KOSMO

12.10.2004

Kosmologie

- věda o vesmíru (zabývá se nejvzdálenějšími pozorovatelnými objekty a časově nejvzdálenějšími událostmi
- na vesmír se dívá opiše statisticky (jak popsat model vesmíru).

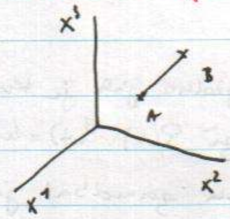
17.2.1600 - upálení Giordana Bruna na hranici v Římě (Campo dei Fiori)

Giordano Bruno: De l'infinito universo i mondi (1584)

- za napsání této knížky byl upálen (hlásal, že vesmír je nekonečný)
- mohlo by se říct, že zde popsal Galileovskou (dnešní Minkovského prostoročas) metriku

tento laický model se užívá dodnes.

Minkovského prostoročas



$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$A = [t, x^1, x^2, x^3]$$

$$B = [(t+dt), (x^1+dx^1), (x^2+dx^2), (x^3+dx^3)]$$

$$i,j = 0,1,2,3 \qquad x^0 = ct$$

opačná sign. než tenzor (Landau-Lipschitz)

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad -\infty < (t, x^1, x^2, x^3) < \infty$$

Minkovského metrika je dobrá, když jsme daleko od zdroje (neuvažujeme gravitační sílu)

- první nejprimitivnější model vesmíru

1) předpoklad, že je tam nějaká látka o hustotě $\rho(t, x^1, x^2, x^3) > 0$
$\rho = 0$ znamená, že vesmír je prázdný! (pro reálný vesmír to nelze předpokládat)
2) $\rho = \text{const} > 0$

protiargumenty - koretidy

Newtonský: 1) Poisson $\Delta\varphi = 4\pi G\rho > 0$

$$0 = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}$$

z $\rho = konst \Rightarrow \varphi - konst$ a získáme $D>0$

Einsteinovy 2) $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ij}$

R_{ij} - Ricciho tenzor (když máme Minkowského metriku

λ - kosmologická konstanta tak Riemannův tenzor je nula)

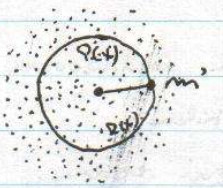
3) $\rho(t) > 0$ vyjde totiž - v 1) 2) rovnicích nikde není čas

je to totiž jako konstanta

$\Rightarrow \varphi$ je konst. a opět spor

máme látku o hustotě $\rho = n(t)\, m$

n - počet částic



pohyb popsán rovnicí (pouze v přímce nahoru dolů)

$\ddot r = -\frac{GM}{r^2}$

tatáž rovnice platí pokud je koule symetrická

a lze ji připodobnit k hmotnému bodu

• sférická slupka

částice nevnímá pole slupky, je jedno jak je těžká

$M = \frac{4}{3}\pi \rho(t) r^3(t)$ musí platit, že $\rho(t) r^3(t) = konst$

v rámci Newtonovské gravitace lze další látku zanedbat jako sférickou slupku

$$\ddot r = -\frac{4\pi G \rho r}{3}$$

② $\frac{\ddot r(t)}{r(t)} = -\frac{4\pi G \rho(t)}{3}$ $\qquad \rho r^3 = konst > 0$

• v rámci Newtonovské teorie musí hustota záviset alespoň na čase - vesmír se musí buď rozpínat nebo smršťovat látka nemůže stát

$\ddot r = -\frac{GM}{r^2} \qquad \ddot r \dot r = -\frac{GM \dot r}{r^2} \qquad \ddot r \overset{<0}{\neq} 0 \longrightarrow \dot r \neq 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\dot r)^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{GM}{r}\right)$$

$\frac{\dot r^2}{2} - \frac{GM}{r} = konst$ o rozměru rychlost na druhou

$= -\frac{kc^2}{2}$ kvůli konvergenci

k je libovolné

KOSMO

(3) $\dot{r}^2 + kc^2 = \frac{2GM}{r} = \frac{8G\pi\varrho r^2}{3}$

z rovnic 1, 2, 3 máme jen dvě nezávislé
po ... : (ZZEnergie) $\frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2} kmc^2$
$E_k \quad E_p = -kE$

• závěr - teoreticky nejde tento model popsat

(4) Olbersův paradox (další arg. proti) 1826
když je na nebi nekonečně mnoho hvězd, proč je v noci tma?
máme hvězdy o zářivém výkonu L $[L] = \frac{erg}{s}$
všechny hvězdy mají stejný zářivý výkon
$p = \frac{L}{4\pi r^2}$ p... tok záření
$[p] = \frac{erg}{s \cdot cm^2} = \frac{W}{m^2}$
kolik je hvězd ve slupce $dN(r) = n\, dV(r) = n \frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)$ $(r+dr^3 - r^3)$
$\Rightarrow dN = n \cdot 4\pi r^2 dr$
zjednodušení pro velmi tenkou slupku

celkový výkon hvězd z malé slupky?
$dp = \frac{L}{4\pi r^2} dN(r) = \frac{Ln}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = Ln\, dr$
$p_{total} = \int_0^\infty L n(r)\, dr$ → divergence
síla p klesá se čtvercem vzdálenosti, ale počet hvězd se zčtvrtnásobuje

• oprava modelu - všechny hvězdy nemají stejné L
(to nám vůbec nepomůže)

• Eukl. prostor - homogenní a isotropní
• Lorentzovu transformaci lze interpretovat jako rotaci mezi časovou a prostorovými souřadnicemi
• nehomogenní, isotropní - je to sférický symetrický prostor
• skutečný vesmír (naše galaxie) - není ani isotropní ani homogenní
• za Hubbla bylo zjištěno, že některé objekty jsou mnohem dál než se myslelo.
• není stat. test, který by potvrdil homogenitu či anizotropii v prostoru

3

- v čase homogenita není, izotropie už vůbec ne
- hom a izotropie v prostoru jakž-takž je
- van Maanen (1928) - tvrdil, že naměřil rotaci v přiční galaxii (argument, že galaxie musí být blízko, proto rotace by musela být nedosažitelná)

  ... opět měřil...
- rudý posun - 1912 - Sliper - pozorování u 36 hvězd rudý posun a u pěti modrý
- Bernoulliho rozdělení -

  $0 < p < 1$ — N ... počet pokusů

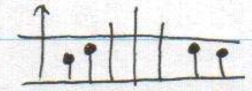
  $\bar{n} = N \cdot p$ — $\bar{n}$ ... kolik očekáváme výsledků pro možnost

  $\sigma^2 = Np(1-p)$

  $\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = (N, p)$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots, N$

  $\sum_{n=0}^{N} p_k(N,k) = 1 \Rightarrow$ pravděpodobnost všech možností

  hladina významnosti



- ~~pravděpodobnost~~ součet „tiků" - pravděpodobností menších než hladina je pravděpodobnost toho, že zamítneme náhodu a prohlásíme to za chybu.
- ad ten příklad

  $Np = 20,5$

  $\sigma^2 = 10,25$

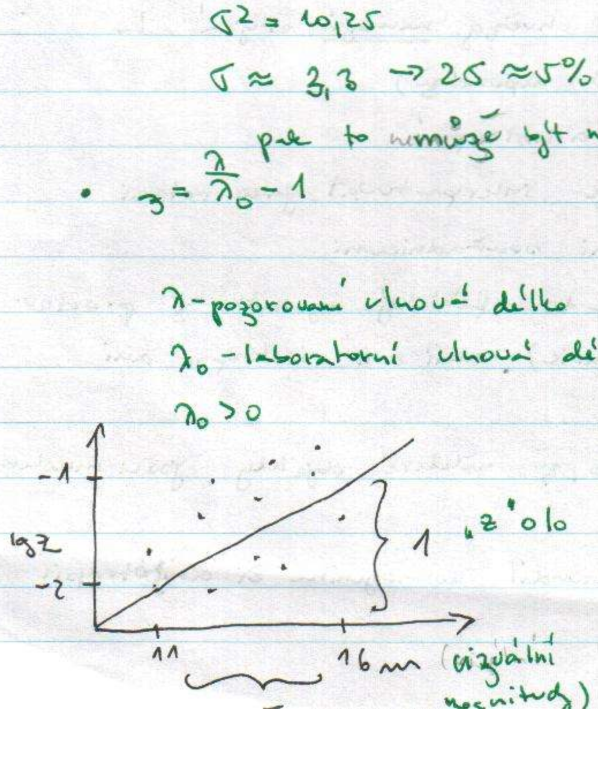
  $\sigma \approx 3,3 \rightarrow 2\sigma \approx 5\%$ $\Rightarrow$ není to náhoda (když chyba je $> 5\%$ pak to nemůže být náhoda)
- $z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1$ $\quad z \in (-1; \infty)$

  $z \in (-1, 0)$ modrý posuv

  λ - pozorovaná vlnová délka $\quad z \in (0, \infty)$ rudý posuv

  λ_0 - laboratorní vlnová délka

  $\lambda_0 > 0$



Hubble (20. léta) naměřil lineární korelaci mezi log z a m (metoda nejmenších čtverců)

KOSMO

dodnes stejné pozorované vybledly (z porostlé olo, m o 5)

$m = 5 \log z + const$ ($\tilde{m}$)

Pogson: $m - M = -5 + 5 \log r$ — hecien pc

r - vzdálenost objektu v pc

m - zdánlivá magnitudo

M - absolutní magnituda — vzuh

$m - M = 25 + 5 \log r$ [Mpc]

$M + 25 + 5 \log r = 5 \log z + \tilde{m}$ ← odečíst ze z grafu

$$\frac{M}{5} + 5 + \log r = \log z + \frac{\tilde{m}}{5}$$

$$\log r = \log z + \frac{\tilde{m} - M - 25}{5}$$

$$r = z \cdot 10^{\left(\frac{\tilde{m} - M - 25}{5}\right)} \quad \text{v Mpc}$$ → (nemusí se logaritmovat tak to uděláme 1 Mpc)

problém, stálé je, že M závisí na z.

$\Rightarrow H_0 = cz = c r\, 10^{\left(\frac{\tilde{m} - M - 25}{5}\right)}$

z grafu

$$r = \frac{c}{H_0} z \qquad [H_0] - \frac{km\ s}{Mpc} \qquad [c] = km\cdot s$$

cz ... rychlost vzdalování je úměrná vzdálenosti

26.10.2004

Úvod do obecné relativity

obecná relativita - teorie gravitace

interakce • jaderná

• el-mag

• gravitace

kosmologie - popsat prostoročas v souladu s teorií gravitace.

Dodnes nebyla OTR vyvrácena, ani experimentem ani teorií

problém - kosmologická konstanta či bez ní?

Podstata OTR - Einsteinovy rovnice

• $R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \frac{G}{c^4}$

$T_{\mu\nu}$ - tenzor energie a hybnosti

$R_{\mu\nu}$ - Riemannův tenzor křivosti: Umím metriku, její $\frac{d}{d}$ a $\frac{d^2}{d^2}$.

- fyz. smysl - vyjádření nehomogenit pole. $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$

* $g_{\mu\nu}$ - metrický tenzor. V STR - symetrický. 16 složek - symetrický
Λ - kosmologická konstanta

* • znalost struktury časoprostoru - metrika. 10 složek změní díky symetrii
ale! $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{\mu=0}^{3} g_{\nu\mu}\, dx^\mu dx^\nu$

□ • Obecná relativita - zakřivení prostoročasu - díky $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$
snižování a zvyšování indexu: $g_{\mu\alpha} R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = R_{\mu\beta\gamma\delta}$

• ~~...~~ prohození VV → změní se znaménko před R.

$$R_{\mu\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\mu\gamma\delta} = -R_{\mu\beta\delta\gamma} = R_{\beta\mu\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\mu\beta}$$

Bianchiho identity (zúžení)

$$R_{\mu\beta\gamma\delta} + R_{\mu\gamma\delta\beta} + R_{\mu\delta\beta\gamma} = 0$$

• V N rozměrném prostoru $\frac{1}{12}N^2(N^2-1)$ nezávislých proměnných

$R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = R_{\mu\nu}$ - vysčítání přes 1. a 3. index = zúžení.

Ricciho tenzor

pokud vezmeme Ricciho tenzor R^σ_σ a vysčítáme ho,
dostaneme Ricciho ~~...~~ skalár $[1/cm^2]$

•

$g_{\mu\nu}$ - Minkowski

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \qquad x^0 = ct$$

metrika má tvar $\qquad -\infty < t, x^1, x^2, x^3 < \infty$

$$g_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

v kartézských souřadnicích

• jiné souřadnice: $x^1 = r\sin\vartheta\cos\varphi \qquad r \in (0;\infty)$

$x^2 = r \sin\vartheta \cos\varphi \qquad \vartheta \in [0;\pi]$

$x^3 = \cos\vartheta \qquad \varphi \in [0;2\pi]$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

- mink. tenzor v sférických souřadnicích

gravitace → tenzor není minkovského; není gravitace → je mink. prostoročas.

