Základy přenosu záření

- v TE — jedna teplota

částice rovnovážné: $f(v)\,dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\, dv$

stavy v rovnováze: $\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i}\, e^{-\frac{(E_j - E_i)}{kT}}$ Boltzmann

$g_i = 2i^2$ pro H g_i počet deg. stavů

ionizace v rovnováze:

$$\frac{N_I}{N_{I+1}} = n_e \frac{U_I}{U_{I+1}}\, c\, T^{-3/2}\, e^{\frac{E_I}{kT}}$$

$$U_I = \sum_1^{\infty} g_i\, e^{-\frac{E_i}{kT}}$$ partiční funkce

(odlat, velmi vysoké stavy v praxi nenastávají)

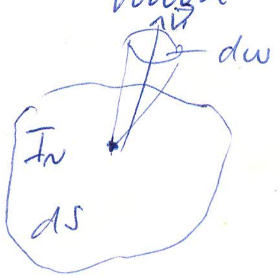
$n_e \sim N_p$ v oblasti plné ionizace vodíku

(teplotní minimum problém)

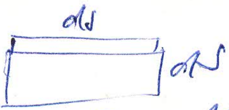
$n_e \sim (10-100)\, n_H$

⇒ není co řešit, intenzita je Planckovská

LTE — TE platí lokálně pro částice, intenzita se musí řešit → $\boxed{\text{přenos záření}}$



$$dE = I(\vec r, \vec n, \nu, t)\, dS \cos\vartheta\, d\omega\, d\nu\, dt$$



absorpce:

$$dE = \chi(\vec r, \vec n, \nu, t)\, I(\vec r, \vec n, \nu, t)\, dS\, ds\, \cancel{d\omega}\, d\nu\, dt$$

$1/\chi = l$ … střední volná dráha

absorpce — ~~prava~~ — foton absorbován, ohřev

— reemise = rozptyl

~~emise~~

emise $\quad dE = \eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\, dS\, ds\, d\omega\, d\nu\, dt$

rovnovážka $\quad \eta = \kappa B$ ... Kirchhoffův zákon

nerovnovážka $\quad \frac{\eta}{\kappa} = S$ ... zdrojová funkce

bilance:

$$\left[I(\vec{r}+\Delta\vec{r}, \vec{n}, \nu, t+\Delta t) - I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\right] dS\, d\omega\, d\nu\, dt =$$

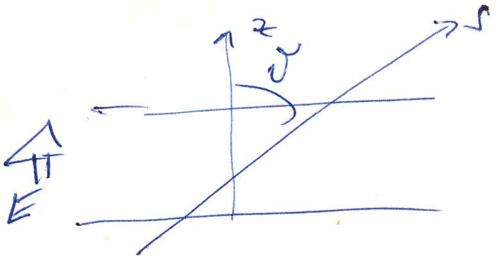
$$= \left[\eta(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t) - \kappa(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\, I(\vec{r}, \vec{n}, \nu, t)\right] ds\, dS\, d\omega\, d\nu\, dt$$

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial s} ds + \frac{\partial I}{\partial t} dt = |ds = c\,dt| = \left(\frac{\partial I}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}\right) ds =$$

$$= \left(\frac{\partial I}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t}\right) n \cdot \nabla$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c}\frac{\partial I}{\partial t} + (n \cdot \nabla) I = \eta - \kappa I}$$

stacionární intenzita, planparalelní atmosféra



$$\frac{d}{ds} = \mu \frac{d}{dz} \; ; \qquad n_z = \frac{dz}{ds} = \cos\vartheta = \mu$$

$$\Rightarrow \text{RTE:} \quad \mu \frac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu - \kappa_\nu I_\nu \qquad | : \kappa_\nu$$

