Numerické řešení HDE ve 3D

FDM

metoda konečných diferencí

derivace → rozdíly

hodnoty fce v diskrétních bodech

silná formulace?

jednoduché v kartézských souřadnicích (strukturovaná síť):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^{n}}{\Delta t} = D\left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{(\Delta z)^2}\right]$$

nestrukturovaná síť → fitování *paraboloidu* na několik okolních bodů metodou LSM (kvůli 2. derivacím)

je jedno, jakém pořadí se body počítají, při explicitní metodě vždy počítám ze starých u^n nová u^{n+1} a časový krok (tzn. přiřazení $u^{n+1} \to u^n$) provedu až po skončení výpočtu u^{n+1}

(při implicitní ale může vzniknout pěkně „hnusná“ řídká ne-tridiagonální matice)

pro polynomy 2. stupně je toto diferenční schéma přesné (odpovídá Taylorově rozvoji)

OBR hde5

FVM

metoda konečných objemů

integrování HDE přes malý objem a Gaussův teorém, toky veličiny přes stěny objemů

hodnoty fce jako průměry v objemových elementech

integrální formulace?

nemusí být strukturovaná síť

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u)$$

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot (D\nabla u)\mathrm{d}V = \int_S D\nabla u \mathrm{d}S$$

$$V\frac{\bar{u}^{n+1}-\bar{u}^n}{\Delta t} = \sum_{\text{stěny}} DS\frac{\Delta \bar{u}^n}{\Delta x}$$

pro 1-D „objemové“ elementy to *přesně* odpovídá FDM :)

$$\frac{\bar{u}^{n+1}-\bar{u}^n}{\Delta t} = D\overbrace{\frac{S}{V}}^{\frac{1}{\Delta x}}\frac{1}{\Delta x}\overbrace{[(\bar{u}^n_{j+1}-\bar{u}^n_j)+(\bar{u}^n_{j-1}-\bar{u}^n_j)]}^{\bar{u}^n_{j+1}-2\bar{u}^n_j+\bar{u}^n_{j-1}}$$

počet objemových elementů ve FVM versus počet diskrétních bodů ve FDM;

otázka porovnání z hlediska počtu stupňů volnosti

využívá se Delaunyovy triangulace (4-stěny)

a Voronoiovy sítě (duální k Delaunyově)

OBR tetgen

FEM

metoda konečných prvků

aproximace řešení u pro PDE $\mathcal{L}(u)$ váženou sumou bázových fcí:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{M} \overbrace{u_j}^{\text{neznámé koeficienty}} \cdot \overbrace{N_j(x)}^{\text{bázové fce}}$$

a minimalizace rezidua $R(u_1, u_2, \ldots, u_M, x) = \mathcal{L}(\hat{u})$

slabá formulace

(PDE nemusí být po dosazení $\hat{u}$ splněna v určité síti bodů, ale $\hat{u}$ je optimálním řešením na celém intervalu x)

snadno se implementují nestrukturované sítě

metody minimalizace R:

- **metoda nejmenších čtverců** (LSM) — tzn. parciální derivace sumy kvadrátů R podle koeficientů u_j položím $= 0$:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\int_\Omega R^2 \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega 2R\frac{\partial R}{\partial u_i}\mathrm{d}\Omega = 0 \quad i = 1,\dots,M$$

$\Rightarrow$ soustava rovnic pro u_j

Příklad pro Poissonovu rci: $\mathcal{L}(u) = u''(x) + f(x)$, $\Omega = (0,1)$, $u(0) = u(1) = 0$

$\hat{u} = \sum_{j=1}^{M} u_j N_j(x) \Rightarrow R = f(x) + \sum u_j N_j''(x)$

$$\frac{\partial R}{u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\sum_{j=1}^{M} u_j N_j''(x) = N_i''(x)$$

$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial u_i}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[f(x) + \sum_{j=1}^{M} u_j N_j''(x)\right] N_i''(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\overbrace{-\sum_{j=1}^{M}\left[\int_0^1 N_i''(x)N_j''(x)\mathrm{d}x\right]}^{A_{ij}} u_j = \overbrace{\int_0^1 f(x)N_i''(x)\mathrm{d}x}^{b_i}$$

$\Rightarrow$ takto vznikají soustavy rovnic (matice), které musím řešit (invertovat)

– **metoda vážených reziduí** (WRM):

$$\int_\Omega W_i R \mathrm{d}\Omega = 0 \quad i = 1,\dots,M$$

– **kolokační metoda**: $W_i = \delta(x - x^{[i]})$; δ-fce, $x^{[i]}$ jsou kolokační body (toto vlastně odpovídá FDM!)

– **Galerkinova metoda**: $W_i = N_i$ (váhy jsou přímo bázové fce)

existují i další metody, např. spektrální, …

bakalářka nebo diplomka…