KOSMO

přítomnost gravitace: $g_{\mu\nu}(x)\,dx^{\mu}dx^{\nu}$

$-g_{\mu\nu}-$ 10 nezávislých proměnných funkcí obecně 4 veličin

pokud všechny komponenty Riemanova tenzoru křivosti = 0 pak je to minkowského prostoročas. nikdy $\neq 0$, není nezávislé na souřadných splněných.

$T_{\mu\nu}$ - to jsou zdroje (v rovnici na pravé straně)

na levé straně rovnice - pohyb.

obecně: lze znamenat počet nezávislých proměnných v $g_{\mu\nu}$, vhodnou volbou souřadnic. lze přijít na 6 veličin (jsou fce všech 4 souřadnic).

někdy: díky symetrii lze snižovat dál, ale již ne obecně.

$T^{\mu\nu}$ - pro makroskopické veličiny

$$T^{\mu\nu} = (c^2\rho + P)u^{\mu}u^{\nu} - Pg^{\mu\nu} + \ldots$$ (vyšší řády ...)

P, ρ - skaláry, fce 4 souřadnic

u^{μ}, u^{ν} - rychlosti

P - tlak

$$[\Lambda] = \left[\frac{G\rho}{c^2}\right] = \left[\frac{PG}{c^4}\right]$$

$[\rho c^2] = [P]$

$[P] = \frac{N}{m^2} = \frac{Nm}{m^3} = \frac{J}{m^3}$

$[\rho G] = s^{-2}$

$\Rightarrow$

$[\Lambda] = m^{-2}$

vektory - kontravariantní - index nahoře

kovariantní - forma - index dole

Přechod mezi ~~souřadnicemi~~

$x^i = \bar{x}^i(x)$ funkcí všech 4 starých.

teoreticky to jde i nazpátek

$x^i = x^i(\bar{x})$

kovar. $\bar{A}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} A_{\alpha\beta}(x)$

$\bar{A}_\mu(\bar{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}_\mu} A_\alpha(x)$

kontrav.

$\bar{A}^{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta}(x)$

smíšený:

$\bar{A}^\mu{}_\nu(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} A^\alpha{}_\beta(x)$

kovariantní derivace $A^i(x)_{;j} = A^i{}_{,j} + \Gamma^i_{jk} A^k$ – transformuje se jako tenzor

Christoffel

$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(-g_{jk,i} + g_{ij,k} + g_{ik,j}\right)$ i,j,k = 0,1,2,3

$\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = g^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\nu\sigma}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}$$

inverzní matice

$$g^{\mu\nu} \quad \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{r=0}^{3} g_{\mu r} g^{r\alpha} = g_{\mu r} g^{r\alpha} = \delta_\mu{}^\alpha = \delta_\mu^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

pouze u sym. tenzorů

Riemannův tenzor křivosti pomocí Γ

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}$$

můžu prohodit pořadí Γ v násobení

a můžu prohodit 2. a 3. index – symetrie.

KOSMO

metrický tenzor je kovariantní konstantní

$$g_{ij;k} = 0$$

vysčítání Riemannova tenzoru na Ricciho

$$\delta^\alpha_\sigma R^\sigma{}_{\mu\alpha\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = -R^\sigma{}_{\mu\nu\sigma}$$

- derivace tenzoru 2. řádu na 3. řádu

$$A_{\mu\nu;\sigma} = A_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} A_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma} A_{\nu\alpha}$$

Ricciho tenzor

- jak se definuje pomocí sčítání

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} \qquad A^\mu{}_\mu = 0$$

- sčítáme co je na diagonále → tj. nula.

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^l{}_{ik,l} - \Gamma^l{}_{il,k} + \Gamma^l{}_{ik}\Gamma^m{}_{lm} - \Gamma^m{}_{il}\Gamma^l{}_{km}$$

přepsáno do alfabety

$$= \Gamma^\sigma{}_{\alpha\nu,\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\sigma,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}\Gamma^\beta{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha}$$

matematicky platí $\underbrace{\left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R\right)}_{\text{Einsteinův tenzor}}{}_{;\mu} = 0$

$$\Big(\underbrace{R^\mu{}_\nu + \tfrac{1}{2}\delta^\mu_\nu R}_{0} + \underbrace{\Lambda}_{\text{konstanta}}\delta^\mu_\nu\Big)_{;\mu} = 0$$

kovariantní derivace podle μ – divergence.

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$$

= zákon zachování energie

z Einsteinovi rovnice se musí dát přijít zpět k Newtonovi:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

2.11.2004

problémy konvence

1. $g_{\mu\nu}$ $(+,-,-,-)$
2. Riemann : $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \pm \Gamma^{\mu\nu}{}_{\sigma,\rho} \mp \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho,\mu} \pm \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} \mp \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho}$
3. Ricci : $R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\mu\sigma}$ $\quad (R_{\nu\sigma} = R^{\mu}{}_{\nu\sigma\mu})$
4. ER: $\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}_{=0} - \underbrace{\lambda g_{\mu\nu}}_{\neq 0} = + \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}}_{\neq 0}$

s hmotou

Minkowského metrika

- vhodná pro vesmír bez hmoty $(T_{\mu\nu}=0)$, bez λ
- pokud je hmota, $T_{\mu\nu} \neq 0$

úkol kosmologie

- popsat celou pozorovatelnou část vesmíru konzistentního
- oteží gravitační interakce

? symetrie ? : který prostoročas je maximálně symetrický ve 4 rozměrech.

Minkowského (Euklidovský prostor a čas $ct \in (-\infty;\infty)$)

existují další dva stejně symetrické

Variety – rozměr $N = 2,3,4$ $\quad \mu,\nu = 1,2,\dots N$

– metrika $g_{\mu\nu}$; $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu$

kovariantní tenzory: $\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x)$, $x^\mu = x^\mu(\bar{x})$ (obecná transformace)

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\lambda\sigma}(x)$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \bar{g}_{\lambda\sigma}(\bar{x})$$

symetrie $\Leftrightarrow$ tvar funkcí $g_{\mu\nu}$ zůstává stejný při transformaci souřadnic

$\bar{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x)$ kde $|\varepsilon| \ll 1$ (infinitez. malá tr.)

- kde ξ^μ KILLINGŮV VEKTOR

$$\frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^\mu} = \delta^\lambda_\mu + \varepsilon \xi^\lambda \quad \text{připravím derivace}$$

$$g_{\lambda\sigma}(\bar{x}) = g_{\lambda\sigma}(x) + \varepsilon \xi^\mu g_{\lambda\sigma}(x)$$

nová metrika (inf. malé tr.)

spočtu: $g_{\mu\nu}(x) = (\delta^\lambda_\mu + \varepsilon \xi^\lambda{}_{,\mu})(\delta^\sigma{}_\nu + \varepsilon \xi^\sigma{}_{,\nu})(g_{\lambda\sigma} + \varepsilon \xi^\rho g_{\lambda\sigma,\rho}) =$

Taylorův rozvoj

$= g_{\mu\nu} + \varepsilon(\xi^\lambda{}_{,\mu} g_{\lambda\nu} + \xi^\sigma{}_{,\nu} g_{\mu\sigma} + \xi^\rho g_{\mu\nu,\rho}) +$
$+ \varepsilon^2(\xi^\lambda{}_{,\mu}\xi^\sigma{}_{,\nu} g_{\lambda\sigma} + \xi^\lambda{}_{,\mu}\xi^\rho g_{\lambda\nu,\rho} + \xi^\sigma{}_{,\nu}\xi^\rho g_{\mu\sigma,\rho}) + \varepsilon^3 \xi^\lambda{}_{,\mu}\xi^\sigma{}_{,\nu} \dots$
$\dots \xi^\rho g_{\lambda\sigma,\rho}$

KOSMO

podmínky rovnosti:

① $g_{\lambda\nu}\xi^{\lambda}{}_{,\mu} + g_{\mu\lambda}\xi^{\lambda}{}_{,\nu} + g_{\mu\nu,\lambda}\xi^{\lambda} = 0$

$(g_{\lambda\nu}\xi^{\lambda})_{,\mu} - \xi^{\lambda} g_{\lambda\nu,\mu} + (g_{\mu\lambda}\xi^{\lambda})_{,\nu} - g_{\mu\lambda,\nu}\xi^{\lambda} + g_{\mu\nu,\lambda}\xi^{\lambda} = 0$

$\xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi^{\lambda}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}) = 0$ kde $-(\ ) = 2\Gamma$

$\xi_{\nu,\mu} + \xi_{\mu,\nu} - \xi^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu} - \xi^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu\nu} = 0$

$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0$ (K)

②, ③ (členy s $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ zanedbatelné (členy menšího řádu))

symetrie variety ⟺ existence Killingova vektoru splňující podmínky (K)

? existuje více Killingových vektorů, aby ${}^{I}\xi^{\mu} \neq \alpha\, {}^{II}\xi^{\mu}$

? kolik Killingových vektorů (repr. různé transformace) (LN) existuje pro $N=4$

$$\xi^{\mu}(x) = \xi^{\mu}(X) + \xi^{\mu}(X)_{,\nu}(x^{\nu} - X^{\nu}) + \tfrac{1}{2}\xi^{\mu}(X)_{,\nu\lambda}(X^{\nu} - x^{\nu})(X^{\lambda} - x^{\lambda}) + \dots$$

obyčejné: ${}^{I}\xi^{\mu}(X) = [1,0,0,0]$, ${}^{II}\xi^{\mu}(X) = [0,1,0,0]$ … N

nenulové v 1. derivaci: ${}^{N+1}\xi^{\mu}(X) = 0^{\mu}$, ale ${}^{N+1}\xi^{\mu}(X)_{,\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ N^2

s dalšími derivacemi by počet LN^2 vektorů šel až do ∞.

komutátor: $A_{\mu;\nu;\sigma} - A_{\mu;\sigma;\nu} = -R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma}A_{\lambda}$

užití: $A_{\mu;\nu;\sigma} - A_{\mu;\sigma;\nu} + A_{\nu;\sigma;\mu} - A_{\nu;\mu;\sigma} + A_{\sigma;\mu;\nu} - A_{\sigma;\nu;\mu} = 0$

(PS-Bianchi)

$(\xi_{\mu;\nu;\sigma} - \xi_{\nu;\mu;\sigma}) + (A_{\sigma;\mu;\nu} - A_{\mu;\sigma;\nu}) + (A_{\nu;\sigma;\mu} - A_{\sigma;\nu;\mu}) = 0$

$2(\xi_{\mu;\nu;\sigma} + \xi_{\sigma;\mu;\nu} + \xi_{\nu;\sigma;\mu}) = 0$

$\xi_{\mu;\nu;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\sigma;\nu;\mu}) = 0$

$\xi_{\sigma;\nu;\mu} = -R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\lambda}$

3. derivace je určena funkcí

$\xi_{\sigma;\nu;\mu;\rho} = (-R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma}\xi_{\lambda})_{;\rho}$ | 4. derivace je dána fcí a 1. der

závěr: 2. a vyšší derivace nejsou nezávislé na fci a 1. derivaci

lze vypočítat z metriky, Riemanna, fce, 1. der

kolik z N^2 prvních derivací je nezávislých

$\xi^{\mu}{}_{;\nu}(X) = -\xi^{\nu}{}_{;\mu}(X)$ z vlastnic Christoffelových symbolů

$\xi^{\mu}{}_{;\mu}(X) = 0/1$ z podmínky pro Killingovy vektory

celkem $N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}\Big|_{N=4} = 10$ Killingů druhy symetrií : homogenita : 4 translační symetrie

$$\xi^{\mu} = [0; 1; 0; 0] \quad \text{např.}$$

isotropie - 6 rotační symetrií

$$\xi^{\mu} = 0^{\mu} \text{, ale } \xi^{\mu}{}_{,\nu} \neq 0$$

zaměnění 2 souřadnic

„steady state" model vesmíru s časoprostorem mající všech symetrie

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\text{konst}}{N(N-1)} \left(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} \right)$$

dává : ∀ skalár ... konstanta

∀ vektor ... nulové

∀ tensor ... symetrický

9.11.2004 KOSMO

N → dimenze   N=2,3,4

1. platí: $R_{\mu\nu\varrho\sigma} = R(g_{\mu\varrho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\varrho}) \frac{1}{N(N-1)}$

(maximálně symetrický prostoročas – platí vždy)

(pro N=2 platí vždy)

2. $R = \mathrm{const}$

(N=2,3,4 pouze, když je ta symetrie)

pro Ricciho tenzor z toho plyne

$$R_{\nu\sigma} = R^{\varrho}{}_{\nu\varrho\sigma} = R(\delta^{\varrho}_{\varrho} g_{\nu\sigma} - \delta^{\varrho}_{\sigma} g_{\nu\varrho}) \frac{1}{N(N-1)} =$$

$$= R(N g_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}) \frac{1}{N(N-1)} = R/N \, g_{\nu\sigma} = R_{\nu\sigma}$$

pro Ricciho skalár

$$R = \frac{R}{N} \delta^{\nu}_{\nu} = R$$

$[R] = cm^{-2}$

jak vypadá metrický tenzor?