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\kappa_\nu\, dz} = \frac{\eta_\nu}{\kappa_\nu} - I_\nu \qquad S_\nu \; ; \quad d\tau_\nu = -\kappa_\nu\, dz$$

$$\Rightarrow \mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

τ_ν ... optická hloubka

S_ν ... zdrojová funkce

Elementární řešení RTE v planparalelní aproximaci

a) $\chi = 0,\ \eta = 0$ nezavádíme opt. hloubku

$$\frac{dI}{dz} = 0 \rightarrow I = \text{konst.}$$

b) $\chi = 0,\ \eta > 0$; $\mu \dfrac{dI_\nu}{dz} = \eta_\nu$

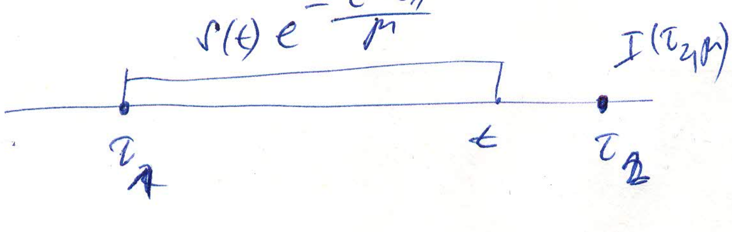
$$I(z,\mu) = I(0,\mu) + \int_0^z \eta(z')\,\frac{dz'}{\mu}$$

c) $\chi > 0,\ \eta = 0$

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu \rightarrow I_\nu(0,\mu) = I_\nu(\tau,\mu)\, e^{-\tau/\mu}$$

d) ~~polonekonečná atmosféra~~ formální řešení

$$I(\tau_1,\mu) = I(\tau_2,\mu)\, e^{-\frac{(\tau_2-\tau_1)}{\mu}} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t)\, e^{-\frac{t-\tau_1}{\mu}}\,\frac{dt}{\mu}$$



e) polonekonečná atmosféra

$\tau_2 \rightarrow \infty,\ \tau_1 = 0$

$$I(0,\mu) = \int_0^\infty S(t)\, e^{-\frac{t}{\mu}}\,\frac{dt}{\mu}$$

I v τ_2 se neprojeví přímo, ale ovlivňuje $S(t)$

e1) lineární zdrojová funkce

$S(\tau) = a + b\tau$

~~RTE má~~

$$I(0,\mu) = \int_0^\infty (a+bt)\, e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} =$$

$$= a\int_0^\infty e^{-t/\mu}\frac{dt}{\mu} + b\mu\int_0^\infty \frac{t}{\mu}\, e^{-t/\mu}\frac{dt}{\mu} =$$

$$= a\left[-e^{-x}\right]_0^\infty + b\mu\left[-e^{-x}(x+1)\right]_0^\infty = \underline{a + b\mu}$$

formálně

$$I(0,\mu) = S(\tau=\mu)$$

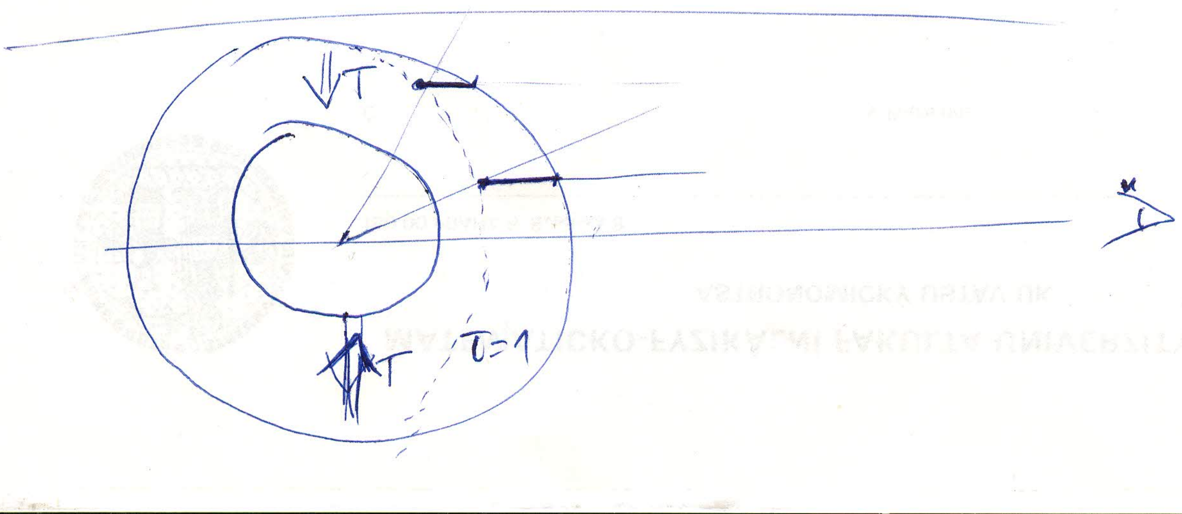
Eddington–Barbier

1. kolmo: $\tau = 1$, $I = S$
   → intenzita odpovídá zdrojové funkci v $\tau = 1$
2. šikmo: $I \searrow a$

