Fourierova transformace

- ve spektroskopii velmi praktická
  - pozorování je konvoluce → násobení ve F. prostoru

FT: reprezentace funkce v periodické bázi

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{2\pi i x\sigma}\, dx$$

inverzní
$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\, e^{-2\pi i x\sigma}\, d\sigma$$

ne vždy existuje! ve fyzice ale skoro vždy ano.

pro $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

pro $F(x) = F_r(x) + i\,F_i(x)$

$$\Rightarrow f(\sigma) = \int F_R(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx + i \int F_I(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx +$$
$$+ i \int F_R(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx - \int F_I(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

pro $f(\sigma) = f_R(\sigma) + i f_I(\sigma)$

$$f_R(\sigma) = \int F_R(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx - \int F_I(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

$$f_I(\sigma) = \int F_I(x) \cos 2\pi x\sigma\, dx + \int F_R(x) \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

pro $F(x) = F_R(x)$ … fyzikální signál

$$f(\sigma) = \int F_R \cos 2\pi x\sigma\, dx + i \int F_R \sin 2\pi x\sigma\, dx$$

$f(\sigma)$ stále komplexní

pro $F(x) = F_R(x)$; $F_R(x) = F_R(-x)$

$$f(\sigma) = \int F_R(x) \cos 2\pi x\sigma \, dx$$

Fourierův obraz – v polárních koordinátech

$$f(\sigma) = |f(\sigma)| \, e^{i\psi}$$

$$|f(\sigma)| = \sqrt{f_R^2(\sigma) + f_I^2(\sigma)}$$

$$\mathrm{tg}\, \psi = \frac{f_I(\sigma)}{f_R(\sigma)}$$

Pozn.: amplitudové spektrum – popis funkce

fázové spektrum – kde jsou $\boxed{\text{obrázek}}$

Pozn.: $\sigma = 0 \Rightarrow$ totální integrál

$$f(0) = \int F(x) \, e^{2\pi i x \cdot 0} dx = \int F(x) \, dx$$

a opačně $F(0)$.

Příklady:

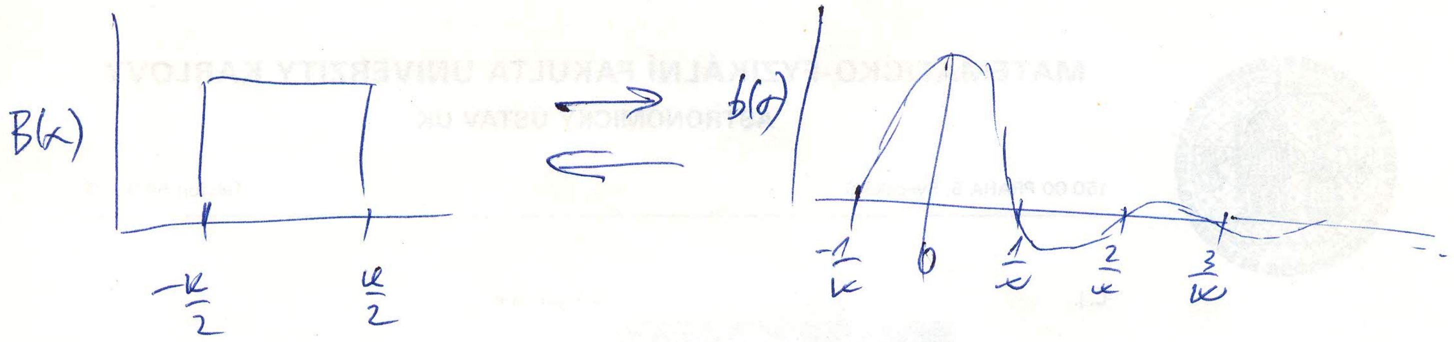
1. $B(x)$ – 0 pro $-\frac{W}{2} > x > \frac{W}{2}$ boxcar
   – 1 pro $-\frac{W}{2} \le x \frac{W}{2}$

$$b(\sigma) = \int B(x) \, e^{2\pi i \sigma x} dx = \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} e^{2\pi i x\sigma} dx =$$

$$= \left(\frac{e^{2\pi i x\sigma}}{2\pi i \sigma} \right)_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} = \frac{1}{2\pi i \sigma} \left(e^{2\pi i \frac{W\sigma}{2}} - e^{-2\pi i \frac{W\sigma}{2}} \right) =$$

$$= W \frac{\sin \pi W\sigma}{\pi W\sigma} = \boxed{W \,\mathrm{sinc}\, \pi W\sigma}$$