R=0 → Euklidovský prostor, diagonální metrika

pokud uhodneme 1 tenzor, co splňuje 1. → máme vše

$g_{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}$ $\Gamma_{\mu\nu\varrho}$ .... $R_{\mu\nu\varrho\sigma}$, R

N=2,3 $$\boxed{dl^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)} \quad N=3$$

kde $K N(N-1) = R$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ N=2

K=0 → Euklidovský 3D ve sf. souřadnicích

$x^1 = r \sin\vartheta \cos\varphi$ $-\infty < x^1, x^2, x^3 < +\infty$

$x^2 = r \sin\vartheta \sin\varphi$ $r \in [0; +\infty]$

$x^3 = r \cos\vartheta$ $\vartheta \in [0, \pi]$

$\varphi \in [0; 2\pi)$

} maximální možný

$dl^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

$[K] = \text{vzdálenost}^{-2}$

$K>0 \quad \Rightarrow \quad R < \frac{1}{\sqrt{K}}$

max. možný def. obor ϑ, φ stejný; $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{K}})$

matematicky: „3D koule vlažená do 4D prostoru"

$\frac{1}{\sqrt{K}} = L > 0$

L konstanta $[L] = \text{cm}$

předp. $dl^2 = dw^2 + dr^2 + \underbrace{r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)}_{d\Omega^2}$ $\quad -\infty < w < \infty$

dva body A, B - jejich vzdálenost

$A = [w, r, \vartheta, \varphi]$

$B = [(w+dw)(r+dr)(\vartheta+d\vartheta)(\varphi+d\varphi)]$

definice plochy 3D koule v 4D

$w^2 + r^2 = L^2 \quad \Rightarrow r^2 \leq L^2$

$2w\,dw + 2r\,dr = 0$

$dw = \frac{-r\,dr}{w} = -\frac{r\,dr}{\sqrt{L^2 - r^2}}$

$dl^2 = \frac{r^2 dr^2}{L^2 - r^2} + dr^2 + r^2 d\Omega^2$

$dl^2 = \frac{(r^2 + L^2 - r^2) dr^2}{L^2 - r^2} + r^2 d\Omega^2$

$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{L^2}} + r^2 d\Omega^2$ - totéž jako

$\frac{r}{L} = \sqrt{K} r = \tilde{r}$ dosadíme do původního

$dl^2 = \frac{1}{K}\left(\frac{d\tilde{r}^2}{1-\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2\right)$

$\int \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1-\tilde{r}^2}} = \chi \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$= \arcsin \tilde{r}$

$\tilde{r} = \sin \chi$ - již bezrozměrné

$$\boxed{dl^2 = \frac{1}{K}\left[d\chi^2 + \sin^2\chi \, d\Omega^2\right]}$$

def. obor χ

$\tilde{r} \; [0; 1]$

$\chi \; [0; \frac{\pi}{2}]$

ale z $\quad w^2 + r^2 = L$

$r = L \sin \chi \quad > 0$

$w = L \cos \chi$

$\boxed{\text{pak ovšem } 0 \leq \chi \leq \pi}$

tento je nejjednodušší používat z mat. hlediska.

KOSMO

$K<0$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{|K|}}\right] = \frac{1}{\alpha} = cm$

$-K = \alpha^2$

$\alpha = \sqrt{-K}$

r – může běžet kamkoliv $0<r<\infty$

⇒ připomíná Euklidovský prostor, obor zůstává stejný

↳ ale není Euklidovská geometrie

matematici (Bolyai – Lobačevskij) 1820-30

$\alpha r = \tilde{r}$

$$dl^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{d\tilde{r}^2}{1+\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2\right) = \frac{1}{-K}\left(\frac{d\tilde{r}^2}{1+\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsinh} x$$

značení sh / sinh

$\mathcal{X} = \sinh x \qquad \mathcal{X} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$1 + \sinh^2 \chi = \cosh^2 \chi$

$$\int \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1+\tilde{r}^2}} = \chi \qquad \tilde{r} = \sinh \chi$$

$0 \le \tilde{r} < \infty$

$0 \le \chi < \infty$

$$dl^2 = \frac{1}{-K}\left(d\chi^2 + sh^2 \chi \, d\Omega^2\right)$$

$K=0$ $\quad r = r_0 \tilde{r} \qquad r_0 = konst$

$[r_0] = cm$

$$\Rightarrow dl^2 = r_0^2\left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega\right)$$

$N=4$ – konkrétně asi příště, teď co plyne z předchozího (asi)

(I) $S(x) = konst$

max. symetrická N-dim varieta – všechny skaláry jsou konstanty

$S(x+y\xi) = S(x) + \varepsilon \xi^{\mu} S_{,\mu}$ $\quad$ ($S_{,\mu} = 0$)

(II) $A^{\alpha}(x) = 0$

všechny vektory jsou identicky nula (pokud Killingových je max. počet)

15

III. $B^{\mu\nu} = B^{\nu\mu} = f\, g^{\mu\nu}$

f = konstanta

$$B^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(B^{\mu\nu} + B^{\nu\mu}\right) + \frac{1}{2}\left(B^{\mu\nu} - B^{\nu\mu}\right)$$

symetrické antisym

$$T_{\mu\nu} = \underbrace{(\varrho c^2 + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}}_{\text{id. kapalina}} + \text{další členy}$$

(viskozita, ...)

jak se napíše když ??

$$T_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}(-p g_{\mu\nu})$$

$$\left(\frac{R}{4} - \frac{R}{2}\right) g_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G p}{c^4} g_{\mu\nu} = 0$$

$$-\frac{R}{4} = \lambda - \frac{8\pi G p}{c^4}$$

$[\lambda] = cm^{-2}$

$[p] = \frac{N}{m^2} = \frac{1}{m\,s}[c^2\varrho]$

$[G\varrho] = s^{-2}$

$$R = \frac{32\pi G p}{c^4} - 4\lambda$$

$$(\varrho c^2 + p) = 0 \quad \text{pak musí} \quad \varrho c^2 = -p$$

$\rightarrow$ fyz. nesmysl

řešení E. rov. s nulovou pravou stranou a $\lambda \neq 0$

$\lambda > 0$ de Sitter

$\lambda < 0$ anti de Sitter

16.11.2004 KOSMO

$N=3$

$$dl^2 = dw^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$-\infty < x_1, x_2, x_3, w < \infty$$

$x^1 = r \sin\chi \sin\vartheta \cos\varphi$ $\chi \in [0,\pi]$

$x^2 = r \sin\chi \sin\vartheta \sin\varphi$ $\vartheta \in [0,\pi]$

$x^3 = r \sin\chi \cos\vartheta$ $\varphi \in [0, 2\pi]$

$w = r \cos\chi$ $r \in [0; \infty)$

když to dosadíme.

$$dl^2 = dr^2 + r^2 (d\chi^2 + \sin^2\chi (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2))$$

$N=3 \Rightarrow \chi = \frac{\pi}{2} = \text{const.}$

$N=2 \Rightarrow \chi = \frac{\pi}{2}; \vartheta = \frac{\pi}{2}$ konstanty

definice koule

$r = R = \text{const} > 0 \Rightarrow dr = 0$

$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (w)^2 = R^2 > 0$ KARTÉZSKÉ

vazba

$2(x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 + w\,dw) = 0$

$$dw = -\frac{x^1 dx^1 + dx^2 x^2 + x^3 dx^3}{\sqrt{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}}$$

vzdálenost bodu na kouli:

$$dl^2 = R^2 ((d\chi)^2 + \sin^2\chi (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2))$$

zavést souřadnici

$R \cdot \sin\chi = b$ $r \in [0, R]$

musí se zavést $\chi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$R \cos\chi \, d\chi = db$

~~[illegible]~~

$$R\, d\chi = \frac{db}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{R^2}}}$$

$$dl^2 = \frac{db^2}{1 - \frac{b^2}{R^2}} + b^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)$$

17

$N=3$

$\chi = \frac{\pi}{2} = konst \qquad w = 0$

$dl^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi)$

$R^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$

$-x^3 dx^3 = x^1 dx^1 + x^2 dx^2$

$dx^3 = -\frac{x^1 dx^1 + x^2 dx^2}{\sqrt{R^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}}$

$R \sin \vartheta = b$

$dl^2 = \frac{db^2}{1 - \frac{b^2}{R^2}} + b^2 d\varphi^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2)$

POKUS – SNAŽIVÉHO STUDENTA

$B = R \cos \chi \qquad -R \leq B \leq B$

$dB = -R \sin \chi \, d\chi$

$R d\chi = -\frac{dB}{\sin \chi} = -\frac{dB}{\sqrt{1 - \frac{B^2}{R^2}}}$

$dl^2 = \frac{dB^2}{1 - \frac{B^2}{R^2}} + (R^2 - B^2)(\qquad)$

„by se ukázalo, že prostor musí být popsán touto metrikou až do π-úhlu ⇒ vesmír je uzavřený a lze spočítat objem vesmíru"

$N=2$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$

$i,j = 1,2$

$S = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{g}$

$S = R^2 \, 2\pi \, [-\cos\vartheta]_0^{\pi}$

$S = 4\pi R^2$

$N=3$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \sin^2\chi \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$

$i,j = 1,2,3$

$g = R^6 \sin^4\chi \sin^2\vartheta$

$\sqrt{g} = R^3 \sin^2\chi \sin\vartheta$

$S_3 = R^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_0^{\pi} \sin^2\chi \, d\chi$

KOSMO

$$S_3 = 4\pi R^3 \int_0^\pi \sin^2\chi\, d\chi =$$

$$= 4\pi R^3 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R^3$$

→ je konečný!

(pozor na meze!)

3 rozměrný Euklidovský prostor lze získat tak, že $w = 0 =$ konst.

metrika: Bolyai – Lobatchevskij

$$dl^2 = -dw^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \qquad \vartheta \in [0;\pi]$$

$$x^1 = R \cdot \sinh\chi \sin\vartheta \cos\varphi \qquad \chi \in [0;\infty]$$

$$x^2 = R \sinh\chi \sin\vartheta \sin\varphi \qquad \varphi \in [0;2\pi]$$

$$x^3 = R \sinh\chi \cos\vartheta \qquad r \in [0;\infty)$$

$$w = R \cosh\chi$$

„PSEUDO EUKLEIDOVSKÁ METRIKA"

$$dl^2 = -dr^2 + r^2(d\chi^2 + \sinh^2\chi\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2))$$

$$R \sinh\chi = b \qquad b \in [0;+\infty]$$

$r =$ konst (koule)

$$w^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = r^2 = R^2$$

člen $-dr^2$ zmizí (a to jsme přijmuli minule)

$$R \cosh\chi\, d\chi = db \qquad \cosh(\chi) = 1 - \sinh^2\chi$$

$$R\, d\chi = \frac{db}{1+\frac{b^2}{R^2}}$$

$$dl^2 = \frac{db^2}{1+\frac{b^2}{R^2}} + b^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

$$k < 0 \qquad -k = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{b}{R} = \tilde{b}$$

$$dl^2 = \frac{R^2 d\tilde{b}^2}{1+\tilde{b}^2} + R^2 \tilde{b}^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

$N=4$ Minkowski $R_{\mu\nu\sigma\rho}=0$ $R=0$ $R_{\mu\nu}=0$

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi)^2$$

$$t \in (-\infty; \infty)$$
$$r \in (0; \infty)$$
$$\vartheta \in [0, \pi]$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

pro max. symetrické prostoročasy

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \underbrace{\frac{R}{N(N-1)}}_{12} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi b}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} = -p g_{\mu\nu}$$

$$0 = (\Lambda + 8\pi \rho b / c^4) g_{\mu\nu}$$

$$0 = (\Lambda - \frac{8\pi\rho b}{c^4}) g_{\mu\nu}$$

$$0 = \Lambda - \frac{8\pi b p}{c^4} = \tilde{\Lambda} - \text{konst.}$$

$\Lambda = 0$ není co řešit

$\Lambda \neq 0$

$R<0$ $\frac{R}{12} = -K$ $[cm^{-2}]$

$k>0$

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4} g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{4} g_{\mu\nu} = -3K g_{\mu\nu}$$

toto dosadíme

$$T_{\mu\nu} - (\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

$$\frac{R}{4} g_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{-8 b \pi p}{c^4} g_{\mu\nu}$$

$$-R/4 - (\Lambda - \frac{8\pi b p}{c^4}) = 0$$

$$+3K = \Lambda - \frac{8\pi b p}{c^4} = \tilde{\Lambda}$$

$$K = \frac{\tilde{\Lambda}}{3}$$

KOSMO

⇒ „kosmologickou konstantu interpretovat jako tlak vakua"

$R<0$ $\boxed{\text{de Sitter}}$ (model)

– vztah mezi R, Λ, p

• pravo – vakuum

• levo – kladné Λ

pokud trefíme: $R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{12}\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right)$

ad hoc ⇒ máme všechno. poloměr, není řešením

4D $R<0$ r $ds^2 = c^2dt^2 - \frac{1}{k}\cosh^2(\sqrt{k}ct)\underbrace{\left(d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right)}_{\text{koule}}$

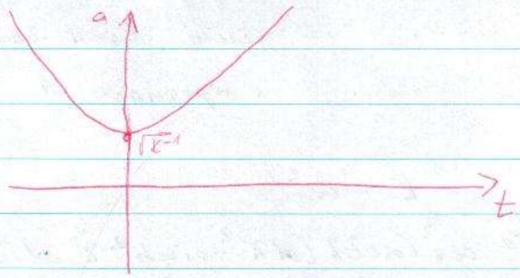
⇒ $k>0$; $\tilde{\Lambda}>0$.