pokud $S \nearrow \tau$ ⇒ $I \searrow \mu$ → okrajové ztemnění pro $\lambda > 160$ nm

pro $\lambda < 160$ nm, $S \searrow \tau$ → okrajové zjasnění

$S(\tau) = S_\nu(\tau)$ ⇒ v různých oborech různé hloubky



Rozptyl

elastický – Thomsonův – bez výměny energie

neelastický – Comptonův – s výměnou energie

Thomsonův účinný průřez

$$\chi_\nu^{ES} = n_e \sigma_e$$

$$\eta_\nu^{ES} = n_e \sigma_e \; \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu')\, \underbrace{g(\mu,\mu')}_{\text{fázová fce}}\, d\mu' = n_e \sigma_e J_\nu$$

pro izotropní

fázová fce : distribuce v úhlech

foton se neztrácí – do jiného směru

$$\chi_\nu^{tot} = \chi_\nu^{term} + n_e \sigma_e$$

$$\eta_\nu^{tot} = \eta_\nu^{term} + n_e \sigma_e J_\nu$$

$$S_\nu = (1-\varepsilon_\nu) J_\nu + \varepsilon_\nu S_\nu^{term} \qquad S_\nu^{term} = B_\nu$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{\chi_\nu^{term}}{\chi_\nu^{tot}}$$ ... pravd. zničení fotonu

$$J_\nu \sim \int \varphi_\nu(\nu') J_{\nu'}(\nu')\, d\nu'$$

~~Milne – Eddington~~

$\cancel{\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S \; ; \; S = (1-\varepsilon) J + \varepsilon B}$

~~přechod k momentům~~ $\cancel{J, H, K}$

$\cancel{\frac{dH}{d\tau} = J - S \; ; \; \frac{dK}{d\tau} = H}$

~~+ Eddingtonova aproximace~~ $\cancel{K \sim 1/3\, J}$ ~~(izotropní záření)~~

$\cancel{\frac{d^2K}{d\tau^2} = J - S \Rightarrow 1/3 \frac{d^2J}{d\tau^2} = J - S = \varepsilon (J - B)}$

Momenty RTE v planparalelní aproximaci

$$J_\nu = 1/2 \int_{-1}^{1} I_\nu(\mu)\, d\mu$$ střední intenzita (přes směry)

$$\left(= \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu(\omega)\, d\omega = 1/4\pi \int I_\nu(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\right)$$

$$H_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \mu I_\nu(\mu)\, d\mu$$ tok záření

výsledné záření ve všech směrech

$$K_\nu = 1/2 \int_{-1}^{1} \mu^2 I_\nu(\mu)\, d\mu$$ .. souvisí s tlakem záření

$$\overleftrightarrow{K_\nu} = 1/2 \int \vec{\mu} \otimes \vec{\mu}\, I_\nu(\mu)\, d\mu$$

tensor tlaku záření pro $\vec{\mu} = \mu \vec{n}$

⇒ 1. moment RTE:

$$\frac{dH_\nu}{d\tau} = J_\nu - S_\nu$$

2. moment RTE:

$$\frac{dK_\nu}{d\tau} = H_\nu$$

$$\int \mu S_\nu\, d\mu = 0$$

lichá, sudá v μ

... systém není uzavřený

⇒ zavádí se Eddingtonův faktor

$$f_\nu^{K} = \frac{K_\nu}{J_\nu}$$ $f_\nu^K = 1/3$ pro $I_\nu \neq I_\nu(\mu)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 (f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu}$$ lze řešit

difuzní rovnice

Rosselandova aproximace

velká opacita – difuzní aproximace

Milne-Eddington

čárová (L) a kontinuální (C) absorpce a emise

$\varkappa_\nu = \varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L + \sigma \longleftarrow$ rozptyl v kontinuu