$= 2\sigma =$



Pozn.: $W \nearrow$ → peaky ve Fourierově spektru jsou užší

užití: délka pozorování
velikost pixelu – diskretizace
binning – vždy zavede určitou filtraci

! sync ideální interpolant v diskrétních obrazech →

↳ Lanczos (řád) → centrální ~~lalok~~ sincu
řád → kolik nulových bodů se vezme v úvahu, zbytek se ořeže

$$L(x) = \begin{cases} \mathrm{sinc}(x) \cdot \mathrm{sinc}(x/a) & -a < x < a \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

② gaussián

$$G(x) = \frac{1}{B\pi^{1/2}} e^{-x^2/B^2}$$

$$g(\sigma) = \int G(x)\, e^{2\pi i \sigma x}\, dx = \int \frac{1}{B\pi^{1/2}} e^{-x^2/B^2} e^{2\pi i \sigma x}\, dx =$$

sudá! $= \int \frac{1}{B\pi^{1/2}} e^{-x^2/B^2} \cos 2\pi x\sigma\, dx$ $= \cancel{\int \frac{1}{B\pi^{1/2}} \int e^{-x^2/B^2}}$ $= e^{-\pi^2 B^2 \sigma^2}$

disperze B → disperze $\frac{1}{\pi B}$

③ Lorentzián

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \frac{B}{x^2+B^2}$$

$$f(\sigma) = 1/\pi \int \frac{B}{x^2+B^2} e^{2\pi i \sigma x} dx \overset{\text{sudá}}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{B}{x^2+B^2} \cos 2\pi x \sigma \, dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos mw}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-m} \quad \text{tabulka}$$

$$\Rightarrow \quad f(\sigma) = \begin{cases} e^{-2\pi B\sigma} & \text{pro } \sigma \geq 0 \\ e^{2\pi B\sigma} & \text{pro } \sigma \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{nebo } \underline{f(\sigma) = e^{-2\pi B|\sigma|}}$$

④ impuls $\delta(0)$, $\int \delta(x)\,dx = 1$

$$F(x) = \delta(x - x_1)$$

$$f(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_1) e^{2\pi i \sigma x} dx =$$

$$= e^{2\pi i x_1 \sigma} \int \delta(x-x_1)\,dx = e^{2\pi i x_1 \sigma}$$

⑤ dva impulsy

$$F(x) = \delta(x-x_1) + \delta(x+x_1)$$

$$f(\sigma) = e^{2\pi i x_1 \sigma} + e^{-2\pi i x_1 \sigma} = 2\cos 2\pi x_1 \sigma$$

$$F(x) = \delta(x-x_1) - \delta(x+x_1)$$

$$f(\sigma) = e^{2\pi i x_1 \sigma} - e^{-2\pi i x_1 \sigma} = 2i \sin 2\pi x_1 \sigma$$

⑥ Shahova (vzorkovací) funkce

→ impulsy vzorkování po Δx

$$\rightarrow \quad III(x) = \sum_n \delta(x - n\Delta x)$$

$$III(\sigma) = \sum_n \int \delta(x - n\Delta x)\, e^{+2\pi i x \sigma}\, dx =$$

$$= \sum_n e^{2\pi i n \Delta x \sigma} = \sum_n \delta\left(\sigma - \frac{n}{\Delta x}\right)$$

