Sondou na Mars

Časť prvá

V poslednej dobe sa v rámci slnečnej sústavy a planét špeciálne venuje veľká pozornosť Marsu, planéte, ktorá bola považovaná za možného nositeľa života (malých zelených mužíkov, ktorí nás chodia navštevovať a pozorovať na Zem). K Marsu bolo vypustených niekoľko automatických sond. Žiadna však život nepotvrdila.

Skúsme sa teraz spoločne pozrieť, čo je potrebne vedieť, vypočítať pre takú cestu na Mars.

Základné údaje o Marse

Nechcem sa tu rozpisovať o nejakých detailoch, preto uvediem len toľko, koľko budeme potrebovať pri našom myšlienkovom putovaní.

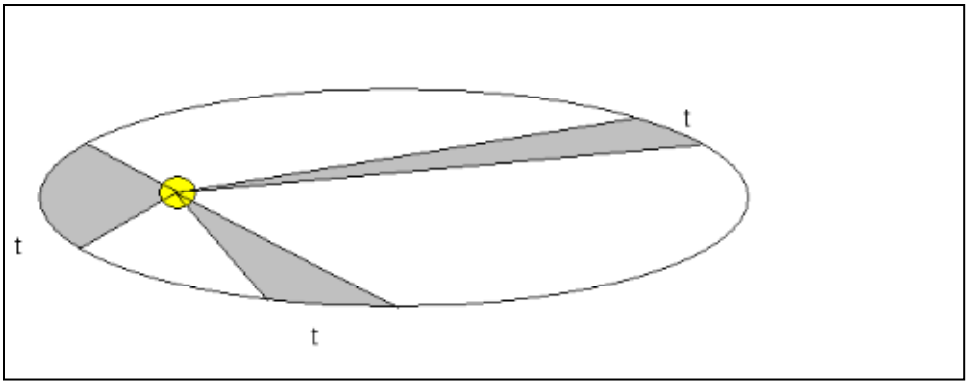
Vzdialenosť od Slnka [1]– 227,9 mil. km	1,52 AU
Obežná doba – Siderická – 686,98 dní	1,88 rokov
Synodická – 779,9 dní	2,13 rokov

Keplerové zákony

Aby sme mohli začať potrebujeme nejaký, aspoň základný aparát, ktorý nám pomôže čo-to v slnečnej sústave spočítať. Týmto aparátom sú známe Keplerové zákony (ďalej K.z.). Možno ste už o nich počuli, ale nikdy nezaškodí si ich znovu zopakovať

1.K.z.
Všetky telesa v slnečnej sústave sa pohybujú po kužeľosečkách (elipsách, parabolách a hyperbolách), v ktorých spoločnom ohnisku je Slnko.

2.K.z.
Plocha opísaná sprievodičom planéty je za rovnaký čas konštantná



[1] Táto vzdialenosť je stredná (*veľká poloos*). Mars má celkom výraznú *excentricitu* (viď. slovníček) a to 0,093, takže sa jeho vzdialenosť od Slnka mení od minimálnej (*Perihelia*) 206,8 mil. km k najväčšej (*Aféliu*) 249,1 mil. km. My ale pre jednoduchosť budeme predpokladať, že Mars obieha po kružnici v strednej vzdialenosti.

3.K.z.
Zapísaný v základnom tvare

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{\kappa(M+m)}{4\pi^2} .$$

Kde

a – veľká poloos planéty
P – siderická obežná doba planéty
M – hmotnosť Slnka (alebo v obecnosti platí, že centrálneho telesa)
m – hmotnosť planéty
κ - gravitačná konštanta $6{,}67.10^{-11}\ s^2.kg^{-1}.km^{-3}$

Pre nás však bude rozumnejšie si tento tvar upraviť, a to nasledovným spôsobom:

Predpokladajme pre začiatok, že hmotnosť planéty je zanedbateľná oproti hmotnosti centrálneho telesa, tým pádom sa pre nás stáva pravá strana rovnice konštantou a teda budeme môcť písať:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = konšt. = \frac{a_2^3}{P_2^3} ,$$

kde

a_1 – veľká poloos prvej planéty
P_1 – obežná doba prvej planéty
a_2 – veľká poloos druhej planéty
P_2 – obežná doba druhej planéty

Pre uľahčenie výpočtov môžeme zjednodušovať ešte ďalej. Povedzme, že vzdialenosť budeme počítať v Astronomických jednotkách a obežnú dobu v rokoch. Potom náš výraz môžeme upraviť následovne:

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_{Zeme}^3}{P_{Zeme}^2} = \frac{1^3}{1^2}, \text{ teda}$$

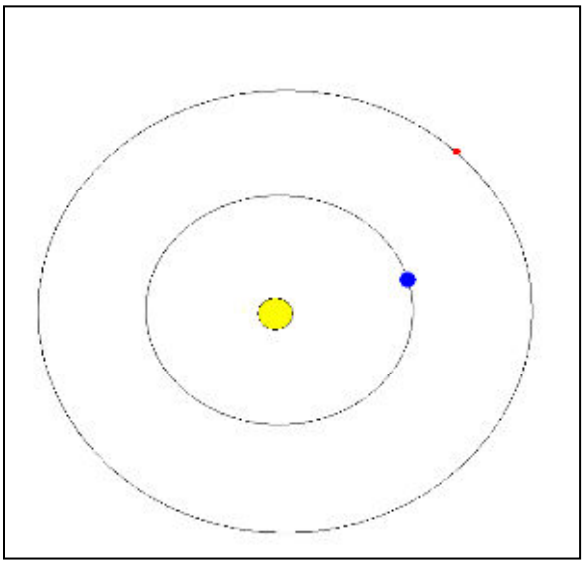
$$\frac{a^3}{P^2} = 1$$

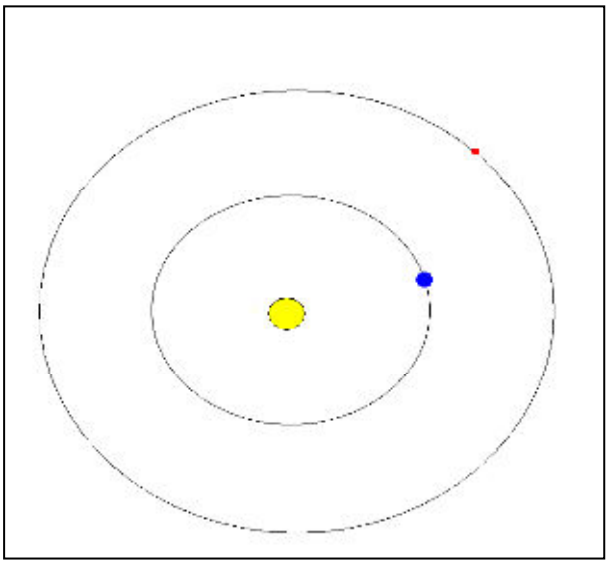
To by už mohol pre nás mohla byť použiteľná forma tohto zákona. Bude preto užitočné si ju zapamätať.

<u>Dráha letu</u>

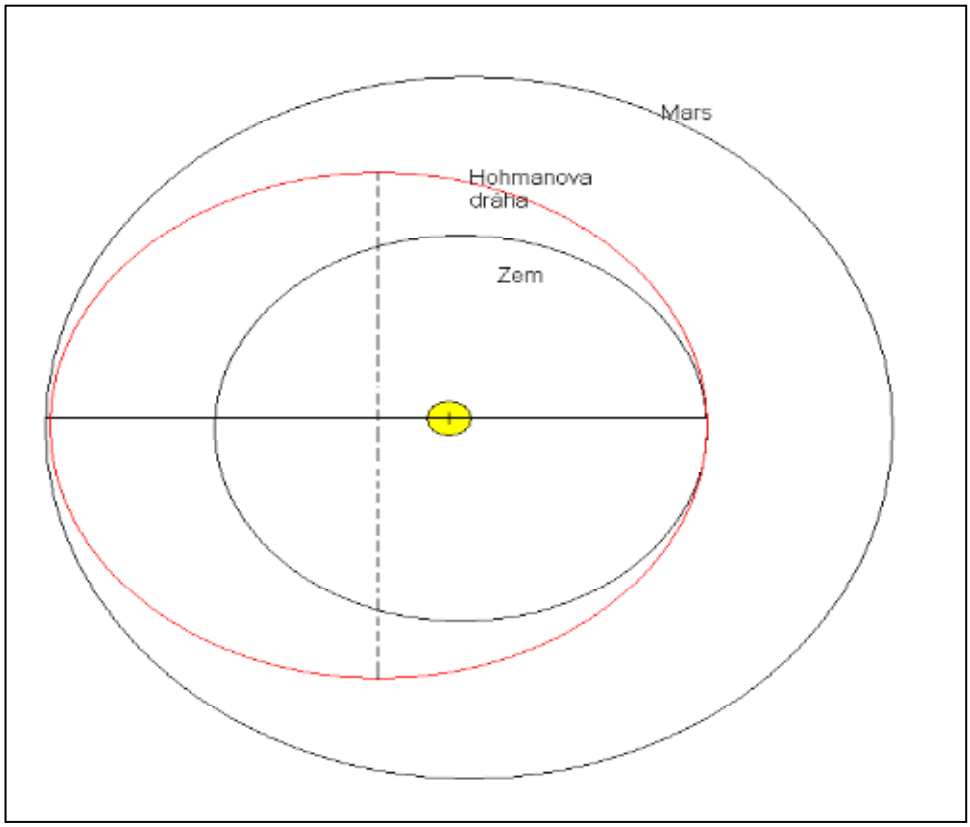
Aby sme však mali čo počítať, budeme musieť navrhnúť dráhu, po ktorej budeme chcieť našu sondu poslať. Skúste si do nasledujúcich obrázkov vyskúšať zakresliť

nejaké dráhy a uvažujte o tom, či sú reálne a efektívne. Uvážte tiež vzájomný pohyb Zeme a Marsu počas letu, taktiež časovú a energetickú stránku.





Určite táto úloha nie je jednoduchá a návrh najlepších dráh trval dlho a väčšinou vyžadoval silnú počítačovú kapacitu. Časom sa prišlo na to, že takouto vhodnou drahou by mohla byť tzv. ***Hohmanova trajektoria*** (viď. obrázok dole).



Táto elipsa je uložená tak, že v jej ohnisku je Slnko a v periheliu sa jej dráha dotýka zemskej dráhy a v afeliu sa dotýka dráhy Marsu.

Teraz sa nám dostal do rúk základ pre ďalší výpočet, skúsme sa teda na to pozrieť.

Časť druhá

Skúste samostatne vypočítať nasledujúce úlohy, ktoré nám prezradia ako taká cesta sondy na Mars vyzerá.

1.) Pre malé zopakovanie (skúste sa nepozerať dozadu alebo zošitov)

a_{Zeme} = _____AU

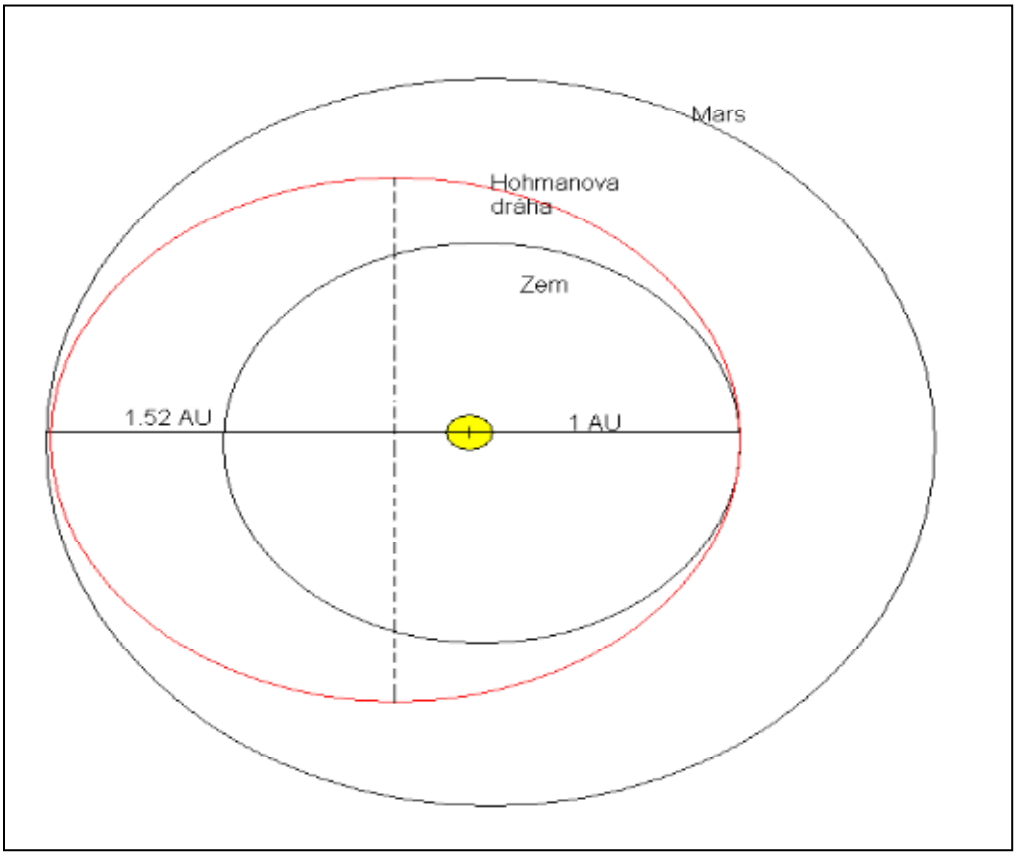
P_{Zeme}=_____dní

a_{Mars}= _____AU

P_{Mars}= _____ rokov = _____ dní

2.) Teraz sa pokúste, s pomocou nasledujúceho obrázka, vypočítať veľkú poloos dráhy sondy:

a_{Sondy} = _____ AU



Sondou na Mars

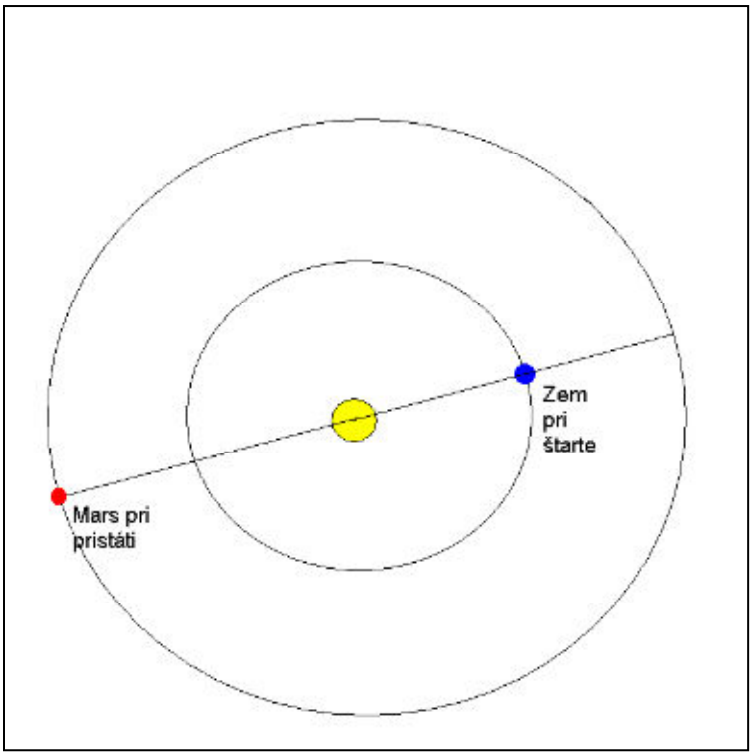
3.) Keďže sme si zistili veľkú poloos dráhy sondy a poznáme 3.K.z skúsme vypočítať dobu, za ktorú sa sonda dostane zo Zeme na Mars.

t=_____dní =_____rokov

4.) Dúfam, že predchádzajúca úloha vám nerobila žiadne problémy a my sa teraz môžeme posunúť ďalej. Určite ste si uvedomili, že tak ako Zem, Mars taktiež počas celého letu obieha okolo Slnka a bola by veľká škoda, ak by sme našu sondu síce poslali správnou dráhou, ale tá by sa na očakávanom mieste s Marsom nestretla a zbytočne obiehala okolo Slnka. Skúste teda na základe vypočítanej doby letu sondy určiť vzájomnú polohu Zeme a Marsu v čase štartu sondy a tiež v čase pristátia na Marse.

K zaznačenej polohe Zeme v čase štartu nakreslite polohu Marsu v čase štartu a pristatia a dokreslite polohu Zeme v čase pristátia.

Hint: Porovnajte koľko zo svojej dráhy prejde Mars za dobu letu ...



5.) Ak sa vám to podarilo, výborne, môžeme pokračovať ďalej. Teraz už vieme vhodné rozostavenie Zeme a Marsu pre vyštartovanie našej sondy. Povedzme, že sme ale kvôli technickým problémom premeškali vhodný termín. Ako dlho teraz budeme čakať na nový štart?
Skúste túto hodnotu vypočítať, ak ste dávali pozor zistíte, že sa nám táto hodnota už objavila, nebude však na škodu zistiť, ako sme k nej došli.

Časť tretia

Dúfam, že vám žiadna z úloh nerobila vážnejšie problémy. Ak predsa len áno, skúsme sa na jednotlivé riešenia pozrieť spoločne:

2.) Výpočet veľkej poloosi sondy.
Pozrime sa ešte raz na obrázok. Z neho vidíme, že Veľká poloos Marsu je 1,52AU a veľká poloos Zeme je 1 AU. Ak si spomeniem, čo to veľká poloos[2] je, výpočet bude hračkou:

$$a_{Sondy} = \frac{a_{Zeme} + a_{Marsu}}{2} = 1{,}26AU$$

3.) Výpočet doby, za ktorú sa sonda dostane na Mars.
Keďže poznáme 3. K.z a navyše sme si zistili veľkú poloos dráhy, môžme jednoducho odvodiť dobu obehu po tejto dráhe

$$\frac{a^3_{Sondy}}{P^2_{Sondy}} = 1, \text{ teda}$$

$$\mathrm{P}^2_{\mathrm{Sondy}} = a^3_{Sondy} \quad \rightarrow \quad P_{Sondy} = \sqrt{a^3_{Sondy}} = \sqrt{1{,}26^3} = 1{,}41 \text{ rokov}$$

To ale nie je to, čo sme chceli vypočítať, nakoľko sme chceli vedieť, pretože sme namiesto doby letu spočítali dobu obehu. Doba letu je však (viď. pôvodný obrázok) polovica obežnej doby, teda <u>t=0,707 roka</u>.

4.) Chceli sme vedieť, v akej vzájomnej polohe bude Mars a Zem v čase štartu a pristatia.
V predchádzajúcej úlohe sme zistili, že doba letu sondy je 0,707 roka. Vypočítajme si teda koľko za túto dobu prejde Mars po svojej dráhe:

Celková doba (siderická) je 1,88 (Ak by sme túto hodnotu nemali, vedeli by sme ju jednoducho vypočítať s veľkej poloosi Marsu pomocou 3. K.z.)
Za dobu nášho letu Mars teda prejde 0,707/1,88=38% svojej dráhy, teda 0,38*360=136,8°. Keďže má byť Mars v čase pristátia oproti Zemi o 180°, v čase štartu teda musel byť 180°-136,8°=43,2°.
Rovnakú úvahu urobíme pre Zem v čase pristátia. Za dobu letu za Zem posunie o 70,7% svojej dráhy teda o uhol 0,707*360°=254,52°. V čase pristátia budú planéty „zvierať“ uhol 254,52°-180°=74,52°.

[2] Veľká poloos je najväčšia vzdialenosť bodu na krivke od jej stredu. Analogicky je malá poloos najmenšia vzdialenosť od stredu elipsy

Výpočet je celkom jednoduchý a môžete si teda vyskúšať spočítať vzájomnú polohu aj v niektorých bodoch medzi štartom a pristátím pre lepšiu predstavu.

5.) Hneď na začiatok prezradím, že riešenie poslednej úlohy je priamo zapísané medzi základnými údajmi o Marse. Synodická doba obehu totiž hovorí o tom, ako dlho trvá, kým sa planéty dostanú opäť do rovnakej polohy, čo presne sme sa chceli dozvedieť v tejto otázke. Skúsme sa ešte pozrieť ako k danému číslu (2,13 rokov) došli.

Zem prejde za jeden deň 360°/365,25=0,99°, Mars prejde za jeden deň 360°/686,98=0,52°.
Zem teda predbehne Mars každý deň o Δ=0,99°-0,52°=0,47°. Pýtame sa koľko bude trvať, kým Zem obehne Mars o 360°.
Jednoduchou trojčlenkou dostaneme, že
0,47°.....1 deň
360°.....x dní

Skúsme si dať vypočítane hodnoty do kopy a odvoďme vzorec, podľa ktorého spočítame výslednú hodnotu:

$$x = \frac{360^\circ}{\Delta} = \frac{360^\circ}{\frac{360^\circ}{P_{Zem}} - \frac{360^\circ}{P_{Mars}}} = \frac{360^\circ}{360^\circ\left(\frac{P_{Mars} - P_{Zem}}{P_{Zem}P_{Mars}}\right)} = \frac{P_{Zem}P_{Mars}}{P_{Mars} - P_{Zem}}$$

$$x = \frac{250919.445}{321.73} = 779.9 \text{ dni}$$

(Je vhodnejšie vypočítať túto hodnotu priamo z odvodeného vzorca, pretože pri postupnom vyhodnocovaní nastávajú veľké chyby pri zaokrúhľovaní, a tak výsledná hodnota môže byť metúca.)

Podľa nášho výpočtu sa vhodná konštelácia Zem-Mars opakuje každých 2,135 roka.

Záver

Ukázali sme si, že aj pomocou základných matematických nástrojov, sme si urobili predstavu o tom, ako by mohla vyzerať cesta na Mars. V skutočnosti by bolo samozrejme potrebne urobiť omnoho zložitejšie výpočty, ale tie nechajme radšej na super rýchle počítače.