• prostorová část

$-\infty < t < \infty$

$\chi \in [0, \pi]$

$a(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cosh(\sqrt{k}ct)$



{Hawking–Ellis 1973} – učebnice

zavedeme souřadnice

$\Psi = \cosh(\sqrt{k}ct)\cos\chi + \sinh(\sqrt{k}ct)$

$r = \frac{1}{\gamma\sqrt{k}}\cosh(\sqrt{k}ct)\sin\chi$ $[r] = m$

$\chi \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$t \in [0; \infty)$

lze spočítat

$c^2dt^2 - \frac{1}{k}\cos^2(\sqrt{k}ct)d\chi^2 = \frac{d\gamma^2}{k\gamma^2} - \gamma^2 dr^2$

$ds^2 = \frac{d\gamma^2}{k\gamma^2} - \gamma^2\left(dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right)$

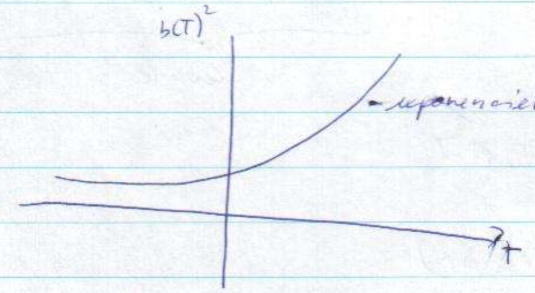
$$\int \frac{d\gamma}{\sqrt{k}\,\gamma} = cT$$

$$\ln \gamma = \sqrt{k}\,c\,(T-T_0) \Rightarrow \gamma = e^{\sqrt{k}\,c\,(T-T_0)}$$

$$r = r_0\tilde{r} \qquad r_0 = \mathrm{const}$$

$$ds^2 = \underbrace{c^2 dT^2 - r_0^2 e}_{b(T)^2}{}^{2\sqrt{k}c(T-T_0)} \underbrace{(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2)}_{\text{EUKLIDOVSKÉ}}$$

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$



vesmír se rozpíná

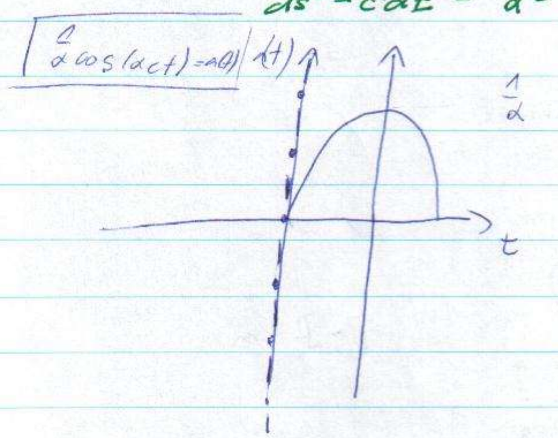
Anti de Sitter — řešení Einst. rovnic - vakuový s zápornou Λ

$R>0$ $\qquad R/12 = -k$

$k<0$ $\qquad \Rightarrow \Lambda < 0$

$$k = -\alpha^2$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{1}{\alpha^2}\cos^2(\alpha c t)\,(d\chi^2 + \sinh^2\chi\, d\Omega^2)$$



[illegible]

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha c t \le \frac{\pi}{2}$$

prostorová část - [illegible]

23.11. 2004 KOSMO

Dvě možnosti - max. symetrický prostoročas
- žádná symetrie, nebo $0<x<10$ x-počet symetrií

6 Kilingových vektorů 4D prostor v něm je 3D vyjmutý podprostor maximálně symetrický, nesymetrický čas.

obecně: $0<M<N$
N-prostor
M-podprostor $\frac{M(M+1)}{2}$ - Kilingových vektorů
- symetrický maximální

Sférický symetrický prostor (není symetrie v radiálním směru). a není symetrie v čase. Symetrie je v ϑ a φ.
$\Rightarrow$ 3 Kilingovy vektory.
Je-li jen axiální symetrický - 1 Killingův vektor

Friedmann - Robertson - Walker
- vypracovali tu teorie ve 20. letech 20. stol.
- myšlenky, že není symetrie v čase.

Sférický symetrický prostoročas
$N=4$ 3 Killingovy vektory
$M=2$

Hledáme co nejjednodušší případ, aby to popisovalo jakž takž pozorovatelný vesmír.

$$g_{\mu\nu} = \cancel{\begin{pmatrix} g_{00} & g_{10} & g_{20} & g_{30} \\ g_{01} & g_{11} & g_{21} & g_{31} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} g_{00} & g_{0i} \\ \hline g_{i0} & g_{ij} \end{array}\right)$$

$i,j = 1,2,3$

$x^0 = ct$

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = r \\ x^2 = \vartheta \\ x^3 = \varphi \end{array}\right\} \text{symetrie} \Rightarrow \text{lze očekávat značné zjednodušení}$$

Lze volit souřadnicový systém, že současně

1. $g_{00}(t)$
2. $g_{10}; g_{20}; g_{30} = 0$
3. $g_{ij} = f(t)\,\tilde{g}_{ij}$

$$ds^2 = g_{00}(t)\,c^2\,dt^2 - f(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)$$

zjednodušení

I. zavedeme jiný čas $\tilde{t} = \sqrt{g_{00}}\,dt$

II. $\tilde{t} = \int \sqrt{g_{00}}\,dt$

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - \tilde{f}(\tilde{t})\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right)$$

1) $k > 0$ $\quad \sqrt{k}\,r = \tilde{r}$ $\quad [k] = cm^{-2}$

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{f(\tilde{t})}{k}\left(\frac{d\tilde{r}^2}{1-\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2\right)$$

2) $k < 0$ $\quad \sqrt{-k}\,r = \tilde{r}$

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{f(\tilde{t})}{(-k)}\left(\frac{d\tilde{r}^2}{1+\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2\right)$$

3) $k = 0$ $\quad \tilde{r} = Br$ $\quad [B] = cm^{-1}$

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 - \frac{f(\tilde{t})}{B^2}\left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} ds^2 = c^2 dT^2 + a^2(T)\left(\dfrac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right) \\[2ex] k \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} [a(T)] = cm \\ a(T) > 0 \end{array} \end{array}}$$

comoving radial coordinate

zavedeme: $\dfrac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = d\chi$ $\qquad g(\chi) = \sin\chi \quad k=1$

$\qquad = \chi \quad k=0$

$\qquad = \sinh\chi \quad k=-1$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)\left(d\chi^2 + g^2(\chi)\,d\Omega^2\right)$$

KOSMO

sf. symetrický: ① $g_{00}(r,t)$, $g_{01}(r,t)$, $g_{11}(r,t)$
② $g_{20}=g_{21}=g_{30}=g_{31}=0$ $g_{2,3}=0$
③ $g_{22}=f(r,t)$
$g_{33}=f(r,t)\sin^2\vartheta$

$$ds^2=g_{00}(r,t)dt^2+2g_{0r}(r,t)dr\,dt+g_{rr}(r,t)dr^2+$$
$$+g_{22}(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\, d\varphi^2)$$

neničí symetrii vztah $a(t)$ zůstává volná (vůči symetrii; může být definovaná)

(*) Friedman:

① $S(t)$ – škálový faktor času
② $A^{\mu}=[A^0(t),0,0,0]$
③ $B^{\mu\nu}=B^{\nu\mu}=\begin{pmatrix} B^{00}, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & B^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^{33} \end{pmatrix}$

$$B^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix} B^0_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B^1_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B^1_1 \end{pmatrix}$$

$B^1_1=B^2_2=B^3_3$ a $B^i_i(t)$ jenom.

$$T^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix} \rho(t)c^2, & 0, & 0, & 0 \\ 0 & -p(t), & 0, & 0 \\ 0 & 0 & -p(t), & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p(t) \end{pmatrix}$$

tenzor energie a hustoty

$$\boxed{\begin{gathered} T^{\mu}_{\nu}=(\rho c^2+p)u^{\mu}u_{\nu}-p\delta^{\mu}_{\nu} \\ u_{\mu}=u^{\mu}=[1,0,0,0] \end{gathered}}$$

Fyzika
$\rho>0$ $p\geq 0$
$0\leq p\leq \frac{\rho c^2}{3}$

tzv. ideální kapalina

pro $p=0 \Rightarrow$ prach

$$0 \le p \le \frac{\rho c^2}{3}$$

kvůli záření abs. černého tělesa

(pro $p = \frac{\rho c^2}{3}$ $\quad Tr\, T^{\mu}{}_{\nu} = 0$

jedná se o ultrarelativistickou látku

• aby Einsteinovy rovnice byly řešitelné, budeme potřebovat z fyziky vnější vztah mezi p a ρ

• mámeli (+) metriku musí platit $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ (ZZE)

Vzorec 4.7.9 ve Weinbergově knize

$$B^{\mu}{}_{\nu\,;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(+\sqrt{-g}\, B^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} B^{\nu\sigma}\right)$$

g – determinant metrické matrice

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

$$g = -a^6 \frac{r^4 \sin^2\vartheta}{1-kr^2}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left((\rho c^2 + p)\, u^{\mu} u^{\nu}\right)_{;\nu} - \underbrace{\left(p g^{\mu\nu}\right)_{;\nu}}_{*} = (\,)$$

kovariantní derivace – nelze prohodit pořadí derivací – neplatí vzorec $(AB)_{;\mu} = A_{;\mu}B + AB_{;\mu}$

$$* = -\left(p_{,\nu} g^{\mu\nu} + p\, g^{\mu\nu}{}_{;\nu}\right) \qquad g_{\mu\nu;\sigma} = 0$$

$$(\,) = \left((\rho c^2 + p)\, u^{\mu} u^{\nu}\right)_{;\nu} - p^{,\mu}$$

$\mu = 1,2,3 \Rightarrow$ první člen zmizí $\quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$

$\mu = i$

KOSMO

$\mu = 0$

$$(\rho c^2 + p)_{;0} - p^{;0} = \left((\rho c^2 + p)\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right)_{,0} - \Gamma_{0ij}\underbrace{\left((\rho c^2+p)(u^i u^j)\right)}_{=0} - p_{,0} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\left(a^3(\rho c^2 + p)\right)_{,0} - p_{,0} =$$

$$= \frac{1}{a^3}\frac{d}{c\,dt}\left((\rho c^2 + p)a^3\right) - \frac{dp}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left((\rho c^2 + p)a^3\right) = a^3 \frac{dp}{dt}$$

model stedy-state ; Hoyler Nalitar

metrika – desiter ; exponenciální růst

– 10 Killingových vektorů

– $p, \rho =$ konst

⇒ neplatí ZZE ; nedokáži to splnit vztah o

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\Lambda c}(t - t_0)}$$

$$a^2(\rho c^2 + p)\frac{3\dot{a}}{a} = 0$$

$$(\rho c^2 + p)\,3H = 0 \qquad H = \sqrt{\Lambda c}$$

$p \geq 0, \rho > 0$ ⇒ nejde

⇒ samotný vesmír

platí: $0 \leq p \leq \frac{\rho c^2}{3}$; $\rho > 0$

spec. případy

$p = 0$: prach ⇒ $\rho a^3 = $ konst $\quad \left(\frac{d}{dt}(\rho a^3) = 0\right)$

