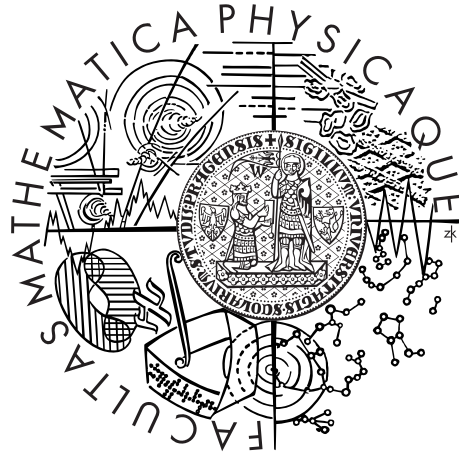


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavel Ševeček

Vliv tepelné emise topografických útvarů na rotační dynamiku planetek

Astronomický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Miroslav Brož, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2014

Rád bych na tomto místě poděkoval Mgr. Miroslavu Brožovi, Ph.D. za odborné vedení práce a čas věnovaný detailním korekturám textu, a dále konzultantům Mgr. Davidu Čapkovi, Ph.D. a Mgr. Josefu Ďurechovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Vliv tepelné emise topografických útvarů na rotační dynamiku planetek

Autor: Pavel Ševeček

Katedra: Astronomický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Miroslav Brož, Ph.D.

Abstrakt: Infračervené záření emitované z povrchu tělesa působí momentem síly, který může nezanedbatelně měnit rotační stav planetky. Doposud však nebylo zkoumáno, jakou mírou se na tomto fenoménu, zvanému YORP jev, podílí drobné topografické útvary. Ukážeme, že laterální vedení tepla útvary vhodných velikostí vede k vzniku lokálního YORP jevu, jehož řádová velikost je srovnatelná s YORP jevem vyplývajícím z globální topografie. Řešíme třídímní rovnici vedení tepla v jediném topografickém útvaru a jeho blízkém okolí, a to metodou konečných prvků s využitím programu **FreeFem++**. Na základě nalezeného rozložení povrchové teploty útvaru jsme určili jeho příspěvek k výslednému momentu síly. Tento moment jsme porovnali pro různé tvary balvanů a různé materiálové parametry. Pro idealizovaný útvar je náš výsledek konzistentní s existujícím jednodímním modelem. Rotační zrychlení, které útvary udělují sférickému asteroidu o poloměru 1 km s kruhovou orbitou o poloměru 2,5 AU, je přibližně $(2,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-9}$ rad/d², čemuž odpovídá charakteristická doba akcelerace $\tau = (35 \pm 18)$ Myr. Ze snímků povrchu planetky Itokawa jsme odhadli diferenciální rozdělení velikostí topografických útvarů. Výsledný moment síly může planetce udělovat zrychlení řádu 10^{-7} rad/d², povrchové útvary tak představují vysvětlení pozorovaného fázového posunu ve světelných křivkách.

Klíčová slova: planetky, rotační dynamika, tepelná emise, YORP jev, metoda konečných prvků

Title: Rotational dynamics of asteroids affected by thermal emission from topographic features

Author: Pavel Ševeček

Department: Astronomical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Miroslav Brož, Ph.D.

Abstract: Infrared radiation emitted from an asteroid surface causes a torque that can significantly affect rotational state of the asteroid. The influence of small topographic features on this phenomenon, called YORP effect, hasn't been adequately studied yet. In this work we show that lateral heat diffusion in surface features of suitable sizes leads to the emergence of local YORP effect which magnitude is comparable to the YORP effect of global topography. We solve three-dimensional heat diffusion equation in a boulder and its surroundings by finite element method using **FreeFem++** code. Its contribution to the total torque is then inferred from the computed temperature distribution. We compare the torque for various boulder shapes and material properties. For an idealized boulder our result is consistent with existing one-dimensional model. Topographic features may cause a spherical asteroid of radius 1 km on a circular orbit at 2.5 AU to undergo rotational acceleration of about $(2.0 \pm 1.0) \cdot 10^{-9}$ rad/day², which corresponds to spin-up timescale of order $\tau = (35 \pm 18)$ Myr. We estimated a boulder size distribution based on close-up images of Itokawa surface. Finally, we realized that topographic features of Itokawa can cause rotational acceleration of order 10^{-7} rad/d² and can therefore explain observed phase shift in light curves.

Keywords: asteroids, rotational dynamics, thermal emission, YORP effect, finite-elements method

Obsah

1 Úvod a motivace	3
2 Vliv emise infračerveného záření na rotaci planetek	4
2.1 Záření a dynamika planetek	4
2.2 Výsledky měření svědčící o YORP jevu	5
2.2.1 Fotometrické pozorování rotační fáze	5
2.2.2 Orientace rotačních os v rodině Koronis	6
2.2.3 Rozdělení rotačních period malých planetek	6
2.2.4 Vznik binárních planetek rotačním rozpadem mateřského tělesa	7
2.3 YORP jev na planetce (25143) Itokawa	7
2.4 Citlivost na rozložení hustoty	8
2.5 Citlivost na topografii	8
3 Teorie YORP efektu	11
3.1 Popis tělesa	11
3.2 Radiační síla	12
3.3 Rovnice vedení tepla	14
3.4 Energetická bilance na povrchu	15
3.5 Velikost a směr radiační síly	17
3.6 Vliv momentu síly na rotační stav planetky	19
4 Vliv topografických útvarů na radiační moment síly	20
4.1 Modely YORP jevu	20
4.2 Motivace problému	21
4.3 Formulace problému	21
4.4 Okrajové a počáteční podmínky	22
4.5 Limitní chování lokálního YORP jevu	23
5 Rovnice vedení tepla	25
5.1 Analytické řešení jednodimenzionální rovnice vedení tepla	25
5.2 Linearizovaná teorie lokálního YORP jevu	29
5.3 Parametrická závislost momentu síly	30
5.4 Škálovací transformace oblastí	32
6 Metoda konečných prvků	33
6.1 Základní principy	33
6.2 Okrajové podmínky	34
6.3 Časová závislost	35
6.4 Diskretizace třírozměrného prostoru	35
6.5 Slabá formulace rovnice vedení tepla	37
7 Numerický model pro jednoduché útvary	40
7.1 Diskretizace a její vliv na numerické řešení	40
7.2 Závislost středního tlaku na parametrech	43
7.3 Porovnání různých modelů insolační funkce	44
7.4 Závislost středního tlaku na geometrii útvaru	46
7.4.1 Krychlový balvan	47
7.4.2 Hemisférický balvan	47
7.4.3 Balvan obecného tvaru	48
7.5 Zobecnění problému	48
7.5.1 Závislost na asteroidopisné šířce	49

7.5.2	Zohlednění vzájemného stínění	49
7.6	Výpočet úhlového zrychlení	50
7.6.1	Sférický asteroid	50
7.6.2	Itokawa	52
8	Diskuze	56
9	Závěr	60
A	Stíny a viditelnost	61
A.1	Průsečík paprsku s trojúhelníkem	61
A.2	Stínící funkce $\mu(\mathbf{r})$	62
A.3	Viditelnostní funkce $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$	63
B	FreeFem++	64
	Reference	69
	Seznam obrázků	72
	Rejstřík	74

1 Úvod a motivace

Malé objekty sluneční soustavy — planetky, komety i prachové částice — jsou nezanedbatelně ovlivňovány negravitačními zrychleními. Sublimace ledu na povrchu komety vede k výtrysku plynu a prachu, vzniklá reakční síla (raketový jev) může významně urychlovat komety v orbitálním pohybu. Zdrojem silového působení je i záření. U drobných prachových částic může dokonce přímý tlak slunečního záření převýšit gravitační sílu, což vede k hyperbolickému pohybu těchto částic ven ze sluneční soustavy. U částic větších rozměrů pak záření působí proti orbitálnímu pohybu v důsledku aberace světla, což vede ke spirálovému pohybu částice ke Slunci (Poyntingův-Robertsonův efekt). Záření může na dlouhých časových škálách způsobovat změny orbitálního a rotačního stavu i u asteroidů kilometrových rozměrů. Roli zde nehraje záření dopadající, nýbrž záření tepelně emitované z povrchu tělesa. Změnu velké poloosy asteroidu v důsledku emise tepelného záření nazýváme Jarkovského driftem, změnu rotační úhlové frekvence a osy rotace pak označujeme jako YORP jev.

V posledních letech bylo zjištěno, že YORP efekt je značně citlivý na parametry planetky, zejména na přesný tvar povrchu. Změnou topografie, například přidáním většího balvanu či kráteru, může dokonce dojít ke změně znaménka, ačkoliv na světelných křivkách se taková změna povrchu takřka neprojeví (Statler, 2009). Spočtená hodnota úhlového zrychlení je také podstatně závislá na použitém rozlišení povrchu (Breiter et al., 2009). Zdá se, že i útvary metrových rozměrů mají zásadní vliv na výsledný YORP jev. Doposud však nebyl detailně zkoumán vliv drobných topografických útvarů, jejichž velikost je řádově srovnatelná s hloubkou průniku tepelné vlny. Takto malé útvary není možné implementovat do stávajících numerických modelů, neboť povrchové rozlišení zkoumaných planetek není (a z výpočetních důvodů nemůže být) dostatečné. Malá velikost ovšem nepřipouští zanedbání laterálního toku tepla útvarem, a je proto nutné řešit rovnici vedení tepla ve *třech* dimenzích.

Tato práce se zaměřuje na zkoumání velikosti silového momentu, kterým malé povrchové útvary působí na asteroid, a jeho závislosti na materiálových a orbitálních parametrech. Řešíme třídimenzionální rovnici vedení tepla v útvaru a jeho blízkém okolí metodou konečných prvků, a to s využitím jazyka **FreeFem++** (Hecht, 2012). Z vypočteného rozložení teploty na povrchu útvaru odvodíme moment síly, kterým útvar na planetku působí. Pro dané rozdělení velikostí topografických útvarů pak určíme celkový moment, kterým útvary působí, a úhlové zrychlení, které tento moment způsobuje. Hodnotu posléze porovnáme se zrychlením, které vyplývá z modelů YORP jevu založených na globální topografii planetky.