⇒ spacing Δx → spacing $\frac{1}{\Delta x}$

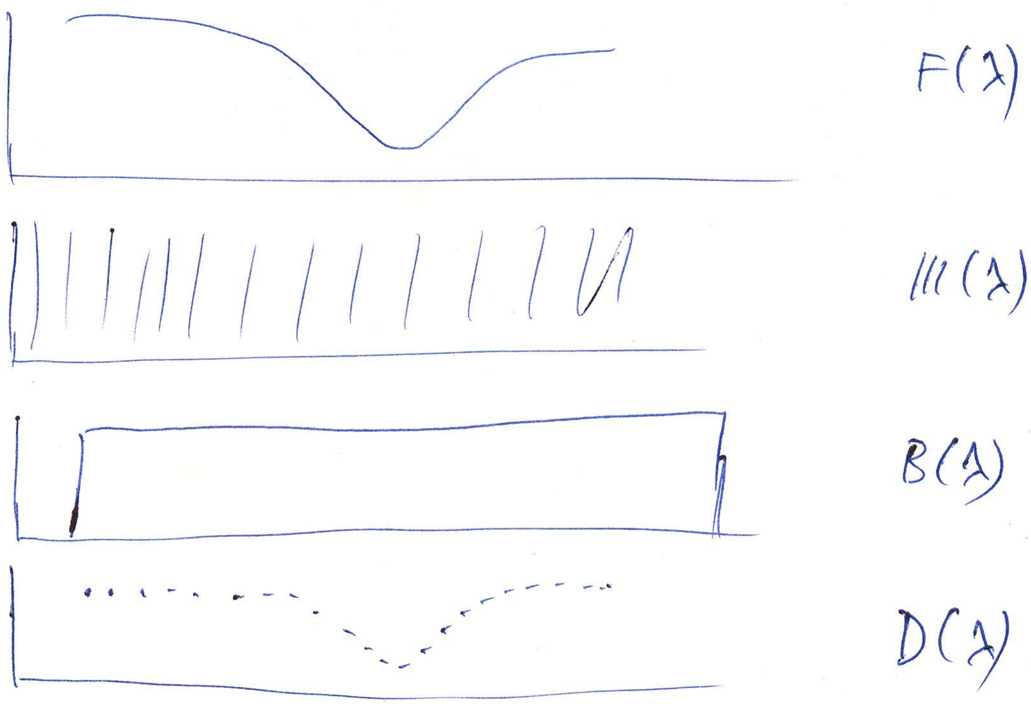
Vzorkování:

$$D(x) = B(x) * III(x) * F(x)$$

↑ vzorek spojitý

konečná doba měření

např. sp. čára



Konvoluce

$$H(x) = \int F(x') \, G(x - x') \, dx' = \int f(\sigma) e^{2\pi i x' \sigma} d\sigma \,.$$

$$\cdot\, g(\sigma') e^{2\pi i (x - x')\sigma'} d\sigma' dx' =$$

$$= \int f(\sigma) g(\sigma') e^{2\pi i x \sigma'} \left(e^{-2\pi i x' (\sigma' - \sigma)} dx' \right) d\sigma d\sigma' = \qquad = \delta(\sigma - \sigma')$$

$$= \int f(\sigma) g(\sigma') e^{2\pi i x \sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \, d\sigma d\sigma' =$$

$$= \int f(\sigma) g(\sigma) \, e^{2\pi i x \sigma} d\sigma$$

$\Rightarrow$ konvoluce $\rightarrow$ násobení ve F. prostoru

$$\mathcal{F}\left(F(x) * G(x) \right) = f(\sigma) g(\sigma)$$

konvoluce graficky

první funkce, druhou otočit a posouvat, počítat plochu průniku

① s δ funkcí

$$f(\sigma) = \int \delta(x - x_1) e^{2\pi i x \cdot \sigma} dx = e^{2\pi i x_1 \sigma}$$

$\Rightarrow \quad x \rightarrow x - x_1$, funkce zůstává

② pro gaussovky:

$$g_a(\sigma) g_b(\sigma) = e^{-\pi \beta_a \sigma^2} e^{-\pi \beta_b \sigma^2} = e^{-\pi^2 \beta_c^2 \sigma^2}$$

$$\beta_c^2 = \beta_a^2 + \beta_b^2$$

③ dvě Lorentzovky

$$f(\sigma) = e^{-2\pi B_a |\sigma|} e^{-2\pi B_b |\sigma|} = e^{-2\pi B_c |\sigma|}$$

$$B_c = B_a + B_b$$

④ gaussian a Lorentzian

$$v(\sigma) = e^{-\pi^2 B_1^2 \sigma^2} e^{-2\pi B_2 |\sigma|}$$

$\Rightarrow$ Voigtova funkce

⑤ dvě Voigtovy funkce

$\rightarrow$ Voigtova funkce , $B_1^2 = (B_1^a)^2 + (B_1^b)^2$

$B_2 = B_2^a + B_2^b$

Vlastnosti FT

1) lineární

2) $F(x - x_1) = e^{2\pi i \sigma x} f(\sigma)$

3) škálování $F(ax) \rightarrow \left|\frac{1}{a}\right| f\left(\frac{\sigma}{a}\right)$