$p = \frac{\rho c^2}{3}$

$$\frac{4}{3}c^2 \frac{d}{dt}(\rho a^3) = \frac{1}{3}a^3 c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

$$4\frac{d}{dt}(\rho a^3) = a^3\frac{d\rho}{dt}$$

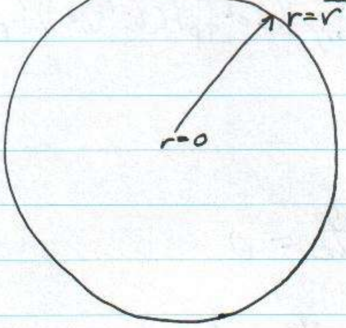
$$4\dot{\rho}a^3 + 12\rho a^2\dot{a} = a^3\dot{\rho}$$

$$3\dot{\rho}a^3 + 12\rho a^2\dot{a} = 0$$

$$\dot{\rho}a^3 + 4\rho a^2\dot{a} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^4) = 0$$

$$\underline{\rho a^4 = \text{konst}}$$



$a = a(t)$

$$V = \int_0^{\tilde r} dr \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sqrt{-g}$$

$$\sqrt{-g} = a^3 r^2 \sin\vartheta \, / \sqrt{1-kr^2}$$

$$0 < \tilde r < 1$$

$$V = 4\pi a^3 \int_0^{\tilde r} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

$$= 4\pi a^3 Q(\tilde r)$$

$$\frac{1}{4\pi Q} \frac{d}{dt}\left((\rho c^2 + p) a^3 4\pi Q\right) = a^3 \frac{dp}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left((\rho c^2 + p)V\right) = V \frac{dp}{dt}}$$

$$d(\rho c^2 V) + d(pV) = V dp$$

$$d(\rho V c^2) = -p\,dV$$

$$d(mc^2) = -p\,dV$$

$$dE = -p\,dV$$

jako $dE = -p\,dV + T\,dS$

– entropie uvnitř té koule je konstantní (tak ideální, že to neroste)

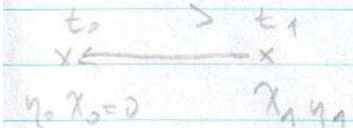
KOSMO

30.11.2004

metrika $ds^2 = a^2(\eta)d\eta^2 - a^2(\eta)\left(d\chi^2 + f^2(\chi)\,d\Omega^2\right)$

kde χ, $[\eta] = \sim$ konformní čas $\eta = \int \frac{c\,dt}{a(t)}$

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi & k=1 \\ \chi & k=0 \\ \sinh\chi & k=-1 \end{cases}$$ určuje křivost prostoru

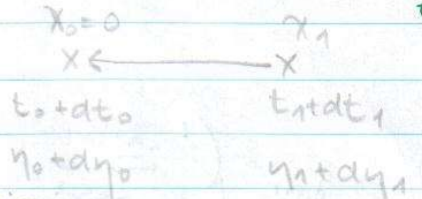


$d\vartheta = d\varphi = 0$, $d\Omega^2 = 0$ přímočarý signál

$ds = 0$ světelná čára

$c\,dt = \pm\, a(t)\,d\chi$

$$\eta(t_0) - \eta_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = -\int_{\chi_1}^{0} d\chi = \chi_1$$ ⊖ signál k nám



$a(\eta)\,d\eta = -a(\eta)\,d\chi$ $\quad \int_{\eta_1}^{\eta_0} d\eta = -\int_{\chi_1}^{0} d\chi$

$\eta_0 - \eta_1 = \chi_1$

0-příjem
1-vyslání

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{c\,dt}{a(t)} = -\int_{\chi_1}^{\chi_0} d\chi = \chi_1 \qquad \int_{\eta_1+d\eta_1}^{\eta_0+d\eta_0} d\eta = -\int_{\chi_1}^{\chi_0} d\chi = \chi_1$$

$\Rightarrow (\eta_0 + d\eta_0) - (\eta_1 + d\eta_1) = \chi_1 \quad \rightarrow d\eta_0 = d\eta_1$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{c}{a(t)} \qquad \left(\eta_0(t_0) + \frac{d\eta}{dt}\Big|_{t=t_0} dt_0\right) - \left(\eta_1(t_1) + \frac{d\eta}{dt}\Big|_{t=t_1} dt_1\right) = \chi_1$$

$$\frac{c\,dt_0}{a(t_0)} = \frac{c\,dt_1}{a(t_1)} \qquad \frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)} \qquad \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0}$$

interpretace: poměr veličin (vln. délka, perioda, ...) v okamžiku příjmu vln při vysílání je roven poměru $a(t)$

rudý posuv: $\lambda_1 < \lambda_0$, $a(t_1) < a(t_0)$ rozpínání

modrý posuv: $\lambda_1 > \lambda_0$; $a(t_1) > a(t_0)$ smršťování

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z$$ $z \in (-1, \infty)$ je posuv

př.: max $z = 6{,}4$; kvasar $z \doteq 2$; supernova $z \doteq \frac{1}{2}$

$\lambda_0 = \lambda_1 + \Delta\lambda \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = z$ podíl rozdílu ku původní kosmologický: $\dot{a}(t) > 0$ tj. $a(t_0) > a(t_1)$ rozpínání → rudý posuv

Hubble: p.p.: $t_0 - t_1$ malé:

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{a(t_0)}{a(t_0-(t_0-t_1))} = \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot{a}|_{t_0}(t_0-t_1)+\dots} =$$

$$= \frac{a(t_0)}{a(t_0)\left[1-\frac{\dot{a}}{a}\big|_{t_0}(t_0-t_1)+\dots\right]} = 1 + \frac{\dot{a}}{a}\Big|_{t_0}(t_0-t_1)+\dots$$

$$cz = \frac{\dot{a}}{a}\Big|_{t=t_0} c(t_0-t_1) \quad \text{neboli} \quad v = H_0 d$$

posuv v ms^{-1} ; vzdálenost (světelná)

kde H_0 , $[H_0] = s^{-1}$ Hubbleova konstanta

v rychlost rozpínání vesmíru

d rozměr vesmíru

Řešení Einsteinovy rovnice pro

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\vartheta + r^2\sin^2\vartheta\, d\varphi\right) \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{-a^2}{1-kr^2} & & \\ & & -a^2r^2 & \\ & & & -a^2r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

1) Christofelly: $\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}\left(-g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\sigma\mu\nu,\sigma} + g_{\sigma\mu\sigma,\nu}\right)$ obecně

$$\Gamma_{000} = \Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2} g_{00,0} = 0$$

$$\Gamma_{0i0} = \Gamma^0{}_{i0} = \Gamma^0{}_{0i} = \Gamma_{00i} = \frac{1}{2} g_{00,i} = 0$$

$$\Gamma^i{}_{00} = \Gamma_{i00} = -\frac{1}{2} g_{00,i} = 0$$

$$\Gamma_{0ij} = \Gamma^0{}_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,0} = a\, a_{,0}\, \tilde{g}_{ij}$$

$$\Gamma_{i0j} = +\frac{1}{2} g_{ij,0} = \frac{1}{2}(-2a a_{,0})\tilde{g}_{ij} = -a\, a_{,0}\, \tilde{g}_{ij}$$

$$\Gamma^i{}_{0j} = g^{im}\Gamma_{m0j} = g^{il}\Gamma_{l0j} = -\frac{\tilde{g}^{il}}{a^2}(-a a_{,0})\tilde{g}_{lj} = \frac{a_{,0}}{a}\delta^i_j$$

$$\Gamma_{ijl} = -a^2\frac{1}{2}\left(-\tilde{g}_{jl,i} + \tilde{g}_{ij,l} + \tilde{g}_{il,j}\right)$$

$$\Gamma^i{}_{jl} = g^{im}\Gamma_{mjl} = -\frac{\tilde{g}^{im}}{a^2}(-a^2)\tilde{\Gamma}_{mjl} = \tilde{\Gamma}^i{}_{jl}$$

kde $g_{00}=1$

$g_{0i}=g_{i0}=0$

$g_{ij}=-a^2\tilde{g}_{ij}$

$$\tilde{g}_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1-kr^2} & & 0\\ & r^2 & \\ 0 & & r^2\sin^2\vartheta\end{pmatrix}$$

$g^{00}=1$

$g^{0i}=g^{i0}=0$

$g^{ij}=-\frac{\tilde{g}^{ij}}{a^2}$

$$\tilde{g}^{ij}=\begin{pmatrix}1-kr^2 & & 0\\ & \frac{1}{r^2} & \\ 0 & & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\end{pmatrix}$$

2) Ricciho tensor: $R_{\mu\nu}=\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu,\sigma}-\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma,\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\sigma\varepsilon}-\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\nu\sigma}$

$$R_{00}=-\Gamma^{\sigma}{}_{0\sigma,0}+\Gamma^{\sigma}{}_{00,\sigma}+\Gamma^{\sigma}{}_{00}\Gamma^{\varepsilon}{}_{\sigma\varepsilon}-\Gamma^{\sigma}{}_{0\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}{}_{0\sigma}=-\Gamma^{i}{}_{0i,0}-\Gamma^{i}{}_{0j}\Gamma^{j}{}_{0i}=$$

$$=-\delta^{i}{}_{i}\left(\frac{a_{,0}}{a}\right)_{,0}-\left(\delta^{i}{}_{j}\frac{a_{,0}}{a}\right)\left(\delta^{j}{}_{i}\frac{a_{,0}}{a}\right)=$$

$$=-3\frac{a_{,00}}{a}+3\left(\frac{a_{,0}}{a}\right)^2-3\left(\frac{a_{,0}}{a}\right)^2=-3\frac{a_{,00}}{a}$$

$$R_{0i}=\Gamma^{j}{}_{0i,j}-\Gamma^{j}{}_{0j,i}+\Gamma^{j}{}_{0i}\tilde{\Gamma}^{l}{}_{jl}-\Gamma^{l}{}_{0j}\tilde{\Gamma}^{j}{}_{il}=\frac{a_{,0}}{a}\tilde{\Gamma}^{l}{}_{il}-\frac{a_{,0}}{a}\delta^{l}{}_{j}\tilde{\Gamma}^{j}{}_{il}=0$$

$$R_{ij}=\Gamma^{0}{}_{ij,0}+\tilde{\Gamma}^{l}{}_{ij,l}-\tilde{\Gamma}^{l}{}_{il,j}-\Gamma^{0}{}_{i0,j}+\Gamma^{0}{}_{ij}\Gamma^{l}{}_{0l}+\tilde{\Gamma}^{l}{}_{ij}\tilde{\Gamma}^{m}{}_{lm}-\Gamma^{0}{}_{il}\Gamma^{l}{}_{j0}-$$

$$-\Gamma^{l}{}_{i0}\Gamma^{0}{}_{jl}-\tilde{\Gamma}^{m}{}_{il}\tilde{\Gamma}^{l}{}_{jm}=\tilde{R}_{ij}+(aa_{,0})_{,0}\tilde{g}_{ij}+aa_{,0}\tilde{g}_{ij}\,3\frac{a_{,0}}{a}-$$

$$-(a\,a_{,0}\tilde{g}_{il})\left(\frac{a_{,0}}{a}\delta^{l}{}_{j}\right)-\left(\frac{a_{,0}}{a}\delta^{l}{}_{i}\right)(a\,a_{,0}\tilde{g}_{jl})=$$

$$=\tilde{R}_{ij}+a_{,00}\,a\,\tilde{g}_{ij}+2(a_{,0})^2\tilde{g}_{ij}$$

kde $\tilde{R}_{ij}=\frac{\tilde{R}}{N}\tilde{g}_{ij}=\frac{N(N-1)k}{N}\tilde{g}_{ij}=2k\tilde{g}_{ij}$ $\quad N=3$

je Ricciho tensor pro 3dim maximálně symetrický prostor

$$R_{ij}=(2k+a_{,00}a+2(a_{,0})^2)\tilde{g}_{ij}$$

3) zužování: $T = T^{\mu}{}_{\mu} = (p + \varrho c^2) - p\delta^{\mu}{}_{\mu} = \varrho c^2 - 3p$

$R = R^{\mu}{}_{\mu} = \ldots$

Einsteinovy rovnice:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \qquad -R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

① $$-3 \frac{a_{,00}}{a} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\varrho c^2 - \frac{1}{2} (\varrho c^2 - 3p) \right)$$

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{c^2} (\varrho c^2 + 3p)$$

$$-3 \frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G \left(\varrho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

② $$2k \tilde{g}_{ij} + a a_{,00} \tilde{g}_{ij} + 2(a_{,0})^2 \tilde{g}_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(p a^2 \tilde{g}_{ij} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} a^2 (\varrho c^2 - 3p) \right) =$$

$$= \frac{4\pi G}{c^4} a^2 \tilde{g}_{ij} (\varrho c^2 - p) \quad (2kc^2 + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \tilde{g}_{ij} = 4\pi G a^2 \left(\varrho - \frac{p}{c^2}\right) \tilde{g}_{ij}$$

① ∞: $$-3 \frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G \left(\varrho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

② ii: $$2kc^2 + a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 = 4\pi G a^2 \left(\varrho - \frac{p}{c^2} \right)$$

Einsteinovy rce: 2 obyčejné nelineární diferenciální rce 2. řádu

7.12.2004 KOSMO

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2)\right)$$

metrický tenzor: $T^{\mu}{}_{\nu}\ (p + \varrho c^2)\, u^{\mu}u_{\nu} - p\,\delta^{\mu}{}_{\nu}$

① $\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\varrho + \frac{3p}{c^2}\right)$

② $2kc^2 + 2\dot a^2 + a\ddot a = 4\pi G\left(\varrho - \frac{p}{c^2}\right)a^2$

} z 10-ti einsteinových rovnic zůstaly nakonec tyto 2 rovnice. (na 3 neznámé).

