

6 Oscilace

6.1 Výkonové spektrum

lokální studium \rightarrow zanedbáme zakřivení povrchu \rightarrow planparalelní geometrie \rightarrow rozklad signálu $\Phi(\mathbf{k}, t)$ (radiální rychlost, intenzita, ...) do Fourierovských komponent

$$\Phi(\mathbf{k}, t) = \iiint dx dy dt \Phi(x, y, t) \exp(-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (1)$$

globální studium \rightarrow nezanedbáváme zakřivení povrchu \rightarrow rozklad do báze kulových funkcí Y_l^m (funkce $P_l^m(\theta, \phi)$ Legendreovy polynomy)

$$\Phi(l, m, \omega) = \iiint d\theta d\phi dt \Phi(\theta, \phi, t) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (2)$$

$$Y_l^m(\theta, \phi, t) = P_l^m(\theta, \phi) \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

Výkonové spektrum $P(\mathbf{k}, t)$ je z definice rovno

$$P(\mathbf{k}, t) = \Phi\Phi^*. \quad (4)$$

- rezonance ve výkonovém spektru svědčí o stojatém vlnění (viz Obr. 1)
- u módů s nízkým l velká a malá separace: velká je citlivá na střední hustotu, malá na rychlost zvuku v blízkosti jádra, množství vodíku v blízkosti jádra, věk hvězdy
- typická frekvence oscilací 2,5-4,5 mHz (5 minut)
- frekvence vyšší než 5,3 mHz se neodrážejí zpět pod povrch, ale unikají do atmosféry
- sférická symetrie $\Rightarrow P \neq P(m)$
- pozorujeme jen polokouli, na ní nejsou kulové funkce ortogonální \rightarrow vznikají falešné módy

6.2 Vzorkovací teorém

Předpokládejme spojitý 2D signál $f(x, y)$, který budeme vzorkovat. Jak husté musí být vzorkování (reprezentované polem delta funkcí $s(x, y)$ s kroky Δx a Δy)

$$s(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y), \quad (5)$$

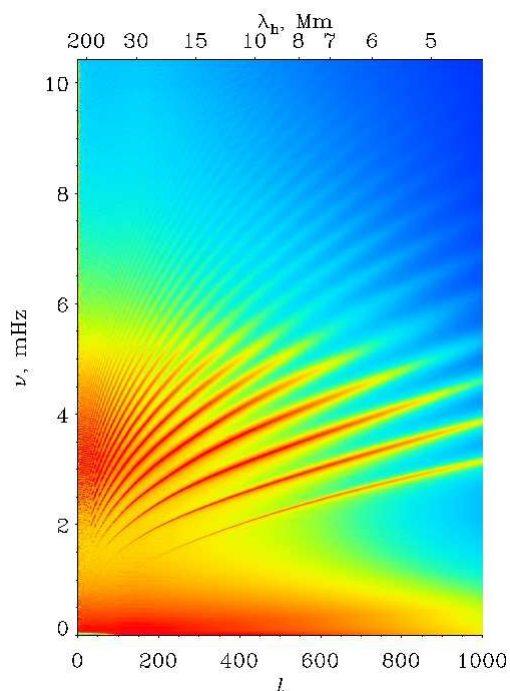
abychom neztráceli informaci (tj. byli schopni přesně zrekonstruovat původní spojitou funkci)? Vzorkovaný signál $d(x, y)$ je roven

$$d(x, y) = f(x, y) s(x, y). \quad (6)$$

Převedením do Fourierova prostoru a využitím konvolučního a škálovacího teorému dostáváme pro vzorkovaný signál $D(u, v)$ a pole delta funkcí $S(u, v)$:

$$D(u, v) = F(u, v) * S(u, v) \quad (7)$$

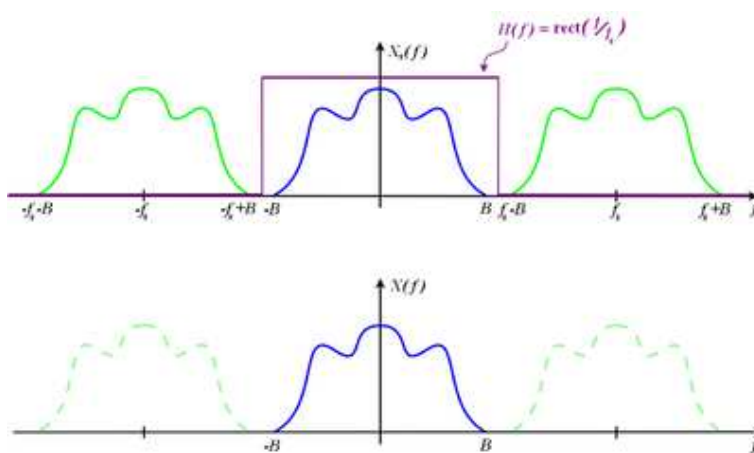
$$S(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - i\frac{1}{\Delta x}, v - j\frac{1}{\Delta y}\right) \quad (8)$$



Obrázek 1: Výkonové spektrum oscilací Slunce.

Význam $D(u, v)$ je takový, že vezmu spektrum funkce $f(x, y)$ a dám ho do bodů, které jsou vzdáleny $\frac{1}{\Delta x}$ a $\frac{1}{\Delta y}$ (viz Obr. 2). Následným vyříznutím obdélníkovou funkcí $H(u, v)$ (funkce nabývá hodnoty 1 kolem jednoho spektra, jinde je 0) získáme funkci $F(u, v)$. Inverzní Fourierovou transformací (IFT) obdržíme celou spojitou funkci $f(x, y)$. V reálném prostoru koresponduje s inverzní Fourierovou transformací interpolace. Neboli

$$f(x, y) = \text{IFT}(D(u, v)W(u, v)) = d(x, y) * w(x, y). \quad (9)$$



Obrázek 2: Funkce $D(u, v)$, modře jedno spektrum $F(u, v)$, fialově obdélníková funkce $H(u, v)$.

To nám mimo jiné říká, že ideální interpolace je konvoluce vzorkovaného signálu s inverzní Fourierovou transformací obdélníkové funkce (tzv. sinc funkce). Pokud má ale funkce omezený nosič/spektrum v reálném/Fourierově prostoru, bude mít neomezené spektrum/nosič ve Fourierově/reálném prostoru. Proto se k interpolaci nepoužívá sinc, která má neomezený nosič (v důsledku toho se v interpolaci libovolného bodu musí do výpočtu zahrnout všechny vzorkované body $d(x, y)$), ale funkce jí podobné.