4) $\frac{dF(x)}{dx} = 2\pi i \sigma f(\sigma)$! užitečné pro přesné výpočty derivací

5) $\frac{d(F*G)}{dx} = \frac{dF}{dx} * G = \cancel{F} * \frac{dG}{dx}$

6) $\int G(x) = 1 \Rightarrow \int F(x) G(x) dx = \int F(x) dx$

7) $\bar{x} = \frac{\int x F(x) dx}{\int F(x) dx}$ težiště definováno takto,

pak težiště konvoluce $K(x) = F(x) * G(x)$

je $x_K = x_F + x_G$

8) amplitudy:

$$\int |F(x)|^2 dx = \int |f(\sigma)|^2 d\sigma$$

9) $\int F G^* dx = \int f(\sigma) g^*(\sigma) dx$

Teorém rozlišení

sp. dráha

$$D(\lambda) = B(\lambda)\ III(\lambda)\ F(\lambda)$$

pro každý pixel + instrumentální profil $I(\lambda)$ ↓ odezva na impulsní zdroj, vč. PSF

$$\rightarrow\ D(\lambda) = B(\lambda)\ III(\lambda)\ F(\lambda) * I(\lambda)$$

$I(\lambda)$ obvykle zabíjí vysoké frekvence

zanedbáme vzorkování

$$D(\lambda) = B(\lambda)\ F(\lambda)$$

$$d(\sigma) = b(\sigma) * f(\sigma) = \frac{K \sin \pi\sigma K}{\pi\sigma K} * f(\sigma)$$

$\Rightarrow$ limita rozlišení: $\Delta\sigma = 1/K$

$\sigma > \Delta\sigma$

nelze rozlišit ~~vyšší~~ nižší frekvence, má sidelobes – apodizace

zanedbáme konečnou dobu pozorování

$$D(\lambda) = III(\lambda)\ F(\lambda)$$

$$d(\sigma) = III(\sigma) * f(\sigma) = \sum_n \delta\left(\sigma - \frac{n}{\Delta x}\right) * f(\sigma)$$

$\Rightarrow f(\sigma)$ se reprodukuje s periodou $\frac{1}{\Delta x}$.

Pokud $\sigma < \frac{0.5}{\Delta x} \Rightarrow$ repliky budou zcela separovány pokud $\sigma \geq \frac{1}{2\Delta x}$ $\Rightarrow$ replika se překrývají $\Rightarrow$ aliasing

kmenovací frekvence: $\sigma_N = \frac{1}{2\Delta x}$ ... Nyquistova frekvence

pokud je signál na frekvenci $\sigma > \sigma_N$ $\rightarrow$ nelze provést rekonstrukci

limity: $\Delta\omega \doteq \frac{1}{T} \leq \sigma < \frac{1}{2\Delta x}$

Diskrétní Fourierova transformace

např. FFT $\rightarrow$ optimální, pokud počet vzorků 2^N a data ekvidistantní

$$D(x) = D(j\Delta x) = D(j) \quad \text{zápis}$$

$$\Rightarrow d(\sigma) = \sum D(x)\, e^{2\pi i x_j \sigma} \Delta x = \sum_0^{N-1} D(j)\, e^{2\pi i j \Delta x \sigma} \Delta x$$

pro $\sigma = k\Delta\sigma$

$$d(\sigma) = d(k) = \sum_0^{N-1} D(j)\, e^{2\pi i jk \Delta x \Delta\sigma} \Delta x$$

máme N vzorků $\rightarrow$ odečítáme N hodnot ve frekvenci

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_N}{N/2} = \frac{1}{\Delta x N}$$