- musíme dodefinovat stavovou rovnici mezi ϱ a p.

první vynásobíme a^2 a od sebe je odečteme:

$$2kc^2 + 2\dot a^2 = 4\pi G\left(\varrho - \frac{p}{c^2}\right)a^2 + \frac{4\pi G}{3}\left(\varrho + \frac{3p}{c^2}\right)a^2$$

$$2kc^2 + 2\dot a^2 = 2\cdot\frac{8\pi G\varrho}{3}a^2$$

③ $kc^2 + \dot a^2 = \frac{8\pi G\varrho}{3}a^2$ Friedmannova rovnice

③' $2\dot a\ddot a = \frac{8\pi G\dot\varrho}{3}a^2 + \frac{16\pi G\varrho a\dot a}{3}$

$$\ddot a = \frac{4\pi G\dot\varrho a^2}{3\dot a} + \frac{8\pi\varrho G a}{3}$$

tohle dosadíme do/z ①

$$-\frac{4\pi G}{3}\left(\varrho + \frac{3p}{c^2}\right)a = \frac{8\pi G\varrho a}{3} + \frac{4\pi G\dot\varrho a^2}{3\dot a}$$

$$-\left(\varrho + \frac{3p}{c^2}\right) = 2\varrho + \dot\varrho a/\dot a$$

$$-3\varrho - \frac{3p}{c^2} = \frac{\dot\varrho a}{\dot a}$$

$$-3\left(\varrho + \frac{p}{c^2}\right)\dot a = \dot\varrho a$$

$$-3p\dot a = (\dot\varrho a + 3\varrho\dot a)c^2 \quad /a^2$$

$$-3a^2\dot a p = \frac{d}{dt}(\varrho a^3)c^2$$

④ $-\frac{d}{dt}(a^3 p) + a^3\dot p = \frac{d}{dt}(a^3\varrho c^2)$

$$a^3\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^3(\varrho c^2 + p)\right)$$

- tady může hrát roli nějaká integrační konstanta, neboť tuto rovnici jsem dostali derivováním
- nějakou minulou přednášku jsme tuto dostali též z počtem rovnice $T^{0\mu}{}_{;\nu} = 0$
- kosmologická konstanta $= 0$.
- $\varrho > 0 \quad \frac{\varrho c^2}{3} \geq p \geq 0$

- pokud $p = 0$ $\qquad p = \frac{\varrho c^2}{3}$

  $\varrho a^3 = \text{konst} \qquad \varrho a^4 = \text{konst}$

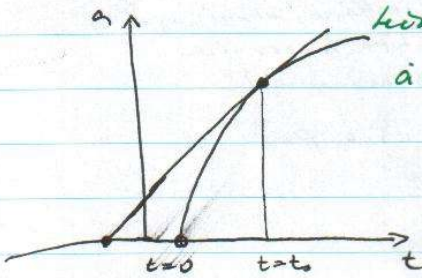
① z rovnice ① (je vidět z fleku") $\ddot a < 0 \quad (a > 0)$

$\Rightarrow a \neq \text{konst.}$ Tyto rovnice nemají řešení, pokud

a = konst (stojí). Platí pro $\Lambda = 0$.

$\dot a > 0$ (máme-li tečnu ke grafu a, t je graf pod tečnou!)

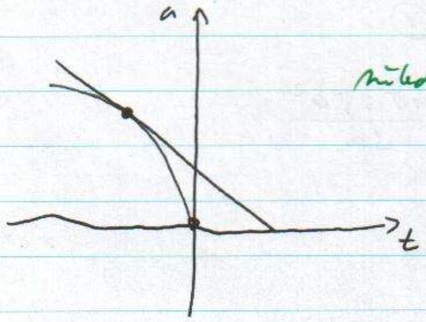
$\ddot a \neq 0$.



Seběhne osu $a=0$. Můžeme tam posunout počátek. $\Rightarrow$ pro $t=0$ $a=0$

aspoň v 1. bodě minulosti bylo $a=0$ - singulární bod.

$\dot a < 0$



někde v budoucnosti bude $a=0$.

$a(0)=0$

Tohle plyne z rce ① a podmínek pro p a ρ.

② mám řešení $a(t) \Rightarrow a(-t)$ můžeme zrcadlit

$a(-t)$

③ $$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \qquad \frac{\dot a}{a} = H(t) \qquad [H] = \frac{1}{s}$$

$$1 = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - \frac{kc^2}{a^2H^2} = \frac{\rho}{\rho_c} - \frac{kc^2}{a^2H^2}$$ Hubbleův parametr.

$$\frac{3H^2}{8\pi G} = \rho_c \qquad \left[\frac{3H^2}{8\pi G}\right] = \frac{kg}{m^3}$$

$$[G\rho] = s^{-2}$$

$$k = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

$k=0$ $\rho = \rho_c$ $\Omega_m = 1$ závisej na čase, ale poměr

$k=1$ $\rho > \rho_c$ $\Omega_m > 1$ zůstává

$k=-1$ $\rho < \rho_c$ $\Omega_m < 1$ ρ_c - kritická hustota

KOSMO

$\frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_M$ $\qquad -\frac{kc^2}{a^2H^2} = \Omega_c$

M - matter $\qquad$ c - critical

pro libovolný čas

$\Omega_M + \Omega_c = 1$

(4) speciální

$p=0 \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3} \qquad / \cdot \frac{a^2}{\dot{a}^2} \left(= \frac{1}{H^2}\right)$

$$+q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = +\frac{4\pi G\rho}{3H^2} = +\frac{\Omega_M}{2}$$

$q(t) \Rightarrow$ decelerační parametr

$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ obecně

(5) $\frac{\ddot{r}}{r} = -\frac{4\pi G\rho}{3}$ $\qquad$ totožné jako rce (1) pro $p=0$ (Newt. zákon gravitace)

$\dot{r}^2 + kc^2 = \frac{8\pi G\rho r^2}{3}$ $\qquad$ totožné jako (3) $\qquad$ (2.2.E)

- tj. podobnost Newtona s relativitou (Newtonovská teorie gravitace).

ale nejde využít např. zakřivení vesmíru

Postačí se pro dvě hranice: $p=0$

$p = \frac{\rho c^2}{3}$

zbytek řešení někde mezi tím.

I. $p=0 \Rightarrow \rho a^3 = \text{konst}$

$$\dot{a}^2 a + kc^2 a = \frac{8\pi G\rho a^3}{3} \stackrel{\downarrow}{=} Ac^2 > 0$$

→ z konstanty rozměrově

P.S = konstanta $\qquad [A] = m$

A - nějaká konstanta

můžeme odmocnit

$$\pm\frac{1}{c}\dot{a} = \sqrt{\frac{A}{a} - k} \qquad \frac{da}{\sqrt{\frac{A}{a} - k}} = \pm c\,dt$$

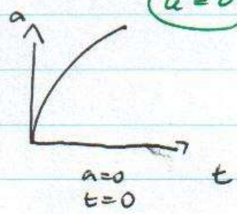
zmínka než nezajímá – řešíme jen hledání.

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{A}{a}-k}} = \int c\,dt$$

$k = 1, 0, -1$

$k=0$

$$\int \frac{\sqrt{a}\,da}{\sqrt{A}} = \int c\,dt$$



$$\frac{2}{3} a^{3/2} = \sqrt{A}\,t c - \tilde{t}_0 = Ac\,(t-t_0)$$

→ můžeme zvolit int. konstantu.

$$a = \left(\sqrt{\frac{9}{4A}}\,c\right)^{2/3} t^{2/3}$$

$$a \sim t^{2/3}$$

$k=1$

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{A}{a}-1}}$$

$a \leq A$

subst: $\frac{A}{a} - 1 = x^2$

$\frac{A}{a} = x^2 + 1$

$a = \frac{A}{x^2+1}$

$da = \frac{-A\,2x\,dx}{(x^2+1)^2}$

$\int \frac{-2A\,dx}{(1+x^2)^2}$ mohlo by to jít.

– lze to integrovat, ale je to hnusné řešení to nedostaneme explicitně.
Tj. → použije se tzv. **konformní** čas: $c\,dt = a(t)\,d\eta$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{dQ}{d\eta}\frac{c}{a}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{c}{a}\frac{d}{d\eta}$$

značí se to η, ale [illegible]

$$\frac{c^2}{a} a'^2 + k c^2 a = A c^2$$

$$a'^2 + k a^2 = A a$$

$$\frac{da}{d\eta} = \sqrt{Aa - k a^2}$$

$t=0 \quad a=0 \quad \eta = 0$

KOSMODISK

$k=0$

$$\int \frac{da}{\sqrt{a}} = \sqrt{A}\int d\eta$$

$$2a^{1/2} = \eta\sqrt{A}$$

$$a = \frac{A}{4}\eta^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} c\,dt &= a(\eta)\,d\eta \\ ct &= \frac{A}{12}\eta^3 \end{aligned}}$$

$k=1$ $\qquad a \leq A$

$$\int \frac{da}{\sqrt{Aa-a^2}} = \int d\eta$$

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{A^2}{4}-\frac{A^2}{4}+Aa-a^2}} = \int d\eta$$

$$\int \frac{da}{\sqrt{\frac{A^2}{4}-\left(\frac{A}{2}-a\right)^2}} = \int d\eta$$

$$\int \frac{da}{\frac{A}{2}\sqrt{1-\left(1-\frac{2a}{A}\right)^2}} = \int d\eta = w + \text{const.} = \eta + \text{const}2$$

$$1-\frac{2a}{A} = \cos w$$

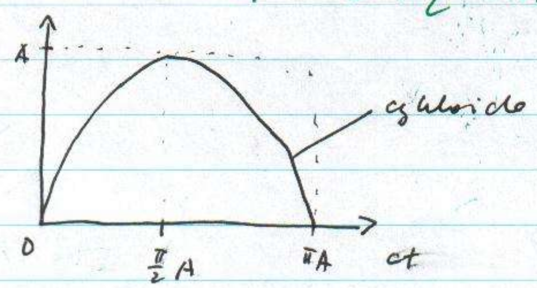
$$\frac{2da}{A} = \sin w\, dw$$

$$-a = \frac{A}{2}\left(\cos(\eta + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\text{const}}}) + 1\right)$$

$$a = \frac{A}{2}(1-\cos\eta)$$

$$ct = \frac{A}{2}(\eta - \sin\eta)$$

$\eta \in [0, 2\pi]$



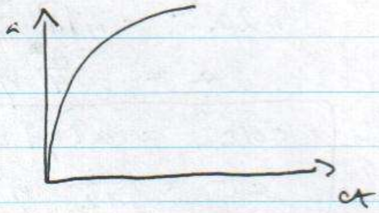
$k=-1$

$$\int \frac{da}{\sqrt{Aa+a^2}} = \int \frac{da}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + Aa + a^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2}} = \int \frac{2da}{A\sqrt{\left(\frac{2a}{A}+1\right)^2-1}} =$$

obdobný postup jako $k=1$

$$\frac{2a}{A}+1=\cosh\eta$$

$$a=\frac{A}{2}(\cosh\eta-1)$$
$$ct=\frac{A}{2}(\sinh\eta-\eta)$$



Pokud to udělám pro malá η (Taylorem), blíží se to mezujem.