$\eta_\nu = \varepsilon_\nu^C + \varepsilon_\nu^L + \sigma J_\nu$

$d\tau_\nu = (\varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L)\, dz$

optická hloubka je větší v čáře než v kontinuu

~~Formování čáry?~~

~~Barbier-Eddington ($S(\tau) = a + b(\tau)$)~~

~~v LTE: $S_\nu = B_\nu(T) \Rightarrow T \searrow z,\ S_\nu \searrow z$~~

~~$\to$ absorpční čára~~

~~(pro stejné τ musíme být výš v atmosféře, pak $\varepsilon \sim \varkappa$ a $\varkappa$ je větší)~~

RTE:
$$\mu \frac{dI_\nu(\mu)}{dz} = (\varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L + \sigma) I_\nu - \varepsilon_\nu^C - \varepsilon_\nu^L - \sigma J_\nu$$

+ LTE v kontinuu: $\dfrac{\varepsilon_\nu^C}{\varkappa_\nu^C} = B_\nu(T)$

+ v kontinuu rozptyl zanedbatelný $\sigma \ll \varkappa_\nu^C$

+ dvouhladinový atom

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = (\varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L)\left[I_\nu - \frac{\varkappa_\nu^C}{\varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L} B_\nu + \frac{\varkappa_\nu^L}{\varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L} S_\nu^L\right]$$

pro $\beta_\nu = \dfrac{\varkappa_\nu^L}{\varkappa_\nu^C}$; $d\tau_\nu = (\varkappa_\nu^C + \varkappa_\nu^L)\, dz = \varkappa_\nu^C (1 + \beta_\nu)\, dz$

$$\lambda_\nu = \frac{1 + \varepsilon \beta_\nu}{1 + \beta_\nu} \quad \text{s } \varepsilon \text{ z } S_\nu^L = (1-\varepsilon)\int_0^\infty \varphi_{\nu'} J_{\nu'}\, d\nu' + \varepsilon B_\nu(T)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu B_\nu - (1-\lambda_\nu)\int_0^\infty \varphi_\nu J_\nu\, d\nu}$$

+ λ_ν, ε a β_ν konstantní s hloubkou

+ B_ν lineární s optickou hloubkou v kontinuu

$B_\nu = a + b\tau_c$

$d\tau_c = \frac{d\tau_\nu}{1+\beta_\nu}$; $\tau_c = \frac{\tau_\nu}{1+\beta_\nu}$

+ $\int \varphi_\nu J_\nu \, d\nu \sim J_\nu$

+ Eddingtonova aproximace

$$K_\nu = 1/2 \int_{-1}^{1} \mu^2 I_\nu(\mu)\, d\mu = \frac{1}{3} J_\nu$$

$H_\nu(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} J_\nu(0)$ okrajová podmínka

cíl:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu B_\nu - (1-\lambda_\nu) J_\nu$$

momenty: $\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - \lambda_\nu B_\nu - (1-\lambda_\nu) J_\nu$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu \Rightarrow \frac{d^2 K_\nu}{d\tau_\nu^2} = \frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - \lambda_\nu B_\nu - (1-\lambda_\nu) J_\nu$$

$$\Rightarrow 1/3 \frac{d^2 J_\nu}{d\tau_\nu^2} = \lambda_\nu (J_\nu - B_\nu)$$

B_ν lineární v τ $\Rightarrow$ $1/3 \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} = 0$, tedy

$$\frac{1}{3} \frac{d^2}{d\tau_\nu^2} (J_\nu - B_\nu) = \lambda_\nu (J_\nu - B_\nu)$$

řešení: $\boxed{J_\nu - B_\nu = \alpha_\nu e^{-\sqrt{3\lambda_\nu}\,\tau_\nu} + \gamma_\nu e^{\sqrt{3\lambda_\nu}\,\tau_\nu}}$

okrajové podmínky: $\tau_\nu \to \infty$: $J_\nu \to B_\nu \to \gamma_\nu = 0$

$\tau_\nu = 0$: $H_\nu(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} J_\nu(0)$

