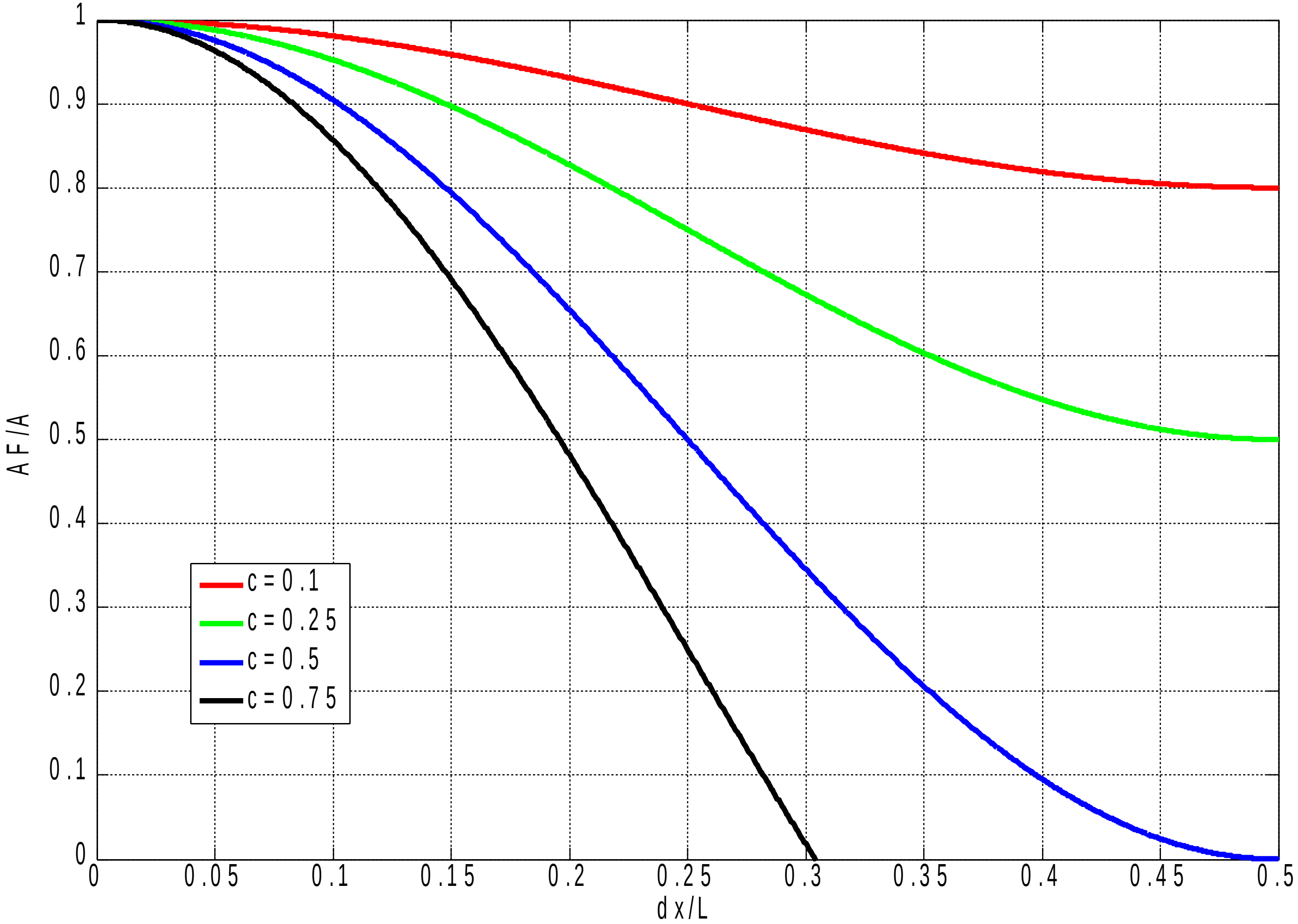
$$\begin{aligned} A^F &= A\{1 - c[1 - \cos(j\Delta x)]\} \\ &= A\left[1 - 2c\sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right] \end{aligned}$$

Vlastnosti filtru:

- Fáze se nezmění (platí pro všechny symetrické filtry)
- Změní se amplituda

Spektrální analýza Schumanova filtru:

$$A^F = A\left[1 - 2c\sin^2\left(\frac{\pi\Delta x}{L}\right)\right]$$



řechod od 1D filtru k vícerozměrnému filtru:

1. Aplikace 1D filtru postupně v jednotlivých dimenzích

$$u^F_{l,k} = \frac{c}{2} u_{l-1,k} + (1-c) u_{l,k} + \frac{c}{2} u_{l+1,k}$$ ve směru x

$$u^F_{l,k} = \frac{c}{2} u_{l,k-1} + (1-c) u_{l,k} + \frac{c}{2} u_{l,k+1}$$ ve směru y

$$u^F_{l,k} = u_{l,k} + \frac{c(1-c)}{2}\left[u_{l-1,k} + u_{l,k+1} + u_{l+1,k} + u_{l,k-1} + 4u_{l,k}\right] + \frac{c^2}{4}\left[u_{l-1,k+1} + u_{l+1,k+1} + u_{l+1,k-1} + u_{l-1,k-1}\right]$$

$$u^F_{l,k} \approx \left(1 + \frac{c}{2}\Delta\right) u(x,y), \text{ pro } x = l\Delta x, \; y = k\Delta x$$

- 2. Použití jiného diferenčního schématu pro 2D, 3D atd.

Shapirovy filtry:

- Používá diferenční operátor δ

$$\delta u_i = u_{i+1/2} - u_{i-1/2}$$

$$\delta^2 u_i = u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}$$

- Schumanův filtr s c = 0.5 :

$$\left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) u_i = \frac{1}{4}\left[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right]$$

$$\left[\frac{c}{2},\ (1-c),\ \frac{c}{2}\right]$$

- Filtry vyšších řádů:

$$\left(1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)^{-1} = 1 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^6 + \ldots$$

$$\left(1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\left[1 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^4 - \ \ldots (-1)^{2p} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2p}\right] u_i$$

Filtry vyšších řádů

Fourierova transformace pro diskrétní čas

Transformace: {gn} → G(f)

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_n e^{-i2\pi fn}, \quad \text{pro } f \in \langle -0.5, 0.5)$$

Inverzní transformace: G(f) → {gn}

$$g_n = \int_{-0.5}^{0.5} G(f) e^{i2\pi fn}\, df, \quad \text{pro } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Konvoluce:

$$(g * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(r) h(t - r)\, dr$$

Vlastnosti konvoluce:

$(g * h) = (h * g)$, $g * (h * f) = (g * h) * f$, $g * (h + f) = (g * h) + (g * f)$

$F[g * h] = F(g)F(h)$ F je Fourierova transformace

Rekurzivní filtry

Filtr 1. řádu - vpřed

$$u_n^A = \alpha u_{n-1}^A + (1-\alpha) u_n \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$u_n^A = \alpha u_{n-1}^A + (1-\alpha) u_n = \dots = \alpha^n u_0^A + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k u_{n-k}$$

$$u_n^A = \alpha^n u_0^A + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k u_{n-k}$$

$$u_n^A = \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} u_{n-k} \qquad g_{k+1} = \begin{cases} (1-\alpha)\alpha^k, & \text{pro } k \geq 0 \\ 0, & \text{pro } k < 0 \end{cases}$$

$$u^A = g^+ * u, \quad \text{kde } g^+ = \{g_{k+1}\}$$

Provedeme Fourierovu transformaci:

$$u^A = g^+ * u$$

$$\downarrow$$

$$u^A(f) = G^+(f)u(f)$$

Funkce uA(f), G+(f) a u(f) hledáme ve tvaru:

$$u^A(f) = A_0(f)e^{i\theta_0(f)}$$

$$G^+(f) = A_g(f)e^{i\theta_g(f)}$$

$$u(f) = A_I(f)e^{i\theta_I(f)}$$

Dostaneme:

- pro amplitudy: $A_0(f) = A_g(f)A_I(f)$
- pro frekvence: $\theta_0(f) = \theta_g(f) + \theta_I(f)$

Vypočteme G+(f):

$$G^{+}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{+} e^{-i2\pi fn} = (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-i2\pi fn}$$

$$= (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} e^{-[a+i2\pi fn]} \qquad \text{položíme } \alpha = e^{-a}$$

$$= \frac{1-\alpha}{1-e^{-[a+i2\pi f]}}$$

$$= \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{-i2\pi f}} = A_g^{+}(f)\, e^{i\theta_g^{+}(f)}$$

Změna fáze a amplitudy aplikací filtru:

$$\left|A_g^{+}(f)\right|^2 = \frac{(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2 + 2\alpha\left[1-\cos 2\pi f\right]}$$

$$\mathrm{tg}\left[\theta_g^{+}(f)\right]^2 = \frac{\alpha \sin 2\pi f}{1-\alpha\cos 2\pi f}$$

Filtr 1. řádu - vzad

$$u_n^F = \alpha u_{n+1}^F + (1-\alpha)u_n^A \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$u_n^F = \alpha^n u_0^F + (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j u_{n-j}^A$$

$$u_n^F = \sum_{j=0}^{n-1} g_j^- u_{n-j}^F$$

$$g_j^- = \begin{cases} (1-\alpha)\alpha^j, & \text{pro } j \geq 0 \\ 0, & \text{pro } j < 0 \end{cases}$$

$$u^F = g^- * u^A, \quad \text{kde } g^- = \{g_j^-\}$$

Provedeme Fourierovu transformaci a stejným postupem jako předtím dostaneme:

- pro amplitudu $$A_g^-(f) = A_g^+(f)$$
- pro fázi $$\theta_g^-(f) = -\theta_g^+(f)$$

Dohromady:

Aplikací filtru 1. řádu vpřed a vzad dostaneme filtr s následujícími vlastnostmi:

$$u^{A} = g^{+} * u \,, \quad u^{F} = g^{-} * u^{A}$$

Po Fourierově transformaci:

$$u^{F}(f) = G^{-}(f)\,u^{A}(f) \qquad u^{A}(f) = G^{+}(f)\,u(f)$$

$$u^{F}(f) = \left[G^{-}(f)\,G^{+}(f)\right]u(f) = S(f)\,u(f)$$

Filtr nemění fází, mění amplitudu (nízkofrekvenční filtr):

$$S(f) = \frac{(1-\alpha)^{2}}{(1-\alpha)^{2} + 2\alpha\left[1-\cos 2\pi f\right]} = \frac{(1-\alpha)^{2}}{1 + \frac{\alpha}{(1-\alpha)^{2}}\left[2\sin \pi f\right]}$$

$$0 < S(f) < 1$$

Vlastnosti filtru S:

$$u^F = g^- * (g^+ * u) = (g^- * g^+) * u = s * u \quad ,$$

kde s = {sn}

$$s_{\pm n} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\alpha^{|n|}$$

Jak se dostane výraz pro sn ?

$$s_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^-_k g^+_{n-k}$$

$$s_0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^-_k g^+_{0-k} = \sum_{k=-\infty}^{0} g^-_k g^+_{0-k} = g^-_0 g^+_0 + g^-_{-1} g^+_1 + g^-_{-2} g^+_2 + \dots = (1-\alpha)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g^-_k g^+_{1-k} = g^-_0 g^+_1 + g^-_{-1} g^+_2 + g^-_{-2} g^+_3 + \dots = (1-\alpha)^2 (1+\alpha^3+\alpha^5+\dots)$$

$$= (1-\alpha)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\alpha$$

Další vlastnosti filtru a řady sn:

- Průměr: $E(s_n) = 0$
- Variance: $Var(s_n) = \dfrac{2\alpha}{(1-\alpha)^2}$

Volba parametru α tak, aby {un} a {unF} měly stejnou varianci R2:

$$R^2 = \frac{2\alpha(\Delta x)^2}{(1-\alpha)^2}$$

- Pomocí filtru lze modelovat Gaussův filtr:

$$\underbrace{(s*s*\ldots*s)}_{=(s^{*n})}*u \to \text{Gauss. filtr}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{kde } \sigma^2 = nVar(s)$$

Když chceme filtr aplikovat n-krát, pak volíme α takto:

$$R^2 = \frac{2\alpha n(\Delta x)^2}{(1-\alpha)^2}$$

Algoritmus:

Chceme filtrovat posloupnost {un} Gaussovým filtrem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{d^2}{2\sigma^2}\right]$$

a chceme iterační proceduru použít n-krát:

- Vypočteme parametr α:

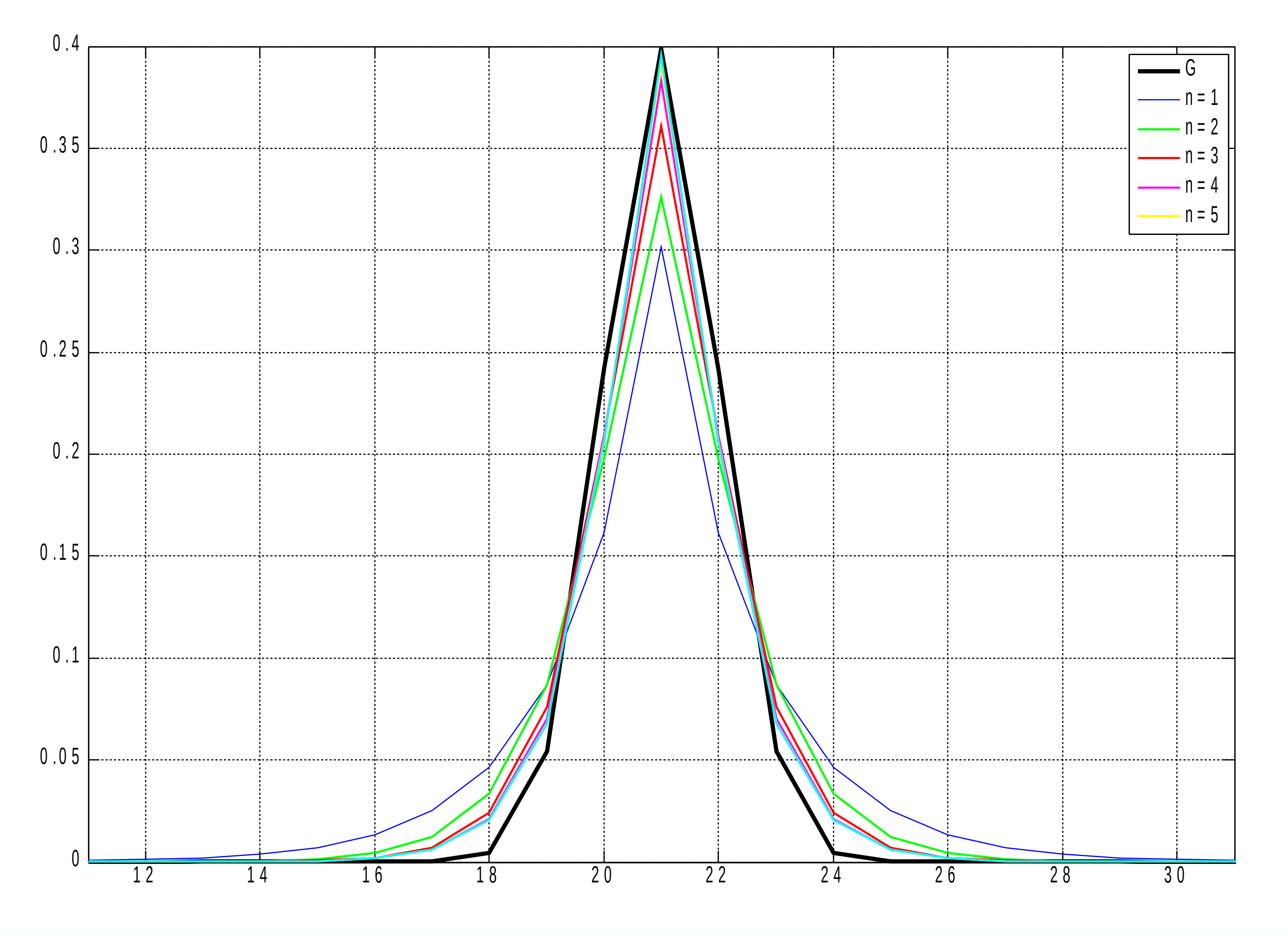
$$\alpha = \frac{R^2 + n(\Delta x)^2 \pm \sqrt{\left(R^2 + n(\Delta x)^2\right)^2 - R^4}}{R^2}$$

- Počítáme pro r=0,1,2,…,n:

uF(0) = u

$$u_k^{F(r+1)} = \sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\alpha^{|n|}u_{k-n}^{F(r)}, \qquad \text{pro } k$$

Příklad:



0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
G
n = 1
n = 2
n = 3
n = 4
n = 5

Rekurzivní filtry vyšších řádů

Nerekurzivní filtr lze vyjádřit:

$$u_k^F \approx \left(1 + \frac{c}{2}\frac{d^2}{dx^2}\right) u(x), \quad \text{pro } x = k\Delta x$$

Řád filtru závisí na diferenční aproximaci operátoru: $\frac{d^2}{dx^2}$

Rekurzivní filtry vyšších řádů

Obdobně lze vyjádřit rekurzivní filtr:

$$u_n^A = \alpha u_{n-1}^A + (1-\alpha)u_n \longrightarrow u_n = \frac{1}{1-\alpha}\left(u_n^A - \alpha u_{n-1}^A\right)$$

$$u_n^F = \alpha u_{n+1}^F + (1-\alpha)u_n^A \longrightarrow u_n^A = \frac{1}{1-\alpha}\left(u_n^F - \alpha u_{n+1}^F\right)$$

$$u_n = u_{n-1}^F - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\left[u_{n-1}^F - 2u_n^F + u_{n+1}^F\right]$$

$$\approx \left[1 - a\frac{d^2}{dx^2}\right] u_n^F(x)\Big|_{x=n\Delta x} \quad \text{, kde } a = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \frac{1}{2}\mathrm{Var}(s_n)$$

Rekurzivní filtry vyšších řádů

Vyjádření nerekurzivního a rekurzivního filtru:

$$u^F \approx \left(1 + \frac{c\, d^2}{2\, dx^2}\right) u(x)$$

$$u \approx \left(1 - \frac{c\, d^2}{2\, dx^2}\right) u^F(x)$$

$$u^F \approx \left(1 - \frac{c\, d^2}{2\, dx^2}\right)^{-1} u(x)$$

Řád filtru závisí na diferenční aproximaci operátoru: $\frac{d^2}{dx^2}$