V kapitole 2 shrneme současný stav poznání vlivu záření na pohyb asteroidů. Diskutujeme zejména problém citlivosti úhlového zrychlení na přesný popis povrchu (v podkapitole 2.5). Kapitola 3 je věnována matematickému popisu problému a odvození důležitých vztahů. V kapitolách 4 a 5 blíže popíšeme teoretické předpoklady pro vznik radiačního momentu síly na povrchových útvarech. V kapitole 6 popisujeme metodu konečných prvků a odvozujeme slabou formulaci rovnice vedení tepla. V kapitole 7 popisujeme výsledky našich výpočtů a porovnááme velikost momentu síly, kterým útvary na planetku působí, s YORP jevem založeným na globální topografii. Konečně v kapitole 8 diskutujeme důsledky, které z našich výpočtů plynou.

2 Vliv emise infračerveného záření na rotaci planetek

2.1 Záření a dynamika planetek

Klasický model vývoje populace asteroidů předpokládá, že jsou asteroidy ovlivňovány pouze gravitačním působením a vzájemnými kolizemi. Přesto, že tento model dokázal vysvětlit velké množství pozorovaných jevů, postupem času se začala objevovat observační data, která nebyla klasickým modelem vysvětlitelná. Několik nezávislých důkazů existence negravitačního momentu, který působí na asteroidy, je podáno v kapitole 2.2.

Přirozenou cestou pro vysvětlení nekonzistencí klasického modelu bylo započtení negravitační síly, která na planetky působí. Již přitom byl znám raketový jev; ten však u asteroidů nepřicházel v úvahu. Bylo proto třeba hledat jiné fyzikální vysvětlení.

Záření přicházející od Slunce nese hybnost, a působí tak po dopadu na povrch asteroidu tlakovou silou. Tato síla má však směr shodný se směrem gravitační síly, a ve výsledku tak pouze gravitaci efektivně sníží o zanedbatelnou velikost. Důležitou roli však hraje *tepelné* záření, které vyzařuje zahřátý povrch asteroidu. Reakční síla, která působí na asteroid, je sice co do velikosti výrazně menší než síla gravitační (dokonce menší než síla, kterou působí dopadající záření), je však schopna působit na asteroid v *transverzálním* směru, a v důsledku tak zvyšovat, resp. snižovat orbitální rychlost asteroidu. Asteroid tak spiráluje od Slunce, resp. ke Slunci. Tento jev nazýváme Jarkovského driftem.

Jednoduchým výpočtem můžeme určit poměr síly f_* , kterou působí dopadající záření na (sférický) asteroid o poloměru r a hustotě ρ , a síly gravitační f_g . Zjistíme, že platí

$$\frac{f_*}{f_g} = \frac{\pi r^2 \frac{F_\odot}{R^2} \frac{1}{c}}{GM_\odot \frac{4}{3} \pi \rho r^3 \frac{1}{R^2}} \approx 2,58 \cdot 10^{-10} [r]_{\text{km}}^{-1} [\rho]_{\text{kg/m}^3}^{-1} .$$

kde F_\odot je sluneční konstanta, G gravitační konstanta, M_\odot hmotnost Slunce a c rychlost světla. Velikost radiační síly je řádově menší než velikost síly gravitační. Udělali bychom však chybu, pokud bychom z tohoto důvodu tlak záření zcela zanedbali. Radiační síla totiž může díky transverzální složce způsobit na dlouhých časových škálách výrazné změny orbitálních elementů.

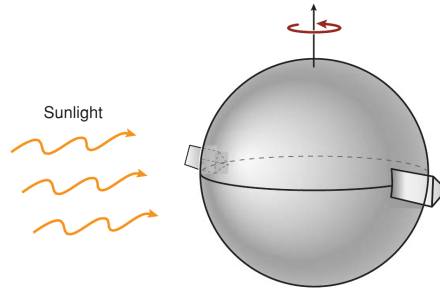
U nepravidelných těles navíc může síla působit ve směru, který *neprochází* těžištěm asteroidu, a reakční síla záření tak způsobuje silový moment ovlivňující rotační periodu asteroidu a směr jeho rotační osy. Působení momentu se označuje jako Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack efekt, zkráceně YORP. Tento akronym pochází z práce Rubincam (2000); byl odvozen ze jmen fyziků, kteří se podíleli na výzkumu silového působení záření.

Je poměrně překvapivé, že i když oba efekty vznikají na stejném fyzikálním principu, totiž emisí tepelného záření z povrchu asteroidu, liší se v mnoha kvalitativních aspektech.

Jarkovského drift můžeme ilustrovat na jednoduchém modelu rotující sféry, vyskytuje se tedy i u symetrických asteroidů. Přitom asymetrie a nerovnosti povrchu nemají na Jarkovského jev velký vliv (Rozitis & Green, 2013a). Oproti tomu, YORP je velice citlivý na topografii povrchu (Breiter et al., 2009; Statler, 2009) a na polohu těžiště objektu (Scheeres & Gaskell, 2008). Pro elipsoidální tvary pak zcela zaniká změna rotační frekvence; změna *šikmosti* planetky (úhlu mezi rotační osou a normálou k rovině orbity) se projeví pouze při uvažování nenulové tepelné vodivosti (Breiter et al., 2007).

Fundamentálním parametrem ovlivňujícím Jarkovského jev je tepelná setrvačnost asteroidu, tedy nenulová tepelná vodivost a rotační perioda. Kvůli tepelné setrvačnosti neleží maximum teploty v subsolárním bodě, ale je posunutě směrem na západní stranu, a vzniká tak nenulová transverzální složka reakční síly. Pokud bychom uvažovali zjednodušený případ, kdy je tepelná vodivost nulová, Jarkovského drift zcela vymizí.

YORP jev působí na asteroid i v limitě nulové vodivosti. Řada analytických i numerických modelů YORP jevu právě tohoto faktu využívá, neboť v této aproximaci je povrchová teplota dána pouze okamžitým dopadajícím tokem, a nezávisí tak na teplotě v okolí či historii teplotního vývoje. Zmíněné zjednodušení se často označuje jako *Rubincamova aproximace* (viz kapitolu 3.2). Pokud se při výpočtu momentu započítá nenulová tepelná vodivost, zpravidla nedojde k významné změně úhlového zrychlení,



Obrázek 1: Modelový případ působení YORP efektu. Moment síly, kterým působí záření emitované z hranolů na rovníku asteroidu, se kvůli asymetrickému umístění nevyruší, a záření tak způsobí změnu rotační frekvence. Převzato z Bottke et al. (2006).

závislost se projevuje pouze ve změně sklonu rotační osy (Čapek & Vokrouhlický, 2004; Breiter et al., 2010b).

Pro asteroidy s nenulovou šikmostí můžeme rozlišit dva typy Jarkovského jevu — denní a roční variantu. Denní Jarkovského jev je způsoben změnami teplot na různých místech povrchu při rotaci asteroidu. Roční jev je pak dán zahříváním severní, resp. jižní polokoule, při pohybu kolem Slunce (Bottke et al., 2006). U YORP jevu však pozorujeme pouze denní komponentu. Roční YORP se projevuje pouze nepatrně na změně sklonu rotační osy pro trajektorie s vysokou excentricitou (Breiter et al., 2010b).

Přes tyto zjevné rozdíly může být oddělení Jarkovského a YORP efektu a počítání pouze silového působení nebo pouze působení momentu kontraproduktivní. Tyto jevy totiž nepracují nezávisle, ale jsou vzájemně provázány. V důsledku YORP jevu dochází k zrychlování či zpomalování rotace asteroidu a ke stáčení osy rotace, mění se tedy denní i roční komponenta Jarkovského jevu, který na zmíněných parametrech závisí. Opačně, vlivem Jarkovského jevu dochází ke změně hlavní poloosy, což se projevuje změnou YORP efektu, který závisí na vzdálenosti asteroidu od Slunce. Vzájemné působení těchto jevů se v literatuře označuje jako YY (Yarkovsky-YORP) jev (Rozitis & Green, 2012).

2.2 Výsledky měření svědčící o YORP jevu

Nezanedbatelný vliv záření na dynamiku malých planetek je dnes již potvrzen celou řadou nezávislých pozorování. Potvrzení jsou zejména nepřímá; pozorujeme situaci, která je obtížně vysvětlitelná pomocí klasického modelu, a naopak velice dobře odpovídá měření při uvážení Jarkovského či YORP jevu. Pro několik asteroidů však byla naměřena změna orbity, resp. rotační frekvence, odpovídající teorii Jarkovského, resp. YORP jevu. V této kapitole stručně shrneme přímá i nepřímá potvrzení YORP jevu.

2.2.1 Fotometrické pozorování rotační fáze

Změna rotační frekvence byla pozorována i přímo, a to fotometrickým měřením světelných křivek¹. Řešením inverzního problému (Kaasalainen et al., 2001) byla poté určena rotační frekvence, poloha pólů i přibližný tvar asteroidu. Pro některé asteroidy přitom model s konstantní periodou dával podstatně vyšší χ^2 než model s lineární změnou frekvence, tj.

$$\omega = \omega_0 + \nu t .$$

Doposud byl touto metodou YORP jev objeven u pěti planetek: (1862) Apollo (Kaasalainen et al., 2007), (54509) 2000 PH₅, následně přejmenován na (54509) YORP (Lowry et al., 2007; Taylor et al.,

¹Přímým měřením světelné křivky je možné určit pouze změnu rotační periody. Pro detekci změny rotační osy je zapotřebí řádově větší doba pozorování (Rozitis & Green, 2013b).