II $\quad p=\frac{\rho c^2}{3} \quad \rho a^4=\mathrm{const}$

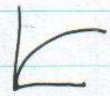
$$\dot a^2a^2+kc^2a^2=\frac{8\pi G\rho a^4}{3}=B^2c^2 \qquad B=\mathrm{konst}$$

zavedeme značení jako v předch. případě

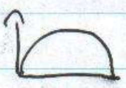
$$c^2a'^2+kc^2a^2=B^2c^2$$
$$a'=\sqrt{B^2-ka^2}$$

$$\frac{da}{\sqrt{B^2-ka^2}}=d\eta$$

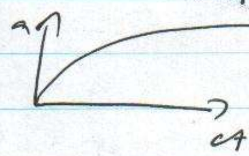
$k=0$
$$a=B\eta \qquad a=\sqrt{\frac{2ct}{B}}\,B=\sqrt{2cB}\sqrt{t}$$
$$ct=B/2\,\eta^2 \qquad a\sim\sqrt{t} \quad !!$$



$k=+1$
$$\frac{a}{B}=\sin\eta$$
$$ct=B(1-\cos\eta) \quad \eta\in\langle 0;\pi]$$

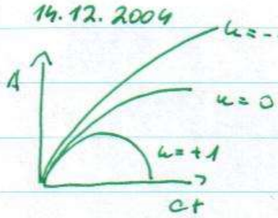


$k=-1$
$$a=B\sinh\eta$$
$$ct=B(\cosh\eta-1)$$



KOSMO

14.12.2004



$a > 0$

$a \sim t^{2/3}$

$a = \frac{A}{2}(\cosh\eta - 1)$ $\quad k=-1 \quad \eta \in (0; +\infty)$

$ct = \frac{A}{2}(\sinh\eta - \eta)$

$a = \frac{A}{4}\eta^2$ $\quad k=0 \quad \eta \in (0; \infty)$

$ct = \frac{A}{2}\eta^3$

$ds^2 = a^2\left(d\eta^2 - \frac{dr^2}{1-kr^2} - r^2 d\Omega^2\right)$

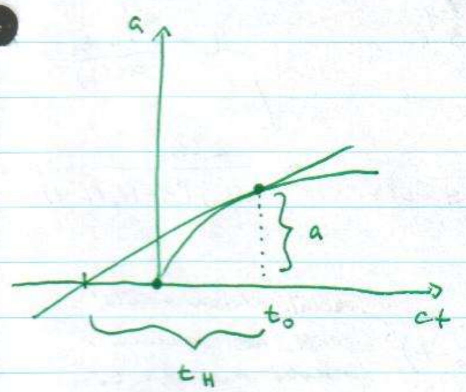
$a = \frac{A}{2}(1-\cos\eta)$ $\quad k=+1 \quad \eta \in (0, 2\pi)$

$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi$

$ct = \frac{A}{2}(\eta - \sin\eta)$

zajímá nás hledání řešení → rudý posuv: $\frac{a(\eta_0)}{a(\eta)} = 1+z \quad H = \frac{\dot a}{a} = \frac{1}{t_H} = \frac{\frac{a}{t_H}}{a}$

(horní mez pro stáří vesmíru)



t_H.... Hubbleův čas $\quad t_H = H^{-1} > t_0$

t_0... stáří vesmíru $\quad t_H = 3{,}06 \cdot 10^{17} h^{-1} s = 9{,}6 \cdot 10^9 h^{-1} y$

H.... Hubbleho konst.

$H = 100\, h \frac{km}{s\,Mpc} = 3{,}2 \cdot 10^{-18} h\, s^{-1}$ (dnešní hodnota)

$h \in (0{,}5; 0{,}8)$ – parametr nejistoty

$1\,pc = 3{,}26\,ly$

$1\,Mpc = 3{,}06 \cdot 10^{19}\,km$

pro $k=0$

$a = \text{const.}\, t^{2/3}$

$\dot a = \text{const}\, \frac{2}{3} t^{-1/3}$

$\frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3t} = H \qquad t = \frac{2}{3H} = \frac{2}{3} t_H$

$k=-1$

$a =$

$\dot a = \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\eta}\frac{d\eta}{dt}$, $\quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{c}{a}$

$H = \frac{\dot a}{a} = \frac{da}{d\eta}\frac{c}{a^2} = \frac{c\frac{A}{2}\sinh\eta}{\left(\frac{A}{2}\right)^2(\cosh\eta - 1)^2} = \frac{2c}{A}\cdot\frac{\sinh\eta}{(\cosh\eta - 1)^2}$

$a\, d\eta = c\, dt$

$\frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_n = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$

$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

$A = \frac{8\pi G\rho a^3}{3c^2} = \frac{8\pi G\rho_c \Omega_n a^3}{3c^2} = \frac{\Omega_n H^2 a^3}{c^2} = \frac{2c}{H}\cdot\frac{\sinh\eta}{(\cosh\eta - 1)^2}$

$H^3 a^3 = \frac{2c^3}{\Omega_H}\cdot\frac{\sinh\eta}{(\cosh - 1)^2} = \frac{8c^3}{A^3}\frac{\sinh^3\eta\,(\cosh\eta - 1)^3\left(\frac{A}{2}\right)^3}{(\cosh\eta - 1)^6}$

(z $a^3 = \ldots$ a $H^3 = \ldots$)

$$\frac{2}{\Omega_M} = \frac{\sinh^2\eta}{\cosh\eta - 1} = \frac{\cosh^2\eta - 1}{\cosh\eta - 1} = \cosh\eta + 1$$

$$\boxed{\cosh\eta = \frac{2}{\Omega} - 1}$$

$$A = \frac{2c}{H}\,\frac{\frac{2}{\Omega_M}\sqrt{1-\Omega_M}}{\left(\frac{2}{\Omega_M}\right)^2(1-\Omega_M)^2} = \frac{c}{H}\,\frac{\Omega_M}{(1-\Omega_M)^{3/2}}$$

$$\boxed{H = \frac{c}{4}\,\frac{\Omega_M}{(1-\Omega_M)^{3/2}}}$$

ze znalosti H_0, Ω_{M0} → známe η_0 → známe A → a

$$a(t_0) = \frac{c}{H_0\sqrt{1-\Omega_{M0}}}, \qquad t_H > t_0 > \frac{2}{3}t_H \qquad H_0 = \frac{a'|_{t=t_0}}{a(t_0)}$$

Jak se měří H_0:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_0(t_0-t))} = \frac{a(t_0)}{a(t_0) - \dot a|_{t=t_0}(t_0-t)+\dots} = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1-H_0(t_0-t)+\dots]}$$

$$= 1 + H_0(t_0-t)+\dots$$

$$\Rightarrow z = H_0(t_0-t)+\dots \quad \Rightarrow \quad cz = H_0\, c(t_0-t)$$

vzdál. kterou urazilo světlo ve vakuu v době mezi t a t_0

$$H_0(t_0-t) \ll 1$$

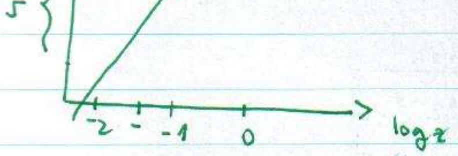
$$z = \frac{H_0}{c}d \qquad d = \frac{cz}{H_0}$$

$$m - M = -5 + 5\log d \qquad [d] = pc$$

$$m - M = 25 + 5\log d \qquad [d] = Mpc$$

$$5\log\frac{cz}{H_0} = 5\log d = m - M - 25 +$$

předpověď pro pozorovatele



posun o 1 na „log z" je posun o 5 na „m"

$\underline{k=0}$

$$a = \text{const.}\ t^{2/3} \qquad \frac{a(t_0)}{a(t)} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} \qquad \frac{t}{t_0} = \left(\frac{a(t)}{a(t_0)}\right)^{3/2} = \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$$

kosmo

$k=-1$

$$\cosh\eta = \frac{2}{\Omega_0} - 1$$

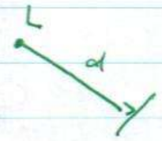
$$\frac{t}{t_0} = \frac{\sinh\eta-\eta}{\sinh\eta_0-\eta_0} = \frac{\sinh\eta-\eta}{\frac{2}{\Omega_0}\sqrt{1-\Omega_0} - \operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{2}{\Omega_0}-1\right)}$$

$$\cosh\eta = \frac{\cosh\eta_0-1}{1+z}+1 = \frac{\frac{2}{\Omega_0}-2}{1+z}+1$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right)$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(d\chi^2 + f^2(\chi)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right)$$

$a(t_0) \Leftarrow H_0, \Omega_0, t_0$



$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

stačí se soustředit na vzdálenost v okamžiku příjmu

t_0 ... okamžik příjmu

t ... okamžik vyslání

$$\eta = \eta_0 - \chi \quad \Rightarrow \chi = \eta_0 - \eta = \eta_0\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right) = \eta_0\left(1-\left(\frac{a}{a_{t_0}}\right)^{1/2}\right) =$$

$$= \eta_0\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$$

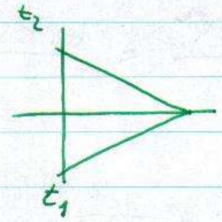
① proper distance = vlastní vzdálenost (vzd. zdroje v ok. vyslání)

(z fyz. hlediska nejvíc připomíná radiální vzdálenost)

$d_p = a(t_0)\,\chi_1$

$t=t_0$ . . . .

$x=0$ $\quad$ $x=\chi_1$



$$d = (t_2-t_1)\frac{c}{2}$$

$$d_p = a(t_0)\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

② proper motion distance $\quad d_M = a(t_0)\,r_1 = a(t_0)\,f(\chi_1)$

③ Luminosity distance $\quad d_L = (1+z)\,d_M = \frac{a^2(t_0)}{a(t_1)}\,r_1 = (1+z)\,a(t)\,f(\chi_1)$

$$F = \frac{L}{4\pi a^2} = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi\, d_M^2 (1+z)^2} = \frac{2}{(4\pi a^2(t_0)\, r_1^2 (1+z)^2}$$

$4\pi\,[a(t_0)\,r_1]^2$

K-correction – měníli velké z pak L musíme vzít (1+z) krát víc

(do prava) vzhledem k oboru ve kt. měříme

4.1.2005

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad [\lambda] = \mathrm{cm}^{-2}$$

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$
$$u_\mu = [1,0,0,0]$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[(\rho c^2 + p) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \right]$$
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} \left[(\tilde\rho c^2 + \tilde p) u_\mu u_\nu - \tilde p g_{\mu\nu} \right]$$

$p = p(t)$
$\rho = \rho(t)$

$$\tilde p = p - \frac{\lambda c^4}{8\pi G}$$
$$\tilde \rho = \rho + \frac{\lambda c^2}{8\pi G}$$

$$\tilde\rho c^2 + \tilde p = \rho c^2 + p$$

$\rho > 0$ $\quad \tilde\rho$ může být < 0
$p \geq 0$ $\quad \tilde p$ může být < 0
} záleží na λ (mat. hmotného stojiní; mění se fyz.)

$$\frac{d\tilde p}{dt} a^3 = \frac{d}{dt}\left(a^3(\tilde p + \tilde\rho c^2)\right) = \frac{dp}{dt} a^3 = \frac{d}{dt}\left(a^3(p + \rho c^2)\right)$$

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\tilde\rho + \frac{3\tilde p}{c^2}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\tilde\rho}{3} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\dot a}{a} = H$$
$$1 + \frac{kc^2}{a^2H^2} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} + \frac{\lambda c^2}{3H^2}$$
$$1 = \Omega_k + \Omega_m + \Omega_\lambda$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{a^2H^2} \qquad \text{myslí se to jako dnešní hodnota}$$
$$\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$$
$$\Omega_\lambda = \frac{\lambda c^2}{3H_0^2}$$

Einstein

$$\left.\begin{array}{l}\dot a = 0\\ \ddot a = 0\end{array}\right\} = \lambda > 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda c^2 = 4\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)\\ \lambda = 4\pi G / c^2 \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)\end{array}\right\}$$ podmínka pro $\ddot a = 0$ z 2. rovnice

$$\Rightarrow \lambda > 0$$

$\dot a = 0 \Rightarrow k = +1$

jde o uzavřený vesmír

(aby existovalo statické řešení)

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\lambda c^2}{3}$$

$$4\pi G\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = \frac{c^2}{a^2}$$

speciální $p = 0$

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4\pi G\rho}{c^2} = \lambda \qquad \lambda = \frac{1}{a^2}$$

1916 - uzavřený vesmír

rudý posuv

nejsou rudé posuvy $\quad \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = 1 + z$

$a = \text{konst} \Rightarrow$ není rudý posuv: $z = 0$

Killingových vektorů - 7

$(p = 0;\ \rho = 0)$

$$\frac{\ddot a}{a} = \frac{\lambda c^2}{3} \qquad \lambda > 0 \quad \text{de-Sitter}$$

$$a = a_0 \exp\left(t\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\, c t\right)$$

3. ře: $k = 1 \quad \lambda \gtrless 0$ } asi, měl to moc rychle

$k = -1 \quad \lambda < 0$ } prostě, při může být de-Sitterův anti-d-S.

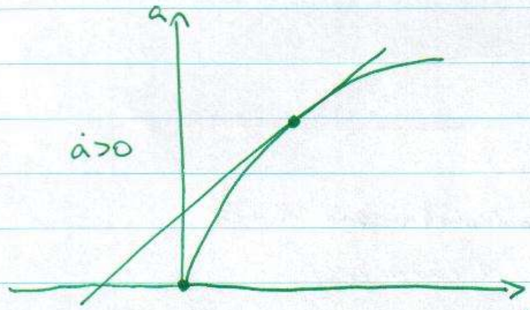
$p = 0 \Rightarrow \rho a^3 = \text{konst}$

$p = \frac{\rho c^2}{3} \Rightarrow \rho a^4 = \text{konst}$

$$0 \leq p \leq \frac{\rho c^2}{3}$$

konst.

$$\dot a^2 a + k c^2 a = \frac{8\pi G\rho a^3}{3} + \frac{\lambda c^2 a^3}{3}$$



λ na počátku nehraje žádnou roli → nic se nemění

$$\underbrace{\dot{a}^2 a}_{\to -\infty/\text{konst}} + \underbrace{kc^2 a}_{\to 0} = \underbrace{\frac{8\pi G \rho a^3}{3}}_{\text{konst}} + \underbrace{\frac{\lambda c^2 a^3}{3}}_{\to 0}$$

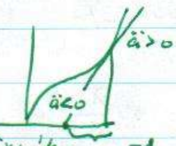
počátek → singularita

pro $a \to \infty$: dominuje člen $\frac{\lambda c^2 a^3}{3}$ a $\dot{a}^2 a$

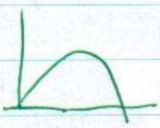
$\lambda > 0$

$\ddot{a} > 0$

(půjdeme konk. do konvexního)



$\lambda < 0$



⇒ pomocí $\lambda > 0$ ⇒ Hubbleův čas menší než stáří vesmíru

① homogenita a izotropie v rozdělení látky.

naše galaxie není ani homog. ani izotropní rozd. látky.