Tento postup nelze aplikovat vždy. Hlavním problémem je překryv spekter ve funkci $D(u, v)$. Pokud má $F(u, v)$ omezené spektrum, dá se tento problém vyřešit hustším vzorkováním daným Nyquistovými nerovnicemi. Pro vyříznutí pouze jednoho spektra musí platit

$$\frac{1}{\Delta x} \geq 2W_u, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \geq 2W_v, \quad (11)$$

$$\Delta x \leq \frac{1}{2W_u}, \quad (12)$$

$$\Delta y \leq \frac{1}{2W_v}, \quad (13)$$

kde W_u a W_v jsou suprema frekvencí $F(u, v)$. Pokud $F(u, v)$ nemá omezené spektrum, budou se překrývat vždy. Vyříznutím spektra $F(u, v)$ současně vyřízneme i část sousedního spektra $F(u, v)$, čímž vznikají falešné frekvence (aliasing) a ztrácíme informaci o vysokofrekvenčním signálu (detaily, hrany). Problému se dá zabránit za cenu oříznutí vysokých frekvencí $F(u, v)$ tak, aby se při daném vzorkování již nepřekrývaly (ořezává se ještě před Fourierovou transformací $f(x, y)$).

Pokud budeme pozorovat po dobu T , bude nejnižší frekvence, kterou rozlišíme $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ta se dá „libovolně“ snižovat delšími pozorovacími řadami. Naopak nejvyšší rozlišitelná frekvence ω_{Ny} je při vzorkování s frekvencí Δt rovna $\omega_{Ny} = \frac{\pi}{\Delta t}$. Všechny vyšší frekvence se vzorkují do nižších (aliasing). Konkrétně o co je frekvence vyšší než Nyquistova $\omega = \omega_{Ny} + \delta\omega$, o to se tato frekvence bude vzorkovat do nižších frekvencí $\omega = \omega_{Ny} - \delta\omega$.

6.3 Základní mód oscilací

Základním módem oscilací budeme rozumět vlnu šířící se rychlostí zvuku c_s a mající vlnovou délku rovnou průměru Slunce $\lambda = 2R_\odot$. Dále budeme předpokládat adiabatickou aproximaci a pokusíme se odhadnout časovou škálu průchodu vlny Sluncem tam a zpět. Rychlost zvuku můžeme spočítat z rovnice

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{\bar{\rho}}}, \quad (14)$$

kde \bar{P} a $\bar{\rho}$ jsou střední hodnota tlaku a střední hodnota hustoty. Pro střední hodnotu hustoty platí:

$$\bar{\rho} = \frac{3}{4\pi} \frac{M_\odot}{R_\odot^3} \quad (15)$$

Střední hodnotu tlaku odhadneme z rovnice hydrostatické rovnováhy, kterou hrubě diskretizujeme (povrch - střed):

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4} \Rightarrow \frac{0 - \bar{P}}{M_\odot - 0} = -\frac{GM_\odot}{4\pi R_\odot^4} \Rightarrow \bar{P} = \frac{GM_\odot^2}{4\pi R_\odot^4} \quad (16)$$

Čas průchodu vlny τ spočítáme z rovnice:

$$\tau = 2 \frac{\lambda}{c_s} = \frac{4R_\odot}{\sqrt{\frac{\gamma G M_\odot}{3 R_\odot}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi \gamma}} (G \bar{\rho})^{-1/2} \quad (17)$$

Pokud dosadíme, vyjde řádově 45 minut. Reálně jsou ale časy kratší, protože rychlost zvuku směrem do centra roste.

6.4 Lineární adiabatické oscilace nerotujícího Slunce

6.4.1 Předpoklady a základní rovnice

Předpoklady:

- poruchy (indexované čárkou) jsou malé vůči požadovým hodnotám (indexované nulou)
- lineární: $v' \ll c_s$
- adiabatické: $\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{konst.}$
- sféricky symetrické pozadí
- zanedbáváme magnetická pole, tenzor napětí, rotaci
- $\mathbf{v}_0 = 0$, $\rho_0 = \rho_0(r)$, $P_0 = P_0(r)$

Řešené rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P - \nabla \Phi \rho \quad (19)$$

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \text{konst.} \quad (20)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi \rho G \quad (21)$$

Dále víme, že $\nabla \Phi = g$ je gravitační zrychlení. Na stavovou rovnici aplikujeme úplnou časovou derivaci:

$$\frac{d}{dt} \frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{dP}{dt} \frac{1}{\rho^\gamma} - P \gamma \frac{1}{\rho^{\gamma+1}} \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{dP}{dt} - P \gamma \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right) \frac{1}{\rho^\gamma} = 0 \quad (22)$$

Navíc $c_s^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$. Celkem dostáváme:

$$\frac{dP}{dt} = c_s^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (23)$$

Do rovnic zavedeme Eulerovské perturbace (čárkované) ρ' , $\mathbf{v}' = \frac{d\xi}{dt}$, P' a Φ' . S Lagrangeovými perturbacemi (δ) souvisí vztahem

$$\delta A = A' + \xi_r \cdot \frac{\partial A_0}{\partial r}. \quad (24)$$

6.4.2 Linearizace rovnic a Cowlingova aproximace

Hustotu, tlak, rychlost a gravitační potenciál si rozdělíme na požadovou hodnotu a poruchu. Budeme předpokládat, že požadové hodnoty splňují rovnice (18)–(21).

Linearizace rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = \nabla \cdot \left(\xi \frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right) = -\nabla \cdot [\xi \nabla \cdot (\rho_0 v_0)] \quad (27)$$

Poslední rovnice je ale ve skutečnosti rovna nule, protože jsme předpokládali $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Rovnici integrujeme přes libovolný čas dt . Aby byla splněna pro libovolný čas, musí platit

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0. \quad (28)$$

Linearizace ostatních rovnic je triviální. Stavovou rovnici však máme zapsanou pomocí úplných derivací, tedy Lagrangeových poruch. Pomocí převodního vztahu mezi Lagrangeovými a Eulerovskými poruchami (24) odvodíme požadovaný tvar. Linearizované rovnice nabývají tvaru:

$$\rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \xi) = 0 \quad (29)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' - \nabla \Phi' \rho_0 - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (30)$$

$$P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (31)$$

$$\Delta \Phi' = 4\pi \rho' G \quad (32)$$

Pro zjednodušení rovnic budeme předpokládat, že malé poruchy způsobené vlnami mají za následek pouze zanedbatelné poruchy gravitačního pole (Cowlingova aproximace). Tím fakticky škrtneme Poissonovu rovnici a jeden ze členů v pohybové rovnici. Tímto zjednodušením se dopouštíme odchylky jen několika jednotek procent od řešení plných rovnic.