2007), (1620) Geographos (Ďurech et al., 2008b), (3103) Eger (Ďurech et al., 2012) a (25143) Itokawa (Lowry et al., 2014).

U planetky Apollo bylo naměřeno zrychlení o velikosti $(5,5 \pm 1,2) \cdot 10^{-8}$ rad/d². Na základě konvexního tvaru planetky, odvozeného ze světelných křivek, byla numericky spočtena teoretická hodnota zrychlení, která je v souladu s naměřenou hodnotou — model YORP efektu je tedy pro Apollo self-konzistentní. Naměřené světelné křivky planetky Geographos vykazují akceleraci rotace o velikosti $(1,15 \pm 0,15) \cdot 10^{-8}$ rad/d². Zrychlení spočtené dle odvozeného tvaru přibližně odpovídá této hodnotě (Ďurech et al., 2008b).

Rotační zrychlení planetek YORP a Eger, spočtené na základě odvozeného modelu tvaru, je stejného znaménka a řádově odpovídá výsledkům měření, liší se však o faktor 3–4. Tento výsledek nemusí indikovat chybný fyzikální model YORP jevu, neboť hodnota rotačního zrychlení je značně citlivá na velké množství parametrů, které nejsou *a priori* známy. Problémem mohou být zejména neznámé materiálové vlastnosti, nepřesně určená poloha rotační osy, vnitřní nehomogenita planetky a také nedostatečně určený tvar povrchu.

Planetka Itokawa se stala „černou ovci“ teorie YORP efektu. Na základě extrémně přesného modelu tvaru planetky bylo předpovězeno výrazné zpomalování rotace řádu 10^{-7} rad/d² (Breiter et al., 2009), avšak z fotometrických měření od října 2001 do ledna 2013 bylo detekováno *zrychlení* o velikosti $(3,54 \pm 0,38) \cdot 10^{-8}$ rad/d² (Lowry et al., 2014).

2.2.2 Orientace rotačních os v rodině Koronis

Asteroidální rodina Koronis, nacházející se v oblasti $a = 2,83\text{--}2,95$ AU, $e = 0,04\text{--}0,09$, $\sin I = 0,032\text{--}0,042$, je stará přibližně 2–3 Gyr (Bottke et al., 2001). Pokud by se rodina vyvíjela pouze působením gravitace a vzájemnými srážkami, očekávali bychom přibližně maxwellovské rozdělení rotačních frekvencí a náhodně orientované rotační osy, to však neodpovídá pozorování. Prográdní rotátory mají téměř rovnoběžné rotační osy a podobné periody ($7,5 \text{ h} < P < 9,5 \text{ h}$) i šikmosti ($42^\circ < \varepsilon < 50^\circ$). Naopak, asteroidy rotující retrográdně mají periody v intervalech $P < 5 \text{ h}$ a $P > 13 \text{ h}$ a šikmosti $\varepsilon \geq 154^\circ$ (Slivan, 2002).

Uvedené rozdělení je možné vysvětlit pomocí YORP jevu v kombinaci se spin-orbitální rezonancí s_6 (Vokrouhlický et al., 2003), což je nucená frekvence shodná s frekvencí stáčení vzestupného uzlu Saturnu. od výchozího rozdělení nejprve klesá šikmost v důsledku YORP jevu k asymptotické hodnotě 0° , dokud nedojde k zachycení v rezonanci s_6 . Následně roste šikmost k přibližně 55° , při které YORP efekt vymizí pro téměř všechny tvary asteroidů. Numerické simulace dávají po 2–3 Gyr velmi dobrou shodu s pozorovaným stavem. Ukazuje se navíc, že vliv kolizí má na vývoj rodiny minimální vliv ve srovnání s YORP jevem.

2.2.3 Rozdělení rotačních period malých planetek

Velké asteroidy o průměru větším než 40 km mají přibližně maxwellovské rozdělení rotačních frekvencí (Pravec et al., 2008), což je očekávané rozdělení při uvážení nekatastrofických kolizí jakožto jediného mechanismu řídicího vývoje populace asteroidů. Rozdělení rychlostí rotace pro menší asteroidy však již maxwellovské není. Asteroidy hlavního pásu a křížiči dráhy Marsu s průměry mezi 3 a 15 km mají rovnoměrné rozdělení rychlostí v oblasti $f = 1\text{--}9,5 \text{ d}^{-1}$ a nadbytek pomalých rotátorů s frekvencí $f < 1 \text{ d}^{-1}$. Tato distribuce rychlostí rotace není v souladu s kolizním mechanismem, ale možné vysvětlení dostaneme při uvážení YORP jevu (Pravec et al., 2008). Z teorie YORP jevu plyne, že při rotaci asteroidu kolem hlavní osy tenzoru setrvačnosti je časová změna frekvence f nezávislá na f (Čapek & Vokrouhlický 2004). Změna frekvence způsobí rozplynutí jakékoliv koncentrace v původním rozdělení frekvencí a díky nezávislosti na frekvenci není žádná jiná frekvence preferovaná; postupem času dochází ke shlazení distribuce frekvencí a vzniká rovnoměrné rozdělení. Jednoduchý model demonstrující tento proces je uveden v dodatku A v Pravec et al. (2008).

Ve stejném článku je taktéž podáno vysvětlení pro nadbytek pomalých rotátorů. Pro nízké frekvence již není splněn výchozí předpoklad, totiž rotace okolo hlavní osy, v důsledku samotného YORP jevu

dojde k excitaci rotace, a asteroid se tak stane *tumblerem*. Následný vývoj je značně chaotický (Vokrouhlický et al., 2007). Asteroid v oblasti nízké frekvence setrvává delší dobu, než opět dojde k ustálení a k stabilní rotaci, proto pozorujeme nadbytek pomalých rotátorů.

2.2.4 Vznik binárních planetek rotačním rozpadem mateřského tělesa

Mezi blízkozemními objekty o průměru větším než 0,3 km je přibližně 15 % binárních asteroidů (Pravec et al., 2006). Slapový rozpad při blízkém přiblížení s terestrickými planety přitom nedává dobrou shodu s pozorovanými vlastnostmi, jako je například nízká excentricita systému a tvar primáru. Navíc byly objeveny binární asteroidy v hlavním pásu, kde je vznik slapovým působením vyloučen (Čuk, 2007; Pravec & Harris, 2007).

Moment hybnosti bináru je často blízký momentu hybnosti sféry o stejné celkové hmotnosti, která rotuje kritickou frekvencí. To naznačuje vznik bináru z mateřského tělesa, které bylo YORP jevem urychleno až na kritickou frekvenci

$$\omega_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho} \approx 11 \text{ otoček/d} , \quad (2.1)$$

kdy došlo k přesunu materiálu na rovník tělesa a následné kumulaci a oddělení sekundáru (Čuk, 2007). Detailní radarové snímky dvojplanetky (66391) 1999 KW₄ tuto teorii potvrzují, neboť ukazují rovníkový hřbet a zároveň sekundár obíhající v rovníkové rovině (Ostro et al., 2006).

Výsledky numerických simulací rozpadu a následného vývoje planetek vlivem YORP jevu, resp. binárního YORP (BYORP) jevu (Čuk & Burns, 2005) v oblasti hlavního pásu a mezi blízkozemními objekty se shodují s observačními daty, tj. rotační periodou primáru a oběžnou periodou sekundáru, hlavní poloosou a excentricitou systému atd. (Walsh et al., 2012).

2.3 YORP jev na planetce (25143) Itokawa

Problémem teorie YORP efektu se stal malý blízkozemní asteroid (25143) Itokawa. S rozměry pouze 535 × 294 × 209 m (Fujiwara et al., 2006) jde o nejmenší asteroid, který byl navštíven a z blízka pozorován sondou, a to během japonské mise Hayabusa v roce 2005. Díky tomu máme k dispozici velice přesný model jeho tvaru.

Tvar Itokawy byl zkonstruován analýzou snímků povrchu (Gaskell et al., 2006). V největší kvalitě je složen z 3 145 728 trojúhelníkových plošek, což je řádově více, než je možné získat inverzí světelných křivek (~ 1000 plošek). Navíc byly při sestupu Hayabusy pořízeny snímky ze vzdálenosti pouhých 63 m s rozlišením až 6 mm/pixel (Miyamoto et al., 2007). Díky tomu byly získány také informace o struktuře povrchu a o distribuci velikostí balvanů, které se na povrchu Itokawy nacházejí. Detailní snímky máme pouze pro několik míst povrchu, topografii je ale na základě globálního vzhledu (zřejmé hladkosti či hrubosti povrchu) možné rozšířit i do ostatních míst asteroidu, a získat tak odhad pro celkové množství topografických útvarů.

Asteroid Itokawa byl pro svůj značně asymetrický tvar a příznivou polohu blízko rezonance 3:2 se Zemí již před misí Hayabusa zařazen mezi kandidáty pro detekci YORP efektu. Podle tvaru odvozeného na základě radarových snímků (a tedy v podstatně horším rozlišení) byla předpovězena měřitelná akcelerace² o řádové velikosti ~ 10⁻⁷ rad/d² (Vokrouhlický et al., 2004). Na základě kvalitního modelu pak bylo možné provést přesnější výpočty, které predikovaly zpomalování rotace asteroidu o (1,8 – 3,3) · 10⁻⁷ rad/d². Vlivem YORP efektu by tak byla rotační frekvence asteroidu snížena na polovinu za 50 až 90 tisíc let (Scheeres et al., 2007).

Ve srovnání s ostatními asteroidy, u kterých byl YORP jev detekován, jde o výraznou změnu rotační frekvence, která by měla být patrná z naměřených světelných křivek. Kitazato et al. (2007) oznámil objevení zpomalování rotace, v rámci chyby měření odpovídající teoretické hodnotě, později však bylo

²V článku je uvedena decelerace kvůli chybě ve znaménku (Scheeres et al., 2007).

ukázáno, že v jeho modelu byla použita chybná osa rotace, po jejíž opravě není model lineární změny rotační frekvence o nic přesnější než model s konstantní frekvencí (Ďurech et al., 2008a).