19. stol. - spirální galaxie, zda patří do Ml. dráhy či ne. (ještě ve 20. letech.)

- některé jsou z galaxie - mlhoviny - mezihvězd. plyn, oblaka atd.

- některé mimo - spir. galaxie.

1929 - Hubble - dokázal, že M31 v Andromedě je daleko dál než rozměr Galaxie (pomocí cefeid)

dnes:

na větší škále 100-200 Mpc - je to homogenní i izotr.

Hubbleův poloměr: $d_H \sim \frac{c}{H_0} = 3000\ h^{-1}\ \text{Mpc}$

'vzdálenost obzoru'

$\sim 300\ h^{-1}\ \text{Mpc}$ $\quad cz = H_0 d$

$$z = \frac{H_0 d}{c} \approx \frac{100 \cdot 300}{300\,000} \approx 0{,}1$$

doppler: $cz = 100\ \text{km/s}$

$z = 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ (posuv) (všechno se převádí na z)

$$d_{PM} = \frac{c}{H_0}\frac{1}{|\Omega_k|^{1/2}}\,\mathrm{sinn}\left\{|\Omega|_k^{1/2}\int_0^z \frac{dz'}{\left[(1+z')^2(1+\Omega_M z') - z'(2+z')\Omega_\Lambda\right]^{1/2}}\right\} =$$

(proper-motion distance)

$$= \frac{c}{H_0}\,Q(z, \Omega_\Lambda, \Omega_M)$$

$\Omega_k = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_M$

$\Omega_k > 0$ $\quad \mathrm{sinn} \equiv \sinh$

$\Omega_k < 0$ $\quad \mathrm{sinn} \equiv \sin$

$\Omega_k = 0$ $\quad \mathrm{sinn} \equiv 1$ (zůstane jen ten $\int$)

$$t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz'}{(1+z')\sqrt{(1+z')^2(1+\Omega_M z') - z'(2+z')\Omega_\Lambda}}$$

(dnešní hodnota − čas počátku)

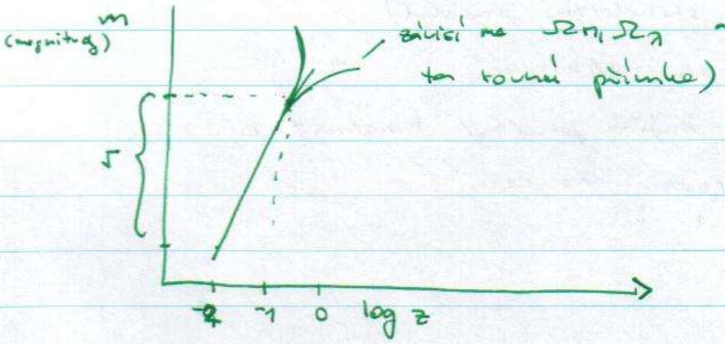
look-back-time

(2) $m - M = 25 + 5\log d_L\ (\mathrm{Mpc})$

$d_L = (1+z)\,d_{PM} = (1+z)\frac{c}{H_0}Q(z, \Omega_\Lambda, \Omega_M)$

$m - M = 25 + 5\log 3000\,h^{-1} + \log\left[(1+z)\,Q(z, \Omega_\Lambda, \Omega_M)\right]$

předpověď:



z hodně malé: $\quad d_L = d_{PM} \approx \frac{cz}{H_0}$

$|z| \ll 0.1$

pozorování − schodují se.

vše nasvědčuje tomu, že $\quad \Omega_\Lambda \approx 0{,}7 \qquad \Omega_M \approx 0{,}3$

$\Omega_\Lambda > 0 \qquad$ teorie $\Omega_k = 0$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

$$-\frac{\ddot a a}{\dot a^2} = +\frac{4\pi G\rho a^2}{3\dot a^2} + \frac{4\pi G p a^2}{\dot a^2} - \frac{\Lambda c^2 a^2}{3\dot a^2}$$

$\parallel$

q

$p = 0$

$q = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\lambda$ → je to záporné → rozšiřující se vesmír.

(3) ϱ_M (látky) – obecná hustota

$= \Omega_M \varrho_{cr} = \Omega_M \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1{,}88 \cdot 10^{-29} \Omega_M h^2 \frac{g}{cm^3}$

$H_0 = 3{,}26 \cdot 10^{-18}\, s^{-1}$ $h \in (0{,}5; 0{,}8)$

pořád to není jisté

$\Omega_{M\,\text{svítící}} \approx 0{,}01 - 0{,}02$

$\Omega_{M\,\text{totál}} \approx (0{,}2 - 0{,}4)$ $(\Omega_{M\,\text{svítící}} + \Omega_{M\,\text{TMAVÁ}})$

(4) $\Omega_\lambda \approx 0{,}7$

Dark energy (kosmol. konstanta – tlak vakua (záporný))

$\tilde{p} = p - \frac{\lambda c^4}{8\pi G}$ ϱ – hustota vakua ↓ mají opačná znaménka.

$\tilde{\varrho} = \varrho + \frac{\lambda c^4}{8\pi G}$

$\Omega_k = 0$ (dnes standardní model)

<u>Tmavá látka</u> – je z baryonů + elektronů

především – můžeme zanedbat hmotnost e^-

počet baryonů na cm^3 ??

$\varrho_{M\,\text{totál}} = m_p \cdot n_M$

$m_p \approx m_n = 1{,}69 \cdot 10^{-24}\, g$

$$\boxed{n_M = \frac{\varrho_{M\,TOT}}{m_p} = 1{,}124 \cdot 10^{-5}\, \Omega_{M\,TOT}\, h^2\, cm^{-3}}$$

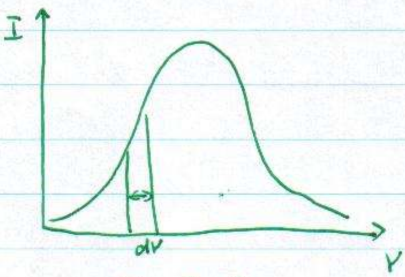
částicová hustota

≈ řádový odhad 1 atom na krb. metr.

KOSMO

(5) $p \cong 0$ (abs. černé těleso – hustota záření počítá jen na T)

$h_p = 2\pi\hbar$



$$E_\nu \, d\nu = \frac{8\pi h_p \nu^3 d\nu}{c^3\left(\exp\left(\frac{h_p\nu}{k_B T}\right)-1\right)}$$

hustota energie fotonu v cm³

$[h_p\nu] = J$

$[\frac{c}{\nu}] = [\lambda] = cm$

[Budeme počítat hustotu záření]

$$E_\gamma = \int_0^\infty E_\nu \, d\nu$$

se použití

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{h_p\nu}{k_BT}\right)^3\left(\frac{h_p\,d\nu}{k_BT}\right)}{\exp\left(\frac{h_p\nu}{k_BT}\right)-1}\cdot\frac{8\pi}{c^3}\cdot\frac{(k_BT)^4}{(h_p)^3} =$$

$$= \frac{8\pi k_B^4T^4}{c^3h_p^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}\cdot\frac{8\pi k_B^4T^4}{c^3h_p^3}$$

$E = \sigma_{SB}T^4$ Stefan–Boltzmannův zákon

$\hbar^3 = \left(\frac{h_p}{2\pi}\right)^3 = \frac{h_p^3}{8\pi^3}$

$T = (2,728 \pm 0,004)$ K

$\sigma = \frac{\pi^2}{15}\frac{k_B^4}{c^3\hbar^3} = 7,56\cdot10^{-15}\ \frac{erg}{K^4\,cm^3}$

ρ_γ (hustota) $= \frac{E}{c^2}$ (klasický Einst. zákon)

$= 4,67\cdot10^{-34}$ g/cm³

počet fotonů ve cm³

$$n_p = \int_0^\infty \frac{E_\nu\,d\nu}{E_{1\,fotonu}} = \int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3\left(\exp\left(\frac{h_p\nu}{k_BT}\right)-1\right)} = \boxed{410\ cm^{-3}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h_p\nu}{k_BT}\right)^2 \frac{h_p\,d\nu}{k_BT}}{\exp\left(\frac{h_p\nu}{k_BT}-1\right)}\cdot\frac{8\pi}{c^3}\cdot\left(\frac{(k_BT)^3}{h_p^3}\right) = 2\zeta(3)\frac{8\pi k_B^3T^3}{(c\,h_p)^3} =$$

$$= \frac{\sigma_{SB}T^4}{k_BT}\cdot\frac{30\zeta(3)}{\pi^4} =$$

$$\int_0^\infty\frac{x^2dx}{e^x-1} = 2\zeta(3) = 2\cdot 1,202\ldots$$

ζ Riemannova dzeta

$$\boxed{n_\gamma = 0,37\frac{E}{k_BT}}$$

$$\frac{m_H}{m_\gamma} = 2{,}74 \cdot 10^{-8}\, \Omega_H h^2$$

The Content of the Cosmology Course
October 2004 - January 2005; Charles University

Attila Mészáros,
Charles University, Prague, Czech Republic

Historical Survey up to the End of XIX. Century:
The role of G.Bruno and I.Newton; the Newtonian Universe-model; the Olbers paradoxon; the methods of the astronomical observations up to the end of XIX. century; the anisotropic and inhomogeneous distribution of the stars; rejection of the Newtonian Universe-model.

The Main Ideas of the General Relativity:
The interval and the metric tensor; covariant and contravariant tensors; the covariant derivative; Christoffel-symbols; Riemann-tensor, Ricci-tensor, Ricci-scalar, Einstein-tensor; the energy-momentum-tensor; Einstein-equations with and without the cosmological constant.

The Maximally Symmetrical Spaces:
The definition of the maximally symmetrical N-dimensional spaces; the Killing-vectors; the connection between the metric tensor and the Riemann-tensor; the connection between the metric tensor and the Ricci-tensor; the constant Ricci-scalar; the forms of the scalars, vectors and tensors.

Maximally symmetrical three-dimensional spaces; the form of the metric tensor; Bolyai-Lobatchevskiy space, Euclidean space, closed three-dimensional sphere; χ and r radial coordinates.

Maximally symmetrical space-time; de Sitter, anti-de Sitter and Minkowski metric; the form of the metric tensor; theoretical and observational arguments againts these Universe-models; rejection of the steady-state model.

The Friedmann-Robertson-Walker Metric:
The N-dimensional space with a maximally symmetrical M-dimensional subspace ($M < N$); the forms of the metric tensor, scalar, vector and of the energie-momentum-tensor; the conformal time; the comoving space coordinates; the expansion-function; the cosmological principle.

The Friedmann-Robertson-Walker Models:

The definition of the redshift; proper-, proper-motion- and luminozity-distance; the Hubble-parameter; the deceleration parameter; the relation between the visual magnitudes and the redshift.

Einstein-equations; Friedmann-equation; the state equation; the solutions for the expansion-function; Universe-models dominated by non-relativistic and relativististic matter.

The critical density and its relation to the Hubble-parameter; the Ω-parameters; horizon; the solution of the Olbers-paradoxon; the connection between the luminosity-distance and the redshift.

Universe models with cosmological constant; Einstein-Model; the age of the Universe; the connection between the deceleration-parameter and the Ω-parameters.

The Results of the Observations from the XX. Century:

The Hubble-relation; isotropy and homogeneity of the distribution of the galaxies and quasars; the observed values of the Ω-parameters and of the Hubble-parameter; the observed value of the cosmological constant; cosmic microwave background radiation;

The Past of the Universe:

Matter dominated era; radiation dominated era; recombination.

LITERATURE

S. Weinberg: Gravitation and Cosmology, J.Wiley, New York, 1972.

J.N. Islam: An introduction to mathematical cosmology, Cambridge University Press, 1992.

P.J.E. Peebles: Principles of Physical Cosmology, Princeton University Press, Princeton, 1993.

J.A. Peacock: Cosmological Physics, Cambridge University Press, 1999.

L. Bergström & A. Goobar: Cosmology and Particle Physics, Springer, 2003