$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = 1/3 \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu$ $\quad 1/3 \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu}\Big|_{\tau_\nu = 0} = H_\nu(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} J_\nu(0)$

$J_\nu(0) = \alpha_\nu + B_\nu(0) = \alpha_\nu + a$ $\;\Big|\;$ $\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu}\Big|_{\tau_\nu = 0} = J_\nu(0)$

↳ $B_\nu = a + b\tau_c$

$\cancel{J_\nu - B_\nu = \alpha_\nu e}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu}\bigg|_{\tau_\nu=0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\alpha_\nu \sqrt{3\lambda_\nu} + \frac{b}{1+\beta_\nu} \right] = \alpha_\nu + a$$

$$\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{dB_\nu}{d\tau_c} \frac{1}{1+\beta_\nu} = \qquad B_\nu = a + b\tau_c$$

$$= \frac{b}{1+\beta_\nu}$$

$$\Rightarrow \alpha_\nu = \frac{\frac{b}{1+\beta_\nu} - \sqrt{3}\,a}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{3\lambda_\nu}\right)}$$

pokud definujeme $\quad p_\nu = \dfrac{b}{1+\beta_\nu}$

$$J(\nu) = a + p_\nu \tau_\nu + \frac{p_\nu - a\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{3\lambda_\nu}}\, e^{-\sqrt{3\lambda_\nu}\,\tau_\nu}$$

<u>termalizační hloubka</u> $\quad \tau_\nu > 1/\sqrt{\lambda_\nu}$

$$J_\nu \to B_\nu$$

Inverze spektrálních čar

– ~~získat model atmosféry, který nejlépe reprodukuje pozorované profily~~ souboru spektrálních čar

– planparalelní atmosféra, lineární S

$$I_\nu(0,\mu) = S(\tau=\mu) \quad \text{pro } S(\tau)=a+b\tau$$

přes profil čáry χ_ν se mění (v čáře je větší)

~~potom~~

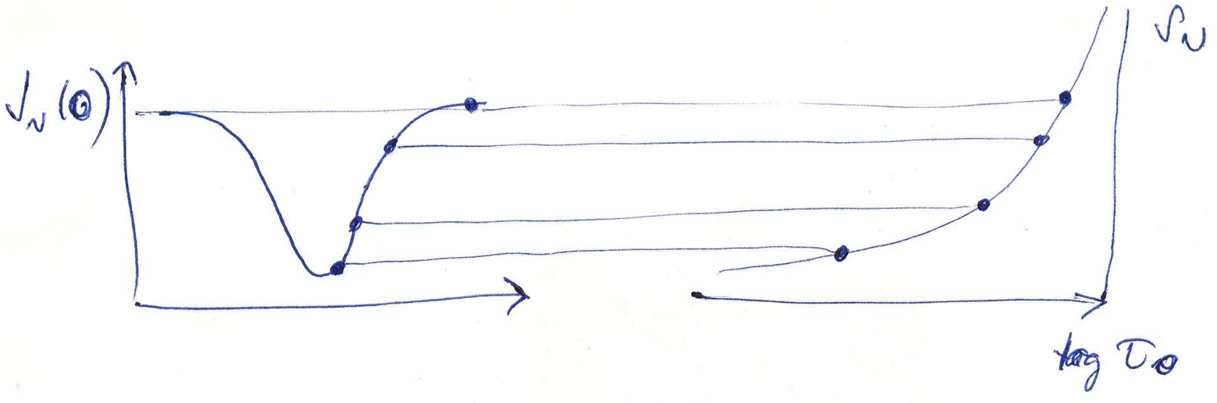
v LTE: $S_\nu = B_\nu(T)$: pro $T \searrow z$, $S_\nu \searrow z$