Se započtením nově naměřených světelných křivek bylo možné snížit χ^2 , a odhalit tak akceleraci Itokawy o velikosti $(3,54 \pm 0,38) \cdot 10^{-8}$ rad/d² (Lowry et al., 2014). Tento rozpor mezi naměřenou změnou periody a teoretickou změnou odvozenou z modelu asteroidu nebyl dodnes uspokojivě vysvětlen³, bylo však postulováno několik hypotéz, o kterých pojednávají následující podkapitoly.

2.4 Citlivost na rozložení hustoty

Při výpočtu rotačního zrychlení v modelech YORP je zpravidla implicitně předpokládána homogenita tělesa, tedy že poloha těžiště odpovídá geometrickému středu. Nesoulad mezi měřeními a teoretickými výsledky je možné vysvětlit právě vnitřní nehomogenitou asteroidu. Na příkladu Itokawy to ukázali Scheeres & Gaskell (2008). Jak se ukázalo, výsledný YORP efekt je značně citlivý na přesnou polohu těžiště. Pokud bychom uvažovali posun těžiště oproti geometrickému středu o pouhých 15 m směrem k „hlavičce“ asteroidu, decelerace asteroidu zcela vymizí; při větším posunu těžiště pak bude asteroid akcelerovat. V porovnání s délkou asteroidu (535 m) jde o relativně malý posun. Pokud bychom předpokládali, že hlavička asteroidu je z materiálu odlišné hustoty než materiál těla asteroidu, byl by rozpor mezi teorií a měřeními odstraněn. To je přijatelné vysvětlení, neboť Itokawa je *hromadou sutí*⁴ (Fujiwara et al., 2006).

Na základě naměřené hodnoty akcelerace Itokawy určil Lowry et al. (2014) posun těžiště na přibližně 21 m. Aproximací tvaru asteroidu dvěma elipsoidy s různými hustotami pak došel k hustotě těla Itokawy (1750 ± 110) kg/m³ a hustotě hlavičky (2850 ± 500) kg/m³. Podobné rozdělení hustot se vyskytuje například u binární planetky (66391) 1999 KW₄ (Ostro et al., 2006).

Problémem je, že výchozí předpoklad (nenulový posun těžiště), je velice obtížné ověřit nezávislým měřením. Měření gravitačního potenciálu sondou Hayabusa nebylo natolik přesné, aby bylo možné určit polohu těžiště (Abe et al., 2006). Naměřená akcelerace by tak představovala jedinou informaci o vnitřní struktuře asteroidu.

Posun těžiště byl nalezen tak, aby spočtená akcelerace nejlépe odpovídala naměřené hodnotě. Výpočet byl proveden pro tvar asteroidu sestávající z 49 152 trojúhelníkových plošek. Přitom je opomíjen vliv lokální topografie povrchu, přestože pro vyšší rozlišení dává model podstatně odlišné výsledky. Chyba stanovených hustot hlavičky a těla Itokawy je dána různými rozmístěním hrubého terénu. Hrubost povrchu způsobuje *směřování* infračervené emise; tento efekt a jeho vliv na rotační zrychlení je zkoumán v Rozitis & Green (2012).

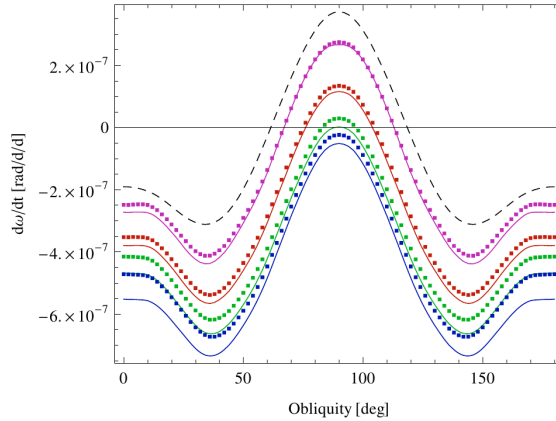
2.5 Citlivost na topografii

Ze závislosti spočteného zrychlení rotace na použitém rozlišení modelu až do 50 696 plošek bylo objeveno, že velikost zrychlení nevykazuje pro rostoucí rozlišení konvergenci (Scheeres, 2007). Stejný závěr vyplývá i z Ďurech et al. (2008a), ve kterém již byl použit model s 196 608 trojúhelníkovými ploškami. Při zvýšení rozlišení se decelerace zvyšovala bez náznamu, že by měla konvergovat k nějaké konečné hodnotě. Stále však nebylo zřejmé, zda je tato zdánlivá divergence způsobena nedostatečným rozlišením povrchu či chybnými předpoklady v použitém modelu.

V práci Breiter et al. (2009) byla modelována závislost změny úhlové rychlosti na šikmosti pro různá rozlišení povrchu, až do nejvyššího rozlišení o 3 145 728 ploškách. Výpočet YORP efektu byl prováděn 1D tepelným modelem, s uvážením vrhání stínu nekonvexitami povrchu. Bylo zjištěno, že při zvýšení rozlišení dojde pouze k vertikálnímu posunu křivky závislosti rotačního zrychlení na šikmosti asteroidu (obrázek 2). Vzdálenost jednotlivých křivek se přitom se zvyšujícím rozlišením zmenšovala, ale pouze nepatrně, stále nebyla vidět zřejmá konvergence ke konečné hodnotě. Při použití přesnější rodiny gaskellovských modelů G8 byla navíc decelerace větší než u odpovídajících rozlišení modelů G6. Ani

³Všimněme si, že původní odhad akcelerace asteroidu z pre-hayabusovského modelu se (aspoň řádově) shoduje s naměřenou hodnotou, přestože přesnější tvar predikuje zcela odlišnou hodnotu.

⁴Jde o agregáty, jejichž části jsou vázány pouze gravitací. V anglické literatuře se objevuje termín „rubble-pile“.



Obrázek 2: Závislost změny úhlové frekvence na šikmosti vlivem YORP jevu pro různá rozlišení povrchu Itokawy. Rozlišení jsou barevně seřazena od nejmenšího po největší následovně: růžová – červená – zelená – modrá. Tečkované a plné křivky přitom odpovídají různým rodině modelů, tečky jsou modely G6 a čáry (novější) modely G8. Převzato z Breiter et al. (2009).

při užití nejvyššího rozlišení, které popisuje topografii až do metrových rozměrů, není tedy povrch popsán dostatečně pro přesné určení úhlového zrychlení.

Tento výsledek je problematický zejména proto, že měřením byla objevena *akcelerace* Itokawy. Při uvážení přesnějšího modelu povrchu či reálnějšího fyzikálního modelu (s uvážením stínění atd.) bychom očekávali hodnotu decelerace bližší naměřené hodnotě, místo toho dostáváme hodnotu vzdálenější.

Důvodem, proč se změna frekvence pro různá rozlišení povrchu natolik liší, je nejspíš detailnější stínění povrchu. Zatímco pro nízká rozlišení jsou stíny vrhány pouze globálními nekonvexitami (například hlavičkou Itokawy), detailnější rozlišení „stvoří“ stíny od menších topografických útvarů, které předtím splývaly s globálním povrchem. Tím dopadá na povrch menší zářivý tok, a vzniká tak asymetrie způsobující větší YORP jev (v případě Itokawy deceleraci) než tomu bylo pro nízká rozlišení.

Zajímavé je, že při uvážení *globálního sebeohřevu*, tj. dodatečného zářivého toku emitovaného viditelnými částmi asteroidu, dojde k snížení výsledné decelerace. Odůvodnění je analogické: iradiací míst, která byla v původním modelu zastíněná, je asymetrie vzniklá stíny zeslabená. Výsledný YORP jev bude slabší než v případě modelu bez sebeohřevu⁵. I přesto však vychází výrazná decelerace velmi vzdálená naměřené hodnotě rotačního zrychlení (Rozitis & Green, 2013a).

Závěry Scheeres (2007); Breiter et al. (2009) daly podnět pro detailní zkoumání vlivu lokální topografie na YORP jev. Bylo potřeba zejména vyšetřit, zdali je vliv nerozlišených povrchových struktur na výsledný moment fundamentální vlastností YORP jev nebo jde o fenomén vyskytující se pouze u specifických tvarů asteroidů, jako např. u Itokawy.

Vliv lokální topografie na YORP jev byl zkoumán v práci Statler (2009) na syntetických tvarech asteroidů. Asteroidy byly generovány standardní metodou gaussovských sfér (Muinonen, 1998), vliv nerozlišené topografie byl potom hledán u tří typů změn povrchu: zjemnění topografie (vyšší řád rozvoje kulových funkcí), přidání balvanu a přidání kráteru.

Závěry jsou pro pozemská pozorování vskutku pesimistické. Máme-li povrch asteroidu určený koeficienty s_{lm} do řádu $l_{\text{base}} = 10$, spočtený YORP efekt se může od skutečného (resp. od efektu spočteného z $l_{\text{max}} = 20$) lišit až o 100%. Nemusíme tedy správně určit ani znaménko. Pokud bychom chtěli znát výsledné zrychlení s chybou menší než 10%, je nutné znát topografii do řádu alespoň $l_{\text{base}} = 20$.