Zbylé rovnice převedeme do sférických souřadnic. Například $\xi = \xi_r \mathbf{e}_r + \xi_h$. Při lokálním přístupu složka r koresponduje se složkou z a složky h se složkami x a y . V dalších úpravách budeme potřebovat operátor divergence ve sférických souřadnicích (úhlovou část nemusíme rozepisovat):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 A_r) + \frac{1}{r} \nabla_h \cdot \mathbf{A}_h \quad (33)$$

Hydrodynamické rovnice převedeme do sférických souřadnic, pohybovou rovnici rozdělíme na radiální a úhlovou část a ze stavové rovnice vyjádříme ρ' :

$$\rho' + \nabla_r \cdot (\rho_0 \xi_r) + \frac{1}{r} \nabla_h \cdot (\rho_0 \xi_h) = 0 \quad (34)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \xi_h = 0 \quad (35)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla P' - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (36)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} \right) = -\nabla_r P' - \frac{1}{r} \nabla_h P' - g \mathbf{e}_r \rho' \quad (37)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\nabla_r P' - g \rho' \quad (38)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (39)$$

$$P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = c_s^2 \left(\rho' + \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (40)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \xi_r \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \quad (41)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (42)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \xi_r \left(\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (43)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho_0}{g} g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \quad (44)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho_0}{g} N^2 \quad (45)$$

N^2 v posledním vztahu je Brunt-Väisälöva frekvence. Opravdu? Z teorie směšovací délky víme, že

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{\text{ad}} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right], \quad (46)$$

ale pro adiabatické přiblížení můžeme za $\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right)_{\text{ad}}$ dosadit $\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r}$. Tím dostáváme

$$N^2 = \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) = g \left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln P_0}{\partial r} - \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} \right). \quad (47)$$

Celkem máme nyní k řešení 4 rovnice:

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \xi_h = 0 \quad (48)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} = -\nabla_r P' - g \rho' = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (49)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (50)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \xi_r \quad (51)$$

Řešení prostředních dvou budeme hledat ve tvaru $\xi_r \propto \exp(-i\omega t)$, $\xi_h \propto \exp(-i\omega t)$, čímž obdržíme soustavu rovnic:

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho_0 \xi_r) + \frac{\rho_0}{r} \nabla_h \cdot \xi_h = 0 \quad (52)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g \rho' \quad (53)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{1}{r} \nabla_h P' \quad (54)$$

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{N^2 \rho_0}{g} \xi_r \quad (55)$$

Pro řešení navíc budeme předpokládat následující okrajové podmínky:

$$\xi(r=0) = 0 \quad (56)$$

$$\delta P(r=R_\odot) = 0 \quad (57)$$

První z nich je podmínka stabilního středu Slunce, druhá říká, že nejsou žádné externí síly (například atmosféra).

6.4.3 Řešení v separovaném tvaru

Řešení budeme hledat v následujícím separovaném tvaru:

$$\rho'(r, \theta, \phi) = \rho'(r) f(\theta, \phi), \quad (58)$$

$$P'(r, \theta, \phi) = P'(r) f(\theta, \phi), \quad (59)$$

$$\xi_r(r, \theta, \phi) = \xi_r(r) f(\theta, \phi), \quad (60)$$

$$\xi_h(r, \theta, \phi) = \xi_h(r) \nabla_h f(\theta, \phi), \quad (61)$$

kde $f(\theta, \phi)$ je neznámá funkce úhlových souřadnic. Navíc budeme předpokládat regulární řešení na pólech. Po jednoduchém dosazení (58) – (61) do (52) – (55) se budeme zajímat nejprve o rovnici kontinuity:

$$\left[\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho_0 \xi_r) \right] f(\theta, \phi) + \frac{\rho_0}{r} \xi_h \Delta_h f(\theta, \phi) = 0 \quad (62)$$

Pokud budeme hledat řešení v separovaném tvaru, musíme z rovnice vykrátit $f(\theta, \phi)$. Takže musí být splněna rovnice

$$\Delta_h f(\theta, \phi) = \alpha f(\theta, \phi), \quad (63)$$

kde $\alpha = -l(l+1)$, což je nutná podmínka pro regulární řešení na pólech. Navíc vlastní funkce Laplaceova operátoru jsou kulové funkce. Řešení tedy hledáme v separovaném tvaru radiální části poruchy a kulových funkcí. Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích můžeme formálně zapsat jako $\Delta = \Delta_r + \Delta'_h = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_h$. Po dosazení do rovnice (63) dostáváme vztah pro horizontální vlnový vektor \mathbf{k}_h :

$$\Delta_h Y_l^m(\theta, \phi, t) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (64)$$

$$r^2 \Delta'_h Y_l^m(\theta, \phi, t) = -l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi, t) \quad (65)$$

Budeme předpokládat lokální přístup, kdy můžeme zanedbat zakřivení povrchu a vlastní funkce Laplaceova operátoru jsou imaginární exponenciály. Neboly:

$$r^2 (i^2 k_h^2) = -l(l+1) \quad (66)$$

$$k_h = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \quad (67)$$

Z horizontální části pohybové rovnice vyjádříme ξ_h a dosadíme spolu se stavovou rovnicí do (62):

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{P'}{r} \nabla_h f(\theta, \phi) \quad (68)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h \nabla_h f(\theta, \phi) = -\frac{P'}{r} \nabla_h f(\theta, \phi) \quad (69)$$