užitečná frekvence, za níž by se nemělo jít

frekvence $\pm$

$$\rightarrow d(k) = \sum_0^{N-1} D(j)\, e^{2\pi i jk/N} \Delta x$$

Inverzní ~~Fou~~ transformace

$$D(j) = \sum_0^{N-1} d(k)\, e^{-2\pi i jk/N} \Delta\sigma \quad , \Delta\sigma \text{ známe}$$

$$\Rightarrow D(j) = \frac{1}{\Delta x N} \sum_0^{N-1} d(k)\, e^{-2\pi i jk/N}$$

Přenos šumu

$$F(x) = F_0(x) + E(x) \qquad E(x) \text{ šum}$$
$$\langle E(x) \rangle = 0$$

lineární FT $\Rightarrow$ $f(\sigma) = f_0(\sigma) + e(\sigma)$

pro amplitudy: $\int E^2(x)\,dx = \int e^2(\sigma)\,d\sigma$

měření je uskutečněno v čase, měříme jen v omezeném prostoru frekvencí

$$\int_{x_0}^{x_0+L} E^2(x)\,dx = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} e^2(\sigma)\,d\sigma$$

$\int_{x_0}^{x_0+L} \ldots dx$ je průměr přes L

$\Rightarrow$ $\langle E^2 \rangle L = \langle e^2 \rangle \ell$

$\Rightarrow$ úroveň šumu $\times$ rozsah měření je konstanta

ořezáme frekvence $\rightarrow$ zvýšíme šum

se vzorkováním:

$$\sum_1^N E^2(x_j)\,\Delta x = \sum_1^N e^2(\sigma_j)\,\Delta\sigma \quad . \quad L = \Delta x N, \quad \frac{\ell}{2} = \sigma_N = \frac{1}{2\Delta x}$$

pro standardní odchylky (RMS)

$$s_x = \sqrt{\sum_1^N \frac{E^2(x_j)}{N-1}}, \quad s_\sigma = \sqrt{\sum_1^N \frac{e^2(x_j)}{N-1}}$$

ekvivalent je $s_\sigma^2 \ell = s_x^2 L$

$$\Rightarrow s_\sigma = s_x \left(\frac{L}{\ell}\right)^{1/2} = s_x (\Delta x L)^{1/2} = s_x \Delta x N^{1/2}$$

$\Rightarrow$ redukce šumu: lepší vzorkování ve spektrální čáře – pokud se kontinuum nahradí střední hodnotou a měřené hodnoty nechají jen v profilu → redukce šumu.

Bílý šum – $\langle H(\sigma) \rangle \sim$ konst

→ pokud aliasing → šum z aliasovaných frekvencí (kde není signál) se transformuje do nižších → šum narůstá na úkor signálu

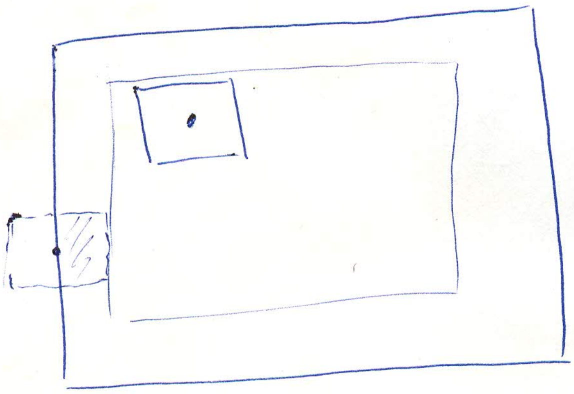
Numerická konvoluce

dvě funkce $f(x) = f(j\Delta x) = f(j)$

$g(x) = g(j\Delta x) = g(j)$

$$\cancel{f(j) * g(j) = \sum_{k=0}^{N} f(j)\, g(j - k\Delta x)\, \Delta x}$$

$$w(k) = \sum_j f(j)\, g(k-j)$$



okrajový jev

→ platné je pouze pole, kde konvoluční jádro nevyčnívá ven z funkce

pokud se FT → předpokládá periodicitu ?

Co pokud jsou pole různě velká ?

→ to menší obložit nulami a pak FT

~~FT~~ konvoluce se FT rychlejší už od polí o 128 pixelů