K podobným výsledkům vede i zkoumání vlivu balvanů a kráterů. Jediný kráter je schopen změnit

⁵Rozitis & Green (2013a) zkoumali závislost YORP efektu na použitém modelu pro velké množství tvarů asteroidů. Ukázali, že statisticky často byl model, který započítává vrhané stíny *vzdálenější* modelu uvažující i sebeohřev (jenž je proto považován za model nejbližší realitě), než model, který vrhané stíny nepočítá a uvažuje pouze normálovou charakteristiku stínů, tzv. pseudo-konvexní model.

moment síly o několik desítek procent. Vliv balvanů (o stejné velikosti) je ještě výraznější, přibližně o trojnásobek. Dokonce pouhým posunutím balvanu o dvojnásobek jeho průměru je možné změnit znaménko výsledného YORP jevu, v rotační frekvenci i v šikmosti⁶. Lokální topografie má tedy výrazný statistický vliv na YORP jev.

Přidání nerozlišené topografie přitom téměř neovlivní světelné křivky asteroidu. Tvary, které se zdají dle světelných křivek totožné (průměrný rozdíl hvězdných velikostí menší než 0,05 mag), se mohou v akceleraci lišit o více než 100 %. Tvar odvozený ze světelných křivek tedy nemůže přinést přesné kvantitativní výsledky.

Tento znepokojivý výsledek vyšel najevo v době, kdy byl již YORP efekt detekován u planetek (1862) Apollo, (54509) YORP a (1620) Geographos. Přitom naměřená změna rotační frekvence odpovídá hodnotě spočtené z modelu odvozeného právě ze světelných křivek. Kvalitativní detekce YORP jevu se zřejmě nedá vyvrátit, neboť vliv planetárních slapů nemůže způsobit změnu této velikosti (Rubincam, 2000). Otázkou zůstává, zdali je kvantitativní shoda naměřené a teoretické hodnoty pouhou náhodou.

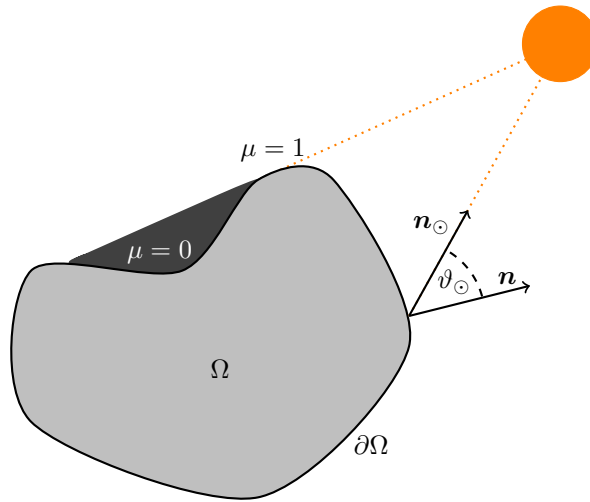
⁶Kvůli tomu je vývoj asteroidu zřejmě více chaotický než předpokládal např. Rubincam (2000). Při urychlení asteroidu může dojít k posunu balvanu na povrchu, čímž se změní tenzor setrvačnosti a v důsledku i YORP efekt. Asteroid tak může začít zpomalovat, anebo opět zrychlovat kolem jiné osy rotace, než dojde k dalšímu posunu balvanu.

3 Teorie YORP efektu

V předchozí části této práce byl YORP jev popisován především kvalitativně. Nyní přistoupíme k detailnějšímu popisu a k odvození teoretických vztahů pro výpočet výsledného momentu, kterým záření na asteroid působí. Vycházíme především z prací Bottke et al. (2006); Čapek (2007); Rozitis & Green (2012).

3.1 Popis tělesa

Oblast, kterou v prostoru zaujímá asteroid, označíme Ω , hranici této oblasti potom $\partial\Omega$. Jednotkový vektor, směřující od asteroidu ke Slunci, značíme \mathbf{n}_\odot , vnější normálu daného bodu \mathbf{n} . Zenitovou vzdálenost Slunce značíme ϑ_\odot , tedy $\cos \vartheta_\odot = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\odot$. Použitá symbolika je přehledně znázorněna na obrázku 3.



Obrázek 3: Značení použité pro popis asteroidu.

Záření od Slunce dopadá pouze na přivrácenou část planetky, u nekonvexních asteroidů navíc může docházet k vzájemnému stínění jednotlivých částí povrchu. Zavádíme stínící funkci

$$\mu(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{bod } \mathbf{r} \text{ je osvětlen Sluncem,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Pro konvexní objekty je stínění dáno pouze orientací lokální normály vzhledem ke Slunci, a stínící funkce se tak redukuje na

$$\mu(\mathbf{r}) = H(\cos \vartheta_\odot), \quad (3.2)$$

kde H označuje Heavisideovu skokovou funkci. U nekonvexním těles je situace složitější, neboť stínící funkce je závislá na konkrétním tvaru tělesa. Z toho důvodu analytické modely YORP efektu pracují pouze s konvexními asteroidy, případně zanedbávají vrhání stínu nekonvexitami povrchu (Nesvorný & Vokrouhlický, 2007). Numerický postup pro výpočet stínící funkce je popsán v dodatku A.

Vlivem nekonvexit je obecně směr působení reakční síly *různý* od normálového směru, neboť část záření je opět pohlcena jinou částí povrchu, a nedojde tak ke změně hybnosti (viz kapitolu 3.2). Z toho důvodu zavádíme viditelnostní funkci

$$\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \text{z bodu } \mathbf{r} \text{ je vidět do bodu } \mathbf{r}', \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Ihned vidíme, že funkce je symetrická vůči záměně $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$. Pro konvexní tělesa je výpočet funkce ν triviální — je to konstantní nulová funkce.⁷

V případě, že z každého bodu povrchu jsou viditelné všechny body nad lokálním horizontem, můžeme vyjádřit viditelnostní funkci

$$\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = H(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) H(\mathbf{n}' \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})) , \quad (3.4)$$

kde \mathbf{n} , resp. \mathbf{n}' je vnější normála v bodě \mathbf{r} , resp. \mathbf{r}' . Neboli spojnice bodů \mathbf{r} , \mathbf{r}' směřuje nad lokální horizont v obou bodech \mathbf{r} a \mathbf{r}' .

3.2 Radiační síla

Sluneční záření dopadá na povrch asteroidu, a působí tak na asteroid silou. Část dopadajícího záření je asteroidem absorbována a část je rozptýlena do okolí, čímž opět odnáší hybnost, a působí tak silou. Konečně, pohlcené záření způsobuje zahřívání asteroidu, a ten se v důsledku sám stává zdrojem tepelného záření. Předpokládáme-li, že povrch asteroidu je v lokální termodynamické rovnováze, potom je emise možné popsat Stefanovým-Boltzmannovým zákonem.

Uvažme zářivý tok Φ dopadající na plošku dS pod úhlem ϑ . Každý foton přenáší hybnost o velikosti

$$p = \frac{E}{c} , \quad (3.5)$$

kde E je jeho energie a c rychlost světla. Podle Newtonova pohybového zákona a zákona akce a reakce tak záření působí na plošku silou o velikosti

$$df = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{\Phi}{c} \cos \vartheta dS . \quad (3.6)$$

Směr této síly odpovídá směru dopadajícího záření, resp. směru, ve kterém je záření z povrchu emitováno.

Najdeme-li elementární sílu $d\mathbf{f}$ pro každý bod povrchu $\mathbf{r} \in \partial\Omega$, celkovou sílu působící na asteroid dostaneme integrací

$$\mathbf{f} = \int_{\partial\Omega} d\mathbf{f} . \quad (3.7)$$

Zcela analogicky, výsledný moment dostaneme integrací vektorového součinu polohového vektoru \mathbf{r} a elementární síly $d\mathbf{f}$, tedy

$$\mathbf{T} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times d\mathbf{f} . \quad (3.8)$$

Síla, kterou záření působí na povrch, přitom závisí na různých parametrech podle původu záření. Odvodíme nyní vztahy pro tlak dopadajícího záření, tlak rozptýleného záření a tlak, kterým působí tepelné záření.

Dopadající záření

Směr záření dopadající na povrch tělesa ze Slunce je dán polohovým vektorem v heliocentrickém souřadném systému. Velikost síly můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{d\mathbf{f}_{\text{dir}}}{dS} = -\frac{\Phi_{\odot}}{c} \cos \vartheta_{\odot} \mu \mathbf{n}_{\odot} . \quad (3.9)$$

⁷Je potřeba definovat viditelnost bodů ležící právě v rovině horizontu. Bez újmy na obecnosti položíme ν pro tyto body nulovou; jak uvidíme, tato volba nemá žádný fyzikální význam, libovolná jiná hodnota by stejně skončila nulová po vynásobení kosinem zenitové vzdálenosti. Nulová hodnota je výhodná, neboť částečně urychlí numerický výpočet.

Zde Φ_{\odot} je dopadající zářivý tok v místě asteroidu, μ je stínící funkce a $\cos \vartheta_{\odot} dS$ je průmět elementu plochy do směru \mathbf{n}_{\odot} . Bylo prokázáno, že moment síly středovaný přes vlastní rotaci a přes oběh kolem Slunce je nulový (Nesvorný & Vokrouhlický, 2008),

$$\langle \mathbf{T}_{\text{dir}} \rangle = 0 .$$

Přímý tlak slunečního záření může hrát roli u binárních systémů (Breiter & Vokrouhlický, 2010), v případě jediného objektu jej však můžeme zcela zanedbat.

Rozptýlené záření

Část dopadajícího záření je rozptýlena do okolí. Uvažujeme-li lambertovský rozptyl, poměrná část rozptýleného ku dopadajícímu záření je dána hemisférickým albedem A_h . Pro velice tmavé asteroidy ($A_h \sim 0$) je rozptyl zanedbatelný oproti tepelnému záření, a není jej tedy nutné započítávat do celkové energetické bilance ani uvažovat příspěvek k celkové reakční síle. Vícenásobné rozptyly zanedbáme pro všechny hodnoty A_h .

Tlak, kterým rozptýlené záření působí, je dán vztahem

$$\frac{d\mathbf{f}_{\text{sc}}}{dS} = -\frac{\Phi_{\odot}}{c} \cos \vartheta_{\odot} A_h \mu \mathbf{h} , \quad (3.10)$$

kde A_h označuje hemisférické albedo a \mathbf{h} je průměrný emisní vektor, definovaný jako

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \int_{\text{VS}(\mathbf{r})} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cos \vartheta \, d\Gamma' , \quad (3.11)$$

kde $\text{VS}(\mathbf{r})$ je část oblohy, kterou lze vidět z bodu \mathbf{r} , projektovaná na jednotkovou (hemi)sféru.

Je-li část oblohy zacloněna nekonvexitami povrchu, záření emitované v tomto směru neodnese hybnost pryč z asteroidu, a sílu v tomto směru tedy nezapočítáme (předpokládáme, že veškeré rozptýlené záření, které dopadne na povrch asteroidu, je pohlceno).

V případě, že je viditelná celá horní hemisféra (což pro konvexní tělesa platí ve všech bodech povrchu), je možné přímou integrací spočítat vektor \mathbf{h}

$$\mathbf{h} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{r} \frac{\cos \vartheta}{\pi r^2} r^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2}{3} \mathbf{n} ,$$

kde $\mathbf{r} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Pro tlak potom platí jednoduchý vztah

$$\frac{d\mathbf{f}_{\text{sc}}}{dS} = -\frac{2}{3} \frac{\Phi_{\odot}}{c} \cos \vartheta_{\odot} A_h \mu \mathbf{n} . \quad (3.12)$$

Tepelné záření

Všechna tělesa s nenulovou termodynamickou teplotou jsou zdrojem elektromagnetického záření. Předpokládáme-li, že povrch asteroidu je v lokální termodynamické rovnováze, zářivý tok vycházející z povrchu je dán Stefanovým-Boltzmannovým zákonem

$$\Phi_{\text{rad}} = \varepsilon \sigma u^4 , \quad (3.13)$$

kde ε je emisivita, σ Stefanova-Boltzmannova konstanta a u termodynamická teplota. Dle Wienova posunovacího zákona je vlnová délka maximální intenzity vyzařování nepřímo úměrná teplotě,

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{u} ,$$

kde $b \doteq 2,898 \text{ mm K}$ je Wienova konstanta. Při uvážení typických teplot na povrchu asteroidů ($u \sim 100$ až 300 K) je maximum vyzařování v infračervených vlnových délkách $\lambda \sim 10$ až $30 \text{ }\mu\text{m}$.

Vztah pro reakční sílu dostaneme dosazením z (3.13),

$$\frac{d\mathbf{f}_{\text{rad}}}{dS} = \frac{\varepsilon\sigma}{c} u^4 \mathbf{h} . \quad (3.14)$$

Určení povrchové teploty u představuje pro výpočet \mathbf{f}_{rad} fundamentální úkol, neboť teplota se s časem netriviálně mění, a nelze ji tedy odhadnout, jako tomu je možné u tepelných parametrů asteroidu.

Teplotu na povrchu určíme z rovnice energetické bilance

$$K\mathbf{n} \cdot \nabla u + \varepsilon\sigma u^4 = \mathcal{E} . \quad (3.15)$$

kde K je tepelná vodivost. Členy po řadě představují tepelný tok, vedený dovnitř asteroidu dle Fourierova zákona, tepelné vyzařování povrchu dle Stefanova-Boltzmannova zákona a celkový dopadající zářivý tok.

Předpokládáme-li nulovou nebo zanedbatelně malou vodivost K , je teplota v daném místě dána rovnováhou dopadajícího a vyzářeného toku, tedy

$$\varepsilon\sigma u^4 = \mathcal{E} . \quad (3.16)$$

Pokud v dopadajícím toku dále zanedbáme rozptýlený a vyzářený tok od viditelných částí asteroidu nebo prostě předpokládáme konvexní asteroid, je teplota v daném místě nezávislá na teplotě okolí i na historii, a můžeme tak psát

$$\frac{d\mathbf{f}_{\text{rad}}^{K \rightarrow 0}}{dS} = -\frac{(1 - A_h)\Phi_{\odot}}{c} \cos\vartheta_{\odot} \mu \mathbf{h} . \quad (3.17)$$

Porovnáním s reakční silou od rozptýleného záření (3.10) pozorujeme, že elementární síly mají stejný směr a jejich velikost se liší o konstantní faktor,

$$d\mathbf{f}_{\text{sc}} = \frac{A_h}{1 - A_h} d\mathbf{f}_{\text{rad}}^{K \rightarrow 0} . \quad (3.18)$$

Uvedené limitní řešení se obvykle označuje jako *Rubincamova aproximace* (Vokrouhlický & Čapek, 2002).

3.3 Rovnice vedení tepla

Při uvážení konečné hodnoty vodivosti není možné určit teplotu pouze na základě insolační funkce. Řešení je potom o poznání složitější. I v případě, že bychom zanedbali rozptýlený a vyzářený tok, teplota v daném místě již závisí na (infinitesimálním) okolí. Pro určení povrchové teploty je nutno řešit rovnici vedení tepla

$$\nabla \cdot (K\nabla u) - \rho C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 , \quad (3.19)$$

kde C je měrná tepelná kapacita a ρ je hustota materiálu asteroidu. Jde o lineární parciální diferenciální rovnici parabolického typu, rovnice (3.15) představuje okrajovou podmínku.

Analytické řešení rovnice vedení tepla v obecné třídídimenzionální oblasti neexistuje. Pro zjednodušení předpokládáme, že rozměry povrchových útvarů jsou řádově větší než tepelná hloubka, definovaná

$$L_{\text{wave}} = \sqrt{\frac{2K}{\omega\rho C}} ,$$

kde ω je rotační úhlová frekvence. Za tohoto předpokladu můžeme zanedbat laterální vedení tepla. Teplota tak při vhodné volbě souřadnic bude záviset pouze na jediné prostorové souřadnici a na čase.

Pro daný bod povrchu volme souřadnici z tak, že $z = 0$ značí povrch, $z > 0$ odpovídá vnitřku asteroidu a jednotkový vektor ve směru osy z má opačný směr, jako místní normála

$$\hat{\mathbf{e}}_z = -\mathbf{n} .$$

Rovnice vedení tepla (3.19) a okrajová podmínka (3.15) se redukují na rovnice

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho C \frac{\partial u}{\partial t} \quad \forall z \geq 0 \quad (3.20)$$

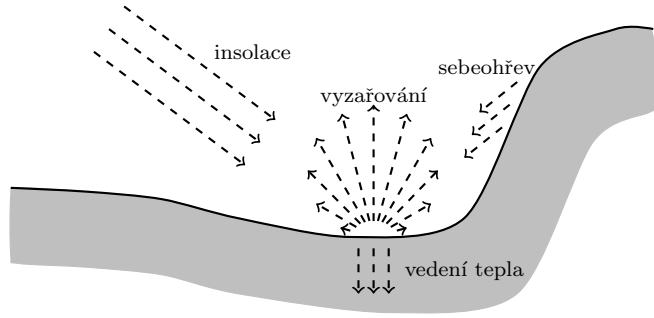
$$-K \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \sigma u^4 = \mathcal{E} \quad z = 0 \quad (3.21)$$

Tato soustava rovnic je za jistých dalších aproximací řešitelná analyticky (viz kapitolu 5.1) a je podstatně jednodušší pro numerické řešení.

3.4 Energetická bilance na povrchu

Obrázek 4 popisuje různé zářivé toky, které hrají roli v energetické bilanci. V okrajové podmínce (3.15) jsou zářivé toky shrnuty do veličiny \mathcal{E} , podívejme se nyní na výpočet jednotlivých složek. Primárním zdrojem energie je zářivý tok dopadající ze Slunce \mathcal{E}_\odot . Pro nekonvexní asteroidy je však relevantní i jev globálního sebeohřevu, způsobený tokem rozptýleným \mathcal{E}_{sc} a tepelně vyzářeným \mathcal{E}_{rad} z viditelných míst povrchu. Okrajová podmínka rovnice vedení tepla při zahrnutí všech členů je pak

$$K \mathbf{n} \cdot \nabla u + \varepsilon \sigma u^4 = \mathcal{E}_\odot + \mathcal{E}_{sc} + \mathcal{E}_{rad} . \quad (3.22)$$



Obrázek 4: Zákon zachování energie na povrchu asteroidu. Zářivý dopadající od Slunce a od ostatních částí povrchu a teplo vedené dovnitř asteroidu musí být stejné, jako tepelná emise.

Zářivý tok slunečního záření neboli *insolační funkce* lze vyjádřit jako

$$\mathcal{E}_\odot(\mathbf{r}) = (1 - A_h) \frac{F_\odot}{R^2} \mu(\mathbf{r}) \cos \vartheta_\odot , \quad (3.23)$$

kde A_h je hemisférické albedo, F_\odot je sluneční konstanta, R vzdálenost tělesa od Slunce, $\mu(\mathbf{r})$ stínící funkce a ϑ_\odot zenitová vzdálenost Slunce.

Vztahy pro zářivé toky \mathcal{E}_{rad} a \mathcal{E}_{sc} , mají vcelku podobný tvar, neboť předpokládáme, že úhlové rozdělení rozptýleného i tepelného záření je *lambertovské*. Lze snadno nahlédnout, že platí⁸

⁸Nečárkované veličiny označují bod, ve kterém tok počítáme, čárkované veličiny potom odpovídají bodům, přes které integrujeme. Povrchové parametry, tj. albedo a emisivita, jsou v integrálech taktéž čárkované, aby byl tvar toků obecný. Za předpokladu homogenity jsou však nezávislé na \mathbf{r}' , a je tedy možné je vytknout před integrál.

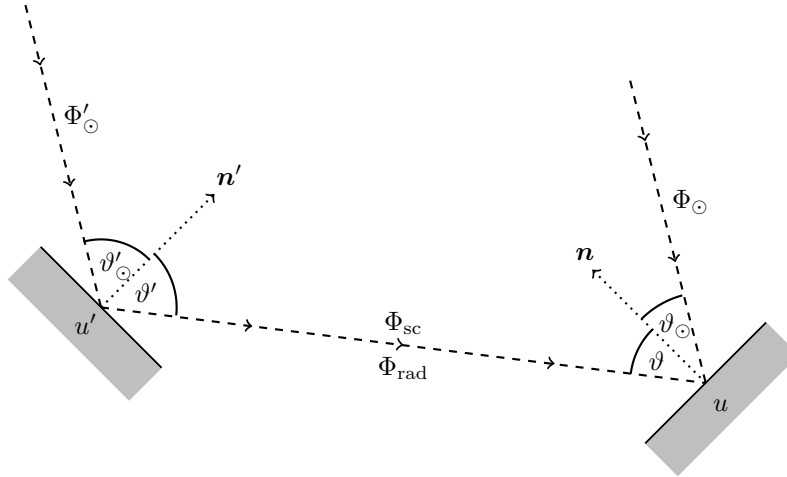
$$\mathcal{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) = (1 - A_{\text{IR}}) \int_{\partial\Omega} \varepsilon' \sigma u^4(\mathbf{r}') \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma' \quad (3.24)$$

$$\mathcal{E}_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = (1 - A_h) \int_{\partial\Omega} A'_h \mathcal{E}_{\odot}(\mathbf{r}') \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta'}{\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma' \quad (3.25)$$

kde A_{IR} je albedo povrchu v infračervené oblasti. Úhly jsou definovány jako skalární součiny

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_{\odot} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\odot} , \\ \cos \vartheta &= \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} , \\ \cos \vartheta' &= \mathbf{n}' \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} . \end{aligned}$$

Užité značení je přehledně zakresleno na obrázku 5.



Obrázek 5: Značení užité při popisu rozptýleného a tepelně emitovaného toku z viditelných částí povrchu.

Funkce $\mu(\mathbf{r})$ a úhly ϑ_{\odot} , ϑ'_{\odot} jsou taktéž závislé na čase, čas explicitně nevypisujeme pro zjednodušení zápisu. Všimněme si však, že funkce $\nu(\mathbf{r})$ a úhly ϑ , ϑ' na čase nezávisí, a jsou tedy dány pouze tvarem povrchu. Rozptýlený tok \mathcal{E}_{sc} závisí na kosinech úhlů ϑ , ϑ' , viditelnosti $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, ale také na úhlu ϑ'_{\odot} , pod kterým je vzdálené místo osvětleno Sluncem, a na stínění vzdáleného místa; tyto závislosti jsou schované ve členu $\mathcal{E}_{\odot}(\mathbf{r}')$.

Snadno nahlédneme, odkud se rovnice (3.24), (3.25) vzaly. V principu může být bod \mathbf{r} osvětlen libovolným bodem povrchu \mathbf{r}' , integrujeme tedy elementární toky přes celý povrch asteroidu $\partial\Omega$. Příspěvek pouze od viditelných bodů pak zaručuje viditelnostní funkce $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Přicházející záření dopadá na plošku dS pod úhlem ϑ , odtud člen⁹ $(1 - A_B) \cos \vartheta$, resp. $(1 - A_{\text{IR}}) \cos \vartheta$. Člen $\cos \vartheta$ odpovídá lambertovskému zákonu rozptylu, resp. emise.

Oba toky se přes zjevnou podobnost zásadně liší. Zatímco tok \mathcal{E}_{sc} závisí na čase (přes tok \mathcal{E}_{\odot} , resp. vektor \mathbf{n}'_{\odot} , který je v topocentrických souřadnicích časově proměnný) a na geometrii povrchu, tok \mathcal{E}_{rad} závisí kromě geometrie taktéž na povrchové teplotě ve vzdálených místech $u(\mathbf{r}')$, kterou se ovšem snažíme teprve určit.

⁹Rozptýlené záření má podobné spektrum jako Slunce, tepelné záření je v infračervené oblasti, proto je potřeba uvažovat obecně různá albeda A_h a A_{IR} .

Při zohlednění zářivého toku \mathcal{E}_{rad} v celkové energetické rovnováze na povrchu již není problém nalezení teploty u lokální! Počítáme-li pouze se slunečním zářením \mathcal{E}_{\odot} , teplota u v daném místě závisí pouze na parametrech daného místa a (infinitezimálního) okolí, a samozřejmě na čase. Započtením přenosu energie zářením však teplota v bodě \mathbf{r} v principu závisí na teplotě v jakémkoliv místě \mathbf{r}' na povrchu asteroidu. A naopak, i teplota v bodě \mathbf{r}' bude záviset na teplotě v bodě \mathbf{r} .

3.5 Velikost a směr radiální síly

Řešením rovnice vedení tepla s příslušnými okrajovými podmínkami dostaneme rozložení teploty $u(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \Omega$, mimo jiné i rozložení teploty na povrchu. Na základě toho můžeme nyní určit výsledný moment působící na asteroid.

Tlak tepelného záření v místě \mathbf{r} spočteme ze vztahu (3.14):

$$\frac{d\mathbf{f}}{dS} = -\frac{\varepsilon\sigma}{\pi c} u^4 \int_{\text{VS}(\mathbf{r})} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cos \vartheta \, d\Gamma' . \quad (3.26)$$

Je výhodnější přepsat integrál (3.26), který se počítá přes viditelnou část oblohy, na rozdíl integrálu přes celou oblohu (3.12) a integrálu přes část oblohy, která je blokována. Dostáváme výsledek uvedený v Rozitis & Green (2011)

$$\frac{d\mathbf{f}}{dS} = -\frac{\varepsilon\sigma}{c} u^4 \left(\frac{2}{3} \mathbf{n} - \int_{\partial\Omega} \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta'}{\pi (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|} \nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, d\Gamma' \right) . \quad (3.27)$$

Tento integrál je dán pouze geometrií povrchu tělesa. Má-li povrch asteroidu vysoké albedo, neměli bychom zanedbat tlak způsobený rozptylem slunečního záření (viz kapitulu 3.2).

Konvexní vs. nekonvexní směr

Numerický výpočet integrálu v rovnici (3.27) je značně náročný a také nutně nepřesný kvůli výskytu stínící funkce $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ a chybám numerické integrace. Je proto výhodné zjednodušit výpočet emisních vektorů \mathbf{h} tak, aby příliš neovlivnil celkový moment síly.

Uvažujme jednoduchou volbu $\mathbf{h} \approx \frac{2}{3} \mathbf{n}$. Zcela zanedbáváme odchylky síly od normálového směru vlivem absorpce záření na nekonvexitách povrchu. Toto zjednodušení budeme označovat jako normálová aproximace vektoru \mathbf{h} pro odlišení od úplného tvaru (3.11).

Směr vektoru $d\mathbf{f}$ se může se od normálového směru značně odchylovat a pro znalost samotného vektoru \mathbf{h} je normálová aproximace nepoužitelná¹⁰. Nás však zajímá pouze celková síla $\mathbf{f} = \int d\mathbf{f}$, resp. moment síly $\mathbf{T} = \int \mathbf{r} \times d\mathbf{f}$, vektory \mathbf{h} jsou pouze mezivýsledkem.

Určit přitom, jaký moment dostaneme výpočtem úplných hodnot vektorů \mathbf{h} ve srovnání s normálovou aproximací, není triviální. Při uvažování nekonvexního modelu je sice část záření pohlcena, síla $d\mathbf{f}$ bude proto co do velikosti menší. Její tangenciální složka ale může být větší, a celkově tak působit větším momentem.

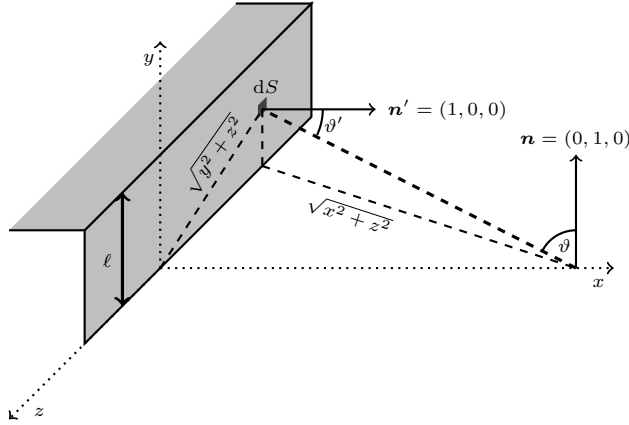
Vliv normálové aproximace ukážeme na jednoduchém příkladu. Uvažujme zeď o výšce ℓ , nekonečně širokou, která leží na rovném povrchu. Spočítejme z definice x -složku vektoru \mathbf{h} ve vzdálenosti x od zdi.

$$h_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\ell} \frac{x}{\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, dy \, dz = \frac{x^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\ell} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \, dy \, dz = \frac{2}{3\pi} \frac{\ell^2}{x^2 + \ell^2} , \quad (3.28)$$

¹⁰Odlíšnost od normálového směru uvedeme na ilustračním příkladu, kdy se referenční bod nachází v jeskyni a jediná část oblohy, kterou lze vidět, je kolmá na místní normálu.

neboť z obrázku 6 snadno nahlédneme, že platí

$$\vartheta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{y}, \quad \vartheta' = \arctg \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}.$$



Obrázek 6: Souřadný systém a geometrie zkoumaného problému. Zed' je ve směru y vysoká ℓ , ve směru z je nekonečná.

Složka h_x dosahuje až hodnoty $2/3\pi$, kdežto v normálové aproximaci je ve všech bodech povrchu nulová. Zkusme nyní odhadnout, jakým celkovým momentem působí. Je-li teplota povrchu konstantní, potom je složka síla, kterou působí povrch, ve směru osy x úměrná integrálu

$$\mathcal{F}_{\text{surf}} = \int_0^{\infty} \frac{2}{3\pi} \frac{\ell^2}{x^2 + \ell^2} dx = \frac{\ell}{3}.$$

Analogickým způsobem spočteme složku h_x vektoru, který se nachází na zdi.

$$h_x = \frac{2}{3} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi} \frac{\cos \vartheta \cos \vartheta'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dz = \frac{2}{3} - \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} dx dz = \frac{1}{3} \quad (3.29)$$

Protože je to konstanta nezávislá na souřadnicích, integrál spočteme pouhým vynásobením výškou zdi

$$\mathcal{F}_{\text{wall}} = \frac{\ell}{3}.$$

Celkem je proto síla úměrná veličině

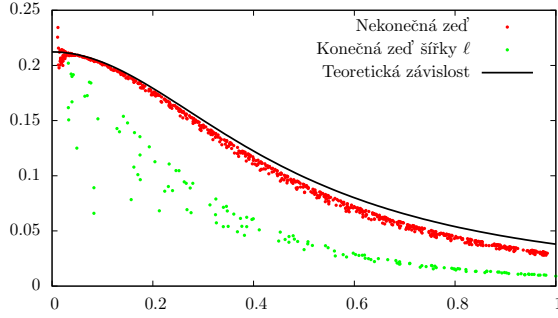
$$\mathcal{F}_{\mathbf{h}} = \frac{2}{3} \ell.$$

Spočíst veličinu \mathcal{F} v případě normálové aproximace je triviální: do x -ové složky přispívají pouze body na zdi, a to konstantním faktorem $\frac{2}{3}$, celková síla je úměrná

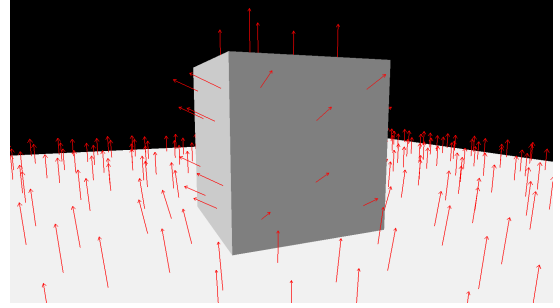
$$\mathcal{F}_{\frac{2}{3}\mathbf{n}} = \frac{2}{3} \ell.$$

Z uvedeného vyplývají dva pozoruhodné závěry. Zaprvé, při uvážení neaproximovaných hodnot \mathbf{h} působí zed' i povrch stejnou silou $\ell/3$. Zadruhé, výpočet celkové síly s normálovou aproximací vede k přesně stejnému výsledku. Tyto závěry jsou však dány hlavně idealizací příkladu.

V případě, že by byla zed' konečné šířky, část záření, která původně byla pohlcena zdí, unikne a celkovou sílu, kterou působí povrch, tak redukuje. Obě situace jsou porovnány na obrázku 7. Pro složitější útvary než pravoúhlá zed' je potom situace komplikovanější, z uvedeného nemůžeme vyvodit žádné kvantitativní závěry.



Obrázek 7: Závislost x -ové složky vektoru \mathbf{h} na vzdálenosti od zdi. Rozptyl hodnot u konečné zdi je způsoben závislostí na souřadnici y . Pozorujeme, že teorie pro nekonečnou zeď představuje maximum numericky určených hodnot.



Obrázek 8: Ilustrace odchylky vektorů \mathbf{h} od normálního směru pro modelový případ – krychle na rovném povrchu.

3.6 Vliv momentu síly na rotační stav planety

Celkový moment působící na asteroid dostaneme prostou integrací elementárních momentů přes povrch $\partial\Omega$

$$\mathbf{T} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \times d\mathbf{f}. \quad (3.8)$$

Počátek souřadnic volíme v geometrickém středu tělesa, vycházíme tedy od předpokladu, že centrum geometrie se shoduje s těžištěm¹¹. Předpokládáme-li stabilní rotaci kolem nejkratší osy tenzoru setrvačnosti, pro časovou změnu úhlové frekvence ω a osy rotace \mathbf{e} pak platí vztahy (Bottke et al., 2006)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}}{I} = \frac{T_s}{I}, \quad (3.30)$$

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{\mathbf{T} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}}{I\omega}, \quad (3.31)$$

kde I je moment setrvačnosti a T_s je projekce momentu do směru rotační osy. Parametrizací

$$\mathbf{e} = (\sin \varepsilon \sin(\psi + \Omega), \sin \varepsilon \cos(\psi + \Omega), \cos \varepsilon),$$

kde ε sklon rotační osy, Ω délka vzestupného uzlu a ψ precesní úhel, získáme

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\perp 1}}{I\omega} = \frac{T_\varepsilon}{I\omega} \quad (3.32)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_{\perp 2}}{I\omega} = \frac{T_\psi}{I\omega} \quad (3.33)$$

kde jednotkové vektory $\mathbf{e}_{\perp 1}$, $\mathbf{e}_{\perp 2}$ spolu s vektorem \mathbf{e} tvoří ortonormální bázi, ve které má moment \mathbf{T} souřadnice $(\mathbf{T}_\varepsilon, \mathbf{T}_\psi, \mathbf{T}_\omega)$, které způsobují změnu šikmosti, úhlu precese a úhlové frekvence. Je-li \mathbf{N} normálový vektor orbity, pak platí:

$$\mathbf{e}_{\perp 1} = \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{N}}{\sin \varepsilon}$$

$$\mathbf{e}_{\perp 2} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{N}}{\sin \varepsilon}$$

V limitních případech, kdy šikmost nabývá 0° nebo 180° , není precesní úhel ψ dobře definován.

¹¹Zobecnění pro nenulový posun těžiště je odvozeno v Scheeres & Gaskell (2008).

4 Vliv topografických útvarů na radiační moment síly

V této kapitole se zaměříme na moment síly, kterým působí na planetku topografické útvary. Užíváme přitom značení zavedené v kapitole 3. Popíšeme, jakým způsobem radiační moment vzniká a stanovíme problém, který budeme řešit numerickými metodami.

4.1 Modely YORP jevu

Doposud bylo vytvořeno množství modelů YORP jevu, analytických i numerických. Výstupem modelu pro daný objekt je moment síly, který na asteroid působí, a v důsledku předpovídaná změna úhlové frekvence a rotační osy. Tímto objektem mohou být tvary reálných steroidů, odvozené radarovým měřením či inverzí světelných křivek, nebo synteticky generované gaussovské sféry.

Tvar asteroidu je zpravidla popisován dvěma způsoby:

- i) **Rozvojem do kulových funkcí** $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, takže vzdálenost bodu na povrchu od středu tělesa r jakožto funkci sférických souřadnic ϑ, φ je možné vyjádřit

$$r(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l s_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

kde s_{lm} jsou (obecně komplexní) koeficienty rozvoje. Aby byl povrch jednoznačně definován, musí mít těleso „hvězdčovitý“ tvar, tedy průvodič jdoucí od středu tělesa kterýmkoliv směrem protne povrch právě v jednom bodě — ve vzdálenosti $r(\vartheta, \varphi)$. Velmi nepravidelná tělesa proto není možné uvedeným způsobem vyjádřit.

Tato reprezentace povrchu se s výhodou užívá v analytických modelech, neboť umožňuje počítat plošné integrály přes $\partial\Omega$ analyticky a nalézt tak explicitní závislost YORP jevu na parametrech. Problémem je však například vrhání stínu nekonvexitami, které se proto zpravidla zanedbává.

- ii) **Konečnou množinou trojúhelníkových plošek** $\{S_i\}_{i=1}^N$. Tento popis je proto vhodný pro numerické modely. Stávající modely určují povrchovou teplotu na ploškách řešením jednodimenzionální rovnice vedení tepla. Předpokladem těchto modelů je, že teplota se mění pouze ve směru *kolmém* ke každé plošce a laterální tok tepla je možné zanedbat; namísto řešení obecné, třidimenzionální rovnice vedení tepla v tělesa tak stačí pro každou plošku řešit rovnici jednodimenzionální s příslušnou okrajovou podmínkou.

Diskretizací povrchu vzniká numerická chyba, kterou je však možné omezit volbou dostatečně velkého rozlišení povrchu. Výhodou je možnost zahrnout vzájemné stínění plošek.

Stávající numerické modely se liší ve výchozích předpokladech nebo v metodách výpočtu. Závislost YORP jevu na tepelné vodivosti byla zkoumána např. v Čapek & Vokrouhlický (2004); Breiter et al. (2010a). Teplotní závislost materiálových parametrů uvažuje model v Čapek (2007). Vliv neizotropního modelu rozptylu, např. model Happkeho nebo Lommel-Seeligerův, zkoumali Statler (2009); Breiter et al. (2010b). V práci Steinberg & Sari (2011) je krom klasické limity nízké vodivosti uvažována i limita pro vysoké hodnoty. Nehomogenity hustoty asteroиду a tedy nenulový posun těžiště vůči geometrickému středu zahrnují Scheeres & Gaskell (2008); Lowry et al. (2014).

Model z prací Rozitis & Green (2011, 2012, 2013a) vychází z jednodimenzionální rovnice vedení tepla, avšak zahrnuje do celkové energetické bilance taktéž efekt globálního sebeohřevu a modeluje vliv anizotropie vyzařování v důsledku nerovnoměrné insolace hrubého povrchu¹² (*směřování* infračervené emise). Hrubost povrchu je reprezentována umístováním hemisférických kráterů na jinak rovný povrch. Ačkoliv jde o jednoduchou aproximaci skutečného povrchu, je v dobré shodě s infračerveným pozorováním měsíčního povrchu (Rozitis & Green, 2011). I v případě těchto kráterů se však počítá

¹²Jde v jistém smyslu o analogii opozičního efektu pro rozptýlené záření.

s jednodimenzionální