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_h = -\frac{P'}{r} \quad (70)$$

$$\xi_h = \frac{P'}{\omega^2 \rho_0 r} \quad (71)$$

$$\rho' + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 \rho_0 \xi_r) - \frac{l(l+1) \rho_0}{r} \xi_h = 0 \quad (72)$$

$$\rho' + \frac{2}{r} \rho_0 \xi_r + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \xi_r + \rho_0 \frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2 \omega^2} P' = 0 \quad (73)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2 \frac{\xi_r}{r} + \xi_r \left(\frac{N^2}{g} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{l(l+1) c_s^2}{\omega^2 r^2} \right) = 0 \quad (74)$$

$$\frac{N^2}{g} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1}{\gamma \rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{1}{\gamma \rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} \quad (75)$$

Navíc předpokládáme, že pozadí je v hydrostatické rovnováze, tj. že platí

$$\frac{\partial P_0}{\partial r} = -g\rho_0. \quad (76)$$

Pro zjednodušení podoby rovnic zavedeme Lambovu frekvenci $S_l^2 = \frac{l(l+1)c_s^2}{r^2}$. Výsledný tvar rovnice (74) má tvar:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + 2\frac{\xi_r}{r} - \frac{\xi_r g}{c_s^2} + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{l(l+1)c_s^2}{\omega^2 r^2}\right) = 0 \quad (77)$$

V další aproximaci budeme předpokládat lokální přístup, kdy se r ani ξ příliš nemění a jejich podíl můžeme vůči derivaci ξ podle r zanedbat.

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r g}{c_s^2} + \frac{P'}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{l(l+1)c_s^2}{\omega^2 r^2}\right) = 0 \quad (78)$$

Zbývá ještě upravit radiální část pohybové rovnice. Do té dosadíme stavovou rovnici:

$$-\omega^2 \rho_0 \xi_r = -\frac{\partial P'}{\partial r} - g\rho' \quad (79)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial r} + \frac{gP'}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (80)$$

Spolu s rovnicemi (78) a (80) máme předepsány okrajové podmínky (56) a (57). Rovnici (57) upravíme a dosadíme za poruchu tlaku z rovnice (71)

$$\delta P = P' + \xi_r \frac{\partial P_0}{\partial r} = P' - \xi_r g \rho_0 = 0, \quad (81)$$

$$\omega^2 \rho_0 r \xi_h = g \rho_0 \xi_r, \quad (82)$$

$$\frac{\xi_h}{\xi_r} = \frac{g}{\omega^2 r}. \quad (83)$$

6.4.4 JWKB řešení (Jeffreys–Wentzel–Kramers–Brillouin)

Řešení rovnic (78) a (80) můžeme v lokálním přístupu, kdy předpokládáme, že v rámci oscilací se mění zejména hustota hledat ve tvaru tzv. JWKB aproximace:

$$\xi_r = A \rho_0^{-1/2} \exp(ik_r r), \quad (84)$$

$$P' = B \rho_0^{1/2} \exp(ik_r r), \quad (85)$$

kde A , B a k_r jsou konstanty (k_r se mění pomalu s r). Po dosazení do rovnice (78) a jejím následné vynásobení $\rho_0^{1/2}$ dostáváme:

$$A \left(ik_r \rho_0^{-1/2} - \frac{1}{2} \rho_0^{-3/2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) - \frac{g}{c_s^2} A \rho_0^{-1/2} + \frac{B \rho_0^{1/2}}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (86)$$

$$A \left(ik_r - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{g}{c_s^2} \right) + \frac{B}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (87)$$

Označme $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{-1}{H_\rho}$ tlakovou škálu. Výsledná rovnice přejde na tvar:

$$A \left[ik_r + \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] + \frac{B}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad (88)$$

Podobně upravíme i rovnici (80):

$$B \left(ik_r \rho_0^{1/2} + \frac{1}{2} \rho_0^{-1/2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) + \frac{g}{c_s^2} \rho_0^{1/2} B + \rho_0 A \rho_0^{-1/2} (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (89)$$

$$A (N^2 - \omega^2) + B \left[ik_r - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] = 0 \quad (90)$$

Hledáme netriviální řešení pro A a B . Determinant matice tvořené rovnicemi (88) a (90) musí být 0.

$$\left[ik_r + \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] \left[ik_r - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right) \right] - \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} \right) (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (91)$$

Křížové členy v hranatých závorkách se odečtou, cílem bude vyjádření k_r^2 z této disperzní relace.

$$-k_r^2 - \left(\frac{1}{2H_\rho} - \frac{g}{c_s^2} \right)^2 - \frac{(N^2 - \omega^2)}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (92)$$

a

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - N^2 - \frac{c_s^2}{4H_\rho^2} - \frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_\rho}}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2). \quad (93)$$

Zbývá upravit N^2 :

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) = g \left(\frac{1}{c_s^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{1}{H_\rho} \right) = g \left(\frac{-g}{c_s^2} + \frac{1}{H_\rho} \right) = -\frac{g^2}{c_s^2} + \frac{g}{H_\rho} \quad (94)$$

Zavedeme akustickou hraniční frekvenci $\omega_c^2 = \frac{c_s^2}{4H_\rho^2}$. Finální tvar rovnice 93:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} + \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) \quad (95)$$

Z tvaru, v jakém jsme hledali řešení navíc vidíme, že pro $k_r < 0$ se bude porucha exponenciálně utlumovat, pro $k_r > 0$ se porucha bude šířit ve tvaru vlny.

6.4.5 Disperzní relace pro p a g módy

P módy (zvukové vlny) se mohou v závislosti na S_l šířit velmi hluboko do zóny zářivé rovnováhy. Nicméně tyto módy se obtížně pozorují. Pro módy šířící se pouze v konvektivní zóně můžeme v rovnici (95) zanedbat N^2 oproti ω^2 . Rovnice se zjednoduší na tvar:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{c_s^2} \quad (96)$$

$$\frac{S_l^2}{c_s^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} = k_h^2 \quad (97)$$

$$k_r^2 c_s^2 = \omega^2 - \omega_c^2 - k_h^2 c_s^2 \quad (98)$$

$$\omega^2 = \omega_c^2 + k^2 c_s^2 \quad (99)$$

Vlna se šíří pod povrchem a díky rostoucí rychlosti zvuku směrem k centru se lomí od kolmice. Ve spodním odrazném bodě nastává úplný odraz. Pro odrazné body r_1 a r_2 platí

$k_r = 0$, protože v místě odrazu se vlna nešíří v radiálním směru. Pro spodní odrazný bod navíc platí, že ω_c^2 můžeme zanedbat vůči ω^2 . Neboli:

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{S_l^2}{c_s^2} = 0, \quad (100)$$

$$\omega = S_l, \quad (101)$$

$$\frac{\omega}{L} = \frac{c_s(r_1)}{r_1}, \quad (102)$$

kde jsme označili $L = \sqrt{l(l+1)}$. Pro horní odrazný bod r_2 můžeme naopak zanedbat S_L oproti ω_c a platí $\omega = \omega_c$, ale díky strmému poklesu hustoty směrem k povrchu můžeme pro zjednodušení požadovat $r_2 = R_\odot$.

Na rozdíl od p módů se g módy (gravitační módy) nešíří v konvektivní zóně, ale jen ve vrstvě zářivé rovnováhy. Tam můžeme zanedbat ω^2 oproti S_l^2 a rovnice (95) se zjednoduší na tvar:

$$k_r^2 = \frac{S_l^2}{\omega^2 c_s^2} (N^2 - \omega^2) \quad (103)$$

$$k_r^2 = k_h^2 \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) \quad (104)$$

$$k_r^2 = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} - k_h^2 \quad (105)$$

$$k^2 = k_h^2 \frac{N^2}{\omega^2} \quad (106)$$

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_h^2}{k^2} \quad (107)$$

$$\omega^2 = N^2 \cos^2 \theta \quad (108)$$

Díky $\cos^2 \theta$ se tyto módy šíří hlavně horizontálně.

6.4.6 Disperzní relace pro f mód

F módy jsou gravitační módy šířící se na povrchu. Analogicky vlnám na vodní hladině budeme proto předpokládat $\delta P = 0$. Pro odvození disperzní relace budeme vycházet z rovnic (78), (80) a (24). Nejprve pro obecnost nebudeme pokládat $\delta P = 0$. Z rovnice (24) vyjádříme (s využitím hydrostatické rovnováhy pozadí) P' :

$$P' = \delta P + \xi_r \rho_0 g \quad (109)$$

Tento výsledek dosadíme do zbývajících dvou rovnic:

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{g \xi_r}{c_s^2} + \frac{\delta P}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) + \frac{g \xi_r}{c_s^2} - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r^2 \omega^2} = 0 \quad (110)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} + \frac{\delta P}{\rho_0 c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2} \right) - \frac{\xi_r g l (l+1)}{r^2 \omega^2} = 0 \quad (111)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{\partial \xi_r}{\partial r} \rho_0 g + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{g \delta P}{c_s^2} + \frac{\xi_r g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \quad (112)$$

Z rovnic vyloučíme $\frac{\partial \xi_r}{\partial r}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g^2 \rho_0 l (l+1)}{r^2 \omega^2} \xi_r - \frac{g \delta P}{c_s^2} \left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ + \frac{g \delta P}{c_s^2} + \xi_r \frac{g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{g^2 \rho_0 l (l+1)}{r^2 \omega^2} \xi_r + \frac{g \delta P}{c_s^2} \frac{S_l^2}{\omega^2} + \xi_r g \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \\ + \xi_r \frac{g^2 \rho_0}{c_s^2} + \rho_0 \xi_r (N^2 - \omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (114)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{gl(l+1)}{\omega^2 r^2} \delta P + \xi_r \frac{g \rho_0}{r} \left[\frac{r N^2}{g} - \frac{r \omega^2}{g} + \frac{r}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{gr}{c_s^2} + \frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} \right] = 0 \quad (115)$$

$$\frac{N^2}{g} = \frac{1}{\gamma P_0} \frac{\partial P_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{-1}{\rho_0 c_s^2} g \rho_0 - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{-g}{c_s^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \quad (116)$$

$$\frac{\partial \delta P}{\partial r} + \frac{gl(l+1)}{\omega^2 r^2} \delta P + \xi_r \frac{g \rho_0}{r} \left[\frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} - \frac{r \omega^2}{g} \right] = 0 \quad (117)$$

Tato rovnice se dá splnit pro $\delta P = 0$ a $\left[\frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} - \frac{r \omega^2}{g} \right] = 0$. Disperzní relace pro f mód nabývá tvaru:

$$\frac{gl(l+1)}{\omega^2 r} = \frac{r \omega^2}{g} \quad (118)$$

$$\omega^4 = \frac{g^2}{r^2} l(l+1) \quad (119)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{r} \sqrt{l(l+1)} \quad (120)$$

$$\omega^2 = k_h g \quad (121)$$

Dosazením tohoto řešení do (111) spolu s podmínkou $\delta P = 0$ odvodíme řešení pro ξ_r :

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\xi_r gl(l+1)}{rg \sqrt{l(l+1)}} = 0 \quad (122)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{r} \xi_r = 0 \quad (123)$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial r} - k_h \xi_r = 0 \quad (124)$$

Tato rovnice má exponenciální řešení ve tvaru

$$\xi_r \propto \exp[k_h (r - R_\odot)], \quad (125)$$

ze kterého je patrný rychlý pokles s hloubkou. Jde tedy skutečně o povrchový mód.

7 Helioseismologie

7.1 Rezonance a Duvallův zákon

Rezonanční podmínka pro stojaté vlny mezi odraznými body r_1 a r_2 se dá zapsat ve tvaru

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r dr = \pi (n + \alpha), \quad (126)$$

kde n je řád vlny a α fázová změna při odrazu. Ta závisí pouze na vlastnostech prostředí. Speciálně pro p módy se zanedbáním ω_c dostáváme:

$$\pi(n + \alpha) = \int_{r_t}^{R_\odot} \omega \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2 \omega^2} \right)^{1/2} dr \quad (127)$$

$$F(\omega) = \frac{\pi(n + \alpha)}{\omega} = \int_{r_t}^{R_\odot} \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2 \omega^2} \right)^{1/2} dr \quad (128)$$

Jako r_t jsme označili spodní odrazný bod. Ten závisí podle vztahu (102) pouze na poměru $\frac{\omega}{L}$. Stejně tak integrand závisí pouze na poměru $\frac{\omega}{L}$. Celkově se obecná 2D disperzní relace $\omega = \omega(n, l)$ rozpadá na 1D disperzní relaci mezi poměry $\frac{\omega}{L}$ a $\frac{n + \alpha}{\omega}$. Tato skutečnost je známá jako Duvallův zákon. Platí přibližně pro $l < 250$ s hodnotou $\alpha \approx 1,5$.

7.2 Inverzní úlohy

7.2.1 Inverze rychlosti zvuku

Rychlost zvuku v závislosti na r můžeme odvodit přímo z rovnice (128). Zavedme substituce $u = \frac{L^2}{\omega^2}$, $\xi = \frac{r^2}{c_s^2}$:

$$F(u) = \frac{\pi(n + \alpha)}{\omega} = \int_u^{\xi_\odot} (\xi - u)^{1/2} \frac{d \ln r}{d\xi} d\xi, \quad (129)$$

kde jsme označili $\xi_\odot = \xi(R_\odot)$. Po zavedení funkce $G = \ln r$ přejde integrál na Abelův:

$$F(u) = \frac{\pi(n + \alpha)}{\omega} = \int_u^{\xi_\odot} (\xi - u)^{1/2} \frac{dG}{d\xi} d\xi, \quad (130)$$

který má analytické řešení. Zderivujeme rovnici podle u :

$$-2 \frac{dF(u)}{du} = \int_u^{\xi_\odot} \frac{dG/d\xi}{(\xi - u)^{1/2}} d\xi \quad (131)$$

Řešení této rovnice je:

$$G(\xi) - G(\xi_\odot) = \frac{-2}{\pi} \int_{\xi_\odot}^{\xi} \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} du \quad (132)$$

a po vrácení proměnné r odvodíme implicitní rovnici pro rychlost zvuku $r(c_s)$:

$$r = r_\odot \exp \left(\frac{-2}{\pi} \int_{\xi_\odot}^{\xi} \frac{dF/du}{(u - \xi)^{1/2}} du \right) \quad (133)$$

Rovnice se dá invertovat jednoznačně, protože $c_s(r)$ je monotónní funkce. Takto odvozená rychlost zvuku souhlasí s modelem Slunce v oblasti $r > 0,4R_\odot$ a má okolo $r \approx 0,7R_\odot$ „hrb“, který koresponduje s hranicí konvektivní zóny. Ve větších hloubkách se inverze s modelem Slunce neshoduje kvůli malému počtu vln, které do této hloubky pronikají a s jejich obtížným měřením.

7.2.2 Perturbace modelu

Cílem inverzních metod je odvodit vylepšení modelu Slunce, které minimalizuje rozdíl mezi odvozenými a pozorovanými frekvencemi oscilací. Budeme předpokládat perturbace pouze rychlosti zvuku δc_s , která vyvolá perturbaci pozorované frekvence $\delta\omega$. Navíc předpokládáme, že obě perturbace jsou malé. Rozvoj rovnice (128) podle $\frac{\delta c_s}{c_s}$ a podle $\frac{\delta\omega}{\omega}$ by v takovém případě měl být shodný.

Rovnici (128) zapíšeme obecně s perturbacemi ve tvaru:

$$\pi(n + \alpha) = \int_{r_t}^{R_\odot} \left(\frac{(\omega + \delta\omega)^2}{(c_s + \delta c_s)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} dr \quad (134)$$

Nejprve položíme $\delta c_s = 0$ a uděláme rozvoj integrandu ve frekvencích:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\omega + \delta\omega)^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 + \frac{\delta\omega}{\omega} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \\ & = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 + \frac{2\delta\omega}{\omega} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\delta\omega\omega}{c_s^2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 + \frac{\frac{2\delta\omega\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right)^{1/2} = \\ & \quad A = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \end{aligned} \quad (135)$$

$$= \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 + \frac{\frac{\delta\omega\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right) = A + \frac{\frac{\delta\omega\omega}{c_s^2}}{\frac{\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{1/2}} = A + \frac{\delta\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} \quad (136)$$

V druhém případě položíme $\delta\omega = 0$ a rozvineme integrand podle poruchy rychlosti zvuku:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\omega^2}{(c_s + \delta c_s)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right)^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta c_s}{c_s} \right)^2} - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \\ & = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} \left(1 - 2\frac{\delta c_s}{c_s} \right) - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2} - 2\frac{\delta c_s \omega^2}{c_s^3} \right]^{1/2} = \\ & = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 - \frac{\frac{2\delta c_s \omega^2}{c_s^3}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \left(1 - \frac{\frac{\delta c_s \omega^2}{c_s^3}}{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}} \right) = \\ & = A - \frac{\frac{\delta c_s \omega^2}{c_s^3}}{\frac{\omega}{c_s} \sqrt{1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2}}} = A - \frac{\delta c_s \omega}{c_s c_s} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2}}} \end{aligned} \quad (137)$$

Výsledky rovnic (136) a (137) musíme porovnávat pod integrálem. A se odečte:

$$\int_{r_t}^{R_\odot} \frac{\delta\omega}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} dr = - \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{\delta c_s \omega}{c_s c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} dr \quad (138)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} dr = - \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{\delta c_s}{c_s} \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2} \right)^{-1/2} dr \quad (139)$$

Z pozorování známe $\frac{\delta\omega}{\omega}$, cílem je odvodit $\frac{\delta c_s}{c_s}$. Integrál na levé straně označíme T . Má význam neporušeného cestovního času vlny. Část $\frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2}$ označíme $K_{\delta c_s}$ a nazveme ho jádrem pro poruchu δc_s . Význam jádra je odezva referenčního modelu Slunce na průchod vlnou. Je to jeden ze vstupů do inverzní úlohy a výhodou je, že se dá z modelu předpočítat, což inverzi velmi urychlí. Podobným způsobem se mohou počítat jádra i pro jiné poruchy referenčního modelu. Celý integrál na pravé straně má význam průměrné perturbace rychlosti zvuku podél paprsku. Celkem získáváme tvar:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{1}{T} \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{\delta c_s}{c_s} K_{\delta c_s} dr \quad (140)$$

Zbývá ukázat, že T je skutečně neporušený cestovní čas vlny (p módu se zanedbáním ω_c). Odvodíme i trajektorii vlny (v paprskové aproximaci). Trasu paprsku $\mathbf{v}_g = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}}$ rozložit na radiální $\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk_r}$ a úhlovou $r \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dk_h}$ část. Z radiální části vyjádříme dt a budeme ho integrovat přes trajektorii paprsku.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{d}{dk_r} \left(c_s \sqrt{k_r^2 + k_h^2} \right) = c_s \frac{k_r}{\sqrt{k_r^2 + k_h^2}} = \frac{c_s^2 k_r}{\omega} \quad (141)$$

$$dt = \frac{\omega}{c_s^2} \frac{dr}{k_r} = dr \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}\right)^{1/2}} = dr \frac{\omega}{c_s^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{r^2 \omega^2}\right)^{1/2}} = \frac{dr}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{r^2 \omega^2}\right)^{-1/2} \quad (142)$$

$$T = \int_{r_t}^{R_\odot} dt = \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{dr}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{r^2 \omega^2}\right)^{-1/2} \quad (143)$$

Odvození trajektorie spočítá v úpravě rovnice $r \frac{d\theta}{dr}$:

$$r \frac{d\theta}{dr} = r \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{d\omega}{dk_h} / \frac{d\omega}{dk_r} = \frac{k_r}{k_h} = \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_s^2} - \frac{L^2}{r^2}}} \quad (144)$$

7.3 Přímé metody

7.3.1 Seismický poloměr

Jednoduchým výpočtem můžeme z disperzní relace pro f mód odvodit poloměr Slunce, protože $\omega(l)$ známe z pozorování.

$$\omega^2 = gk_h = \frac{GM_\odot}{R_\odot^2} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{R_\odot} \quad (145)$$

Takto odvozený poloměr se od skutečného liší asi o 0,3 Mm. To je způsobeno zejména špatným modelem podpovrchové konvekce.

7.3.2 Výpočet seismických jader

Alternativní výpočet jader Jádrové funkce se dají počítat i z cestovních časů. Mějme

$$T = \int_{r_t}^{R_\odot} \frac{1}{c_s} \left(1 - \frac{L^2 c_s^2}{\omega^2 r^2}\right)^{-1/2} dr, \quad (146)$$

kde c_s je funkcí všech nezávislých perturbovaných veličin indexovaných α q_α . Z pozorovaných radiálních rychlostí Φ si nejprve pomocí vhodného filtru $F(\omega, k)$ vybereme vlny, které budeme chtít studovat. Nejčastější jsou hřebínkové filtry, které izolují jednotlivé módy a fázově-rychlostní filtry, které filtrují módy se spodním odrazným bodem ve stejné hloubce. Výsledná dále zpracovávaná data $\psi(\omega, k) = \Phi(\omega, k) F(\omega, k)$ se využívají pro odvozování „pozorovaných“ cestovních časů. Nechtě \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 jsou dva různé body na povrchu Slunce. Z bodu \mathbf{x}_1 putuje vlna pod povrchem a v bodě \mathbf{x}_2 se znovu vynoří na povrchu. Tam vyvolá patřičnou odezvu. Jako cestovní čas je označen takový čas T , který maximalizuje kros-korelační funkci $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T)$ definovanou jako

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, T) = \int_0^\tau dt' \psi(\mathbf{x}_1, t') \psi(\mathbf{x}_2, t' + T), \quad (147)$$

kde τ je celková doba pozorování. Následnou minimalizací rozdílu „pozorovaného“ a modelem spočteného cestovní času pro všechna pozorování indexované a dojdeme k jinému vztahu pro jádra:

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \sum_a (T_a - T_a^{obs})^2 \quad (148)$$

$$\delta\chi^2 = \sum_a (T_a - T_a^{obs}) \frac{\delta T_a}{\delta q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (149)$$

Právě výraz $\frac{\delta T_a}{\delta q_\alpha}$ můžeme označit za jádro pro perturbaci q_α při daném setu pozorování.

Obecná rovnice pro výpočet jader Pro formální odvození obecných rovnic popisujících jádrové funkce si nejprve odvodíme obecnou lineární perturbaci disperzní relace. Kvadráty frekvencí jsou vlastní čísla funkcí \mathbf{q}_α , takže obecná disperzní relace je zadána rovnicí

$$\omega^2 \mathbf{q}_\alpha = \mathfrak{L}(\mathbf{q}_\alpha), \quad (150)$$

kde \mathfrak{L} je formální zápis pro lineární operátor rovnic stavby. Rovnici vynásobíme \mathbf{q}_α^* a vyintegrujeme přes objem Slunce:

$$\omega^2 = \frac{\int d^3r \mathbf{q}_\alpha^* \mathfrak{L}(\mathbf{q}_\alpha)}{\int d^3r \mathbf{q}_\alpha^* \mathbf{q}_\alpha} \quad (151)$$

Porucha parametrů \mathbf{q}_α se přes operátor rovnic stavby promítne v poruchu ω^2 . Pokud nahradíme $\omega^2 \rightarrow \omega^2 + \delta\omega^2$ a $\mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_1$. Pro „poruchy nultého řádu“ budeme předpokládat, že splňují neporušené rovnice. Potom rovnice prvního řádu bude ve tvaru:

$$\delta\omega^2 = \frac{\int d^3r \mathbf{q}_\alpha^* \mathfrak{L}_1(\mathbf{q}_\alpha)}{\int d^3r \mathbf{q}_\alpha^* \mathbf{q}_\alpha} = 2\omega\delta\omega \quad (152)$$

Lineární operátor \mathfrak{L}_1 v sobě zahrnuje poruchy všech parametrů \mathbf{q}_α a lze je od sebe odseparovat. Rovnici (152) ještě vydělíme $2\omega^2$:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int d^3r \left(K_\rho \frac{\delta\rho}{\rho} + K_{\delta c_s^2} \frac{\delta c_s^2}{c_s^2} + K_{\delta\mathbf{v}} \delta\mathbf{v} + \dots \right) \quad (153)$$

Nesmíme zapomenout, že jsme se omezili jen na lineární poruchy a například magnetické pole je při libovolné nenulové intenzitě nelineární porucha.

Jak ale vlastně jádra počítat? Vezměme si dva vektory nezávislých parametrů (například hustotu, rychlost zvuku a zastoupení helia, rychlosti toků plazmatu) \mathbf{X} a \mathbf{Y} . Tyto vektory jsou spolu svázány rovnicemi stavby (zde zapsané pomocí hermitovské matice A):

$$A\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (154)$$

Již ale víme, že platí

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \mathbf{K}_X \cdot \mathbf{X} = \langle \mathbf{K}_X \mathbf{X} \rangle, \quad (155)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \int_{\odot} d^3r \mathbf{K}_Y \cdot \mathbf{Y} = \langle \mathbf{K}_Y \mathbf{Y} \rangle, \quad (156)$$

kde jsme formálně zavedli středování přes objem Slunce. Rovnici (154) nejprve zprava vynásobme \mathbf{K}_Y a poté vystředujeme:

$$\langle \mathbf{K}_Y \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathbf{K}_Y A \mathbf{X} \rangle = \langle A^* \mathbf{K}_Y \mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{K}_X \mathbf{X} \rangle \quad (157)$$

Z porovnání posledních dvou výrazů plyne $A^* \mathbf{K}_Y = \mathbf{K}_X$. Neboli rovnice popisující jádra jsou hermitovsky sdružené rovnicím stavby.

7.4 Inverzní metody

Obecněji můžeme rovnici pro cestovní čas a pozorování a zapsat takto:

$$T^a(\mathbf{r}) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P [K_{\beta}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) q_{\beta}(\mathbf{r}', z)] + n^a(\mathbf{r}) \quad (158)$$

kde \mathbf{r}' je horizontální polohový vektor, z vertikální složka polohového vektoru, P počet perturbovaných parametrů a $n^a(\mathbf{r})$ náhodný šum, který se dá odhadnout z mnoha pozorování. Rovnici diferencujeme a tím předepíšeme tvar pro perturbaci cestovního času:

$$\delta T^a(\mathbf{r}) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P [K_{\beta}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \delta q_{\beta}(\mathbf{r}', z)] + n^a(\mathbf{r}) \quad (159)$$

Poruchu cestovního času známe díky porovnání s modelem, ke kterému chceme hledat vylepšení, a ve kterém jsou zároveň počítána jádra. Existují dvě hlavní metody, jak z této rovnice odvodit parametry $\delta q_{\beta}(\mathbf{r}', z)$, které nás zajímají.

7.4.1 RLS (Regularised least squares)

Metoda RLS spočívá ve fitování parametrů $\delta q_{\beta}(\mathbf{r}', z)$ v rovnici (159). Cílem je minimalizovat rozdíl pozorovaných a modelem spočtených cestovních časů za současného potlačení nepřirozených řešení (tzv. regularizace). Celkem se hledá minimum χ^2 ve tvaru

$$\chi^2 = \sum_a \frac{1}{\sigma_a^2} \left(\delta T^a - \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta=1}^P [K_{\beta}^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \delta q_{\beta}(\mathbf{r}', z)] \right)^2 + \mu L(q_{\alpha}), \quad (160)$$

kde L je regularizační operátor, kterým můžeme potlačovat nefyzikální vlastnosti řešení a μ je uživatelem na základě zkušenosti volený parametr, který zvyšuje nebo snižuje význam regularizace.

7.4.2 OLA (Optimally localised averaging)

Metoda OLA hledá řešení (159) v bodě (\mathbf{r}_0, z_0) ve tvaru konvoluce neznámých váhových funkcí w a porušeného cestovního času. Za δT^a dosadíme z rovnice (159):

$$\delta q_\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) = \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) \delta T^a(\mathbf{r}_i) \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \delta q_\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_\beta \left[\sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) K_\beta^a(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, z) \right] \delta q_\beta(\mathbf{r}', z) \\ &+ \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (162)$$

Člen $[\cdot]$ označíme $\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0, z, z_0)$ a nazveme ho citlivostní jádro. Jeho význame je citlivost metody na změnu parametru q_α při změně parametru q_β . V ideálním případě je citlivostní jádro úměrné delta funkci. Rovnici (162) ještě rozdělíme na člen $\beta = \alpha$ a členy $\beta \neq \alpha$:

$$\delta q_\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) = \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_\beta \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0, z, z_0) \delta q_\beta(\mathbf{r}', z) + \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \quad (163)$$

$$\begin{aligned} \delta q_\alpha(\mathbf{r}_0, z_0) &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0, z, z_0) \delta q_\alpha(\mathbf{r}', z) + \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \sum_{\beta \neq \alpha} \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0, z, z_0) \delta q_\beta(\mathbf{r}', z) \\ &+ \sum_i \sum_a w_a^\alpha(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0, z_0) n^a(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \quad (164)$$

Funkce w se odvozují z minimalizace χ^2 ve tvaru:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\alpha^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) - \tau(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \mu \sum_{i,j,a,b} w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0) \Lambda_{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) w_b^\alpha(\mathbf{r}_j, z_0) \\ &+ \nu \sum_{\beta \neq \alpha} \int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz [\mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0)]^2 + \epsilon \sum_{a,i} [w_a^\alpha(\mathbf{r}_i, z_0)]^2 \end{aligned} \quad (165)$$

V této rovnici je $\tau(\mathbf{r}', z, z_0)$ uživatelem volená funkce, která je lokalizovaná kolem vyšetřovaného místa, jinde je nulová (nejčastěji gaussian), μ, ν a ϵ jsou (podobně jako u RLS) volené parametry, které potlačují nefyzikální řešení (typicky se napočítá celá řada modelů pro různé hodnoty μ, ν a ϵ z nichž se následně vybere nejlepší kombinace) a $\Lambda_{ab}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \text{cov}[n^a(\mathbf{r}_i) n^b(\mathbf{r}_j)]$ je šumová kovarianční matice.

První člen v rovnici (165) má význam odchylky od modelu, člen úměrný μ minimalizuje příspěvek náhodného šumu, člen úměrný ν minimalizuje tzv. cross-talk. To jsou nechtěné příspěvky do hodnoty q_α z hodnoty q_β (například nechceme, aby se část rychlosti toků plazmatu přičítala k rychlosti zvuku). Poslední člen úměrný ϵ má za úkol lokalizovat váhové funkce, které by v ideálním případě byly úměrné delta funkci.

Do rovnice (165) se navíc přidává normalizační podmínka $\int_{\odot} d^2\mathbf{r}' dz \mathcal{K}_\beta^\alpha(\mathbf{r}', z, z_0) = \delta_\beta^\alpha$ připojená pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Hledá se minimum χ^2 vůči w_a^α a Lagrangeovým multiplikátorům. Výhodou je využití planparalelní geometrie a řešení inverze ve Fourierově prostoru. Výsledkem inverze jsou váhové funkce. Jejich aplikací na rovnici (161) odvodíme kýžené poruchy referenčního modelu.