$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu}$ &

$\Rightarrow$ pro $\chi_\nu \nearrow$ $S_\nu \searrow$ $\Rightarrow$ v čáře jsme pro dané μ výš v atmosféře

pokud S_ν se mění málo s ν

$\Rightarrow$ mapování $S_\nu(\tau_\nu)$ a $I_\nu(\tau=0)$



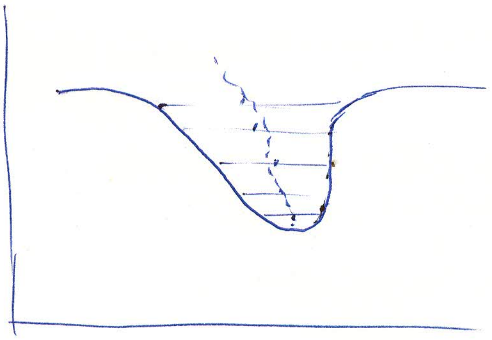
pokud LTE $\Rightarrow$ $S_\nu = B_\nu$, $B_\nu = B_\nu(T)$ $\Rightarrow$ inverze teploty

(model atmosféry)

známe-li $T=T(z)$ $\Rightarrow$ $B_\nu = B_\nu(z)$ $\Rightarrow$ $S_\nu = S_\nu(z)$

cíl: pro danou hloubku ve sp. čáře lze stanovit hloubku v atmosféře

oproti modelu lze vyhodnotit rozšíření, posuv a asymetrii čáry v závislosti na hloubce v atmosféře



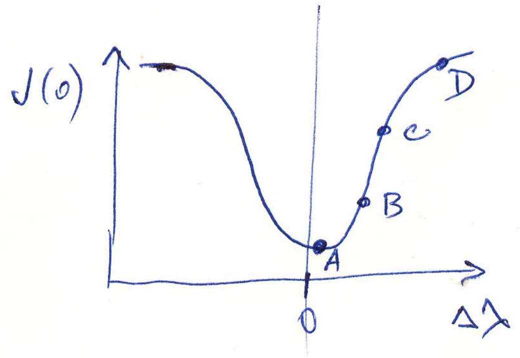
bisektory

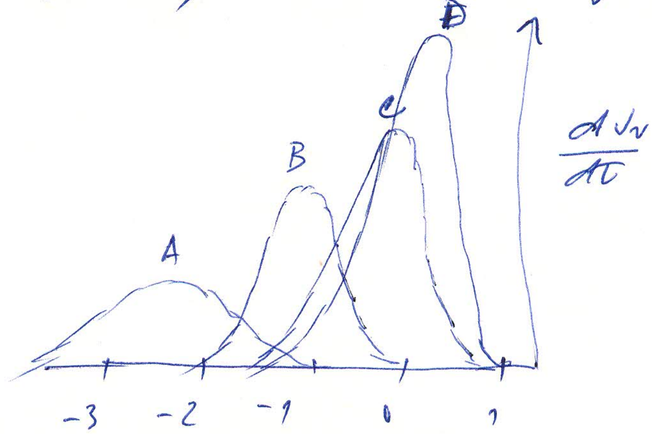
bisektor (ν)

$$\Delta\nu_0 = \nu\left(\frac{v_{dip}}{c}\right)$$

$\to$ měříme $\Delta\nu_0(\nu) \longrightarrow \left|\begin{array}{l} T = T(z) \\ B_\nu = B_\nu(z) \\ I_\nu = I_\nu(z) \\ I_\nu = I_\nu(\tau) \end{array}\right| \longrightarrow v_{dip}(z)$

ale! napovídání $(\nu-\nu_0) \to \tau$ není jednoznačné





$\frac{dI_\nu}{d\tau}$ ... příspěvkové funkce

pozn. velmi silné čáry (H, K) mají u chladných hvězd často centrální emisi. To je proto, že $\tau = 1$ je v centru čáry dosaženo v chromosféře, kde opět $I_\nu \nearrow z$.

SIR: Stokes Inversion based on Response functions

$$\chi^2 = \left| \sum_i \left(I^i_{\nu\begin{pmatrix}Q\\U\\V\end{pmatrix}} \varphi^i_\nu - I^{\text{model}_i}_{\nu\begin{pmatrix}Q\\U\\V\end{pmatrix}} \varphi^{\text{model}_i}_\nu \right) \right|^2$$

$I_{\nu\begin{pmatrix}Q\\U\\V\end{pmatrix}}$ - RTE, horizontálně, vertikálně se předpokládá pomalá změna
$\to$ 2–7 uzlů, zbytek se interpoluje

plane parallel geometry, LTE $\to$ fotosféra 0, v_r: $5\,\mathrm{km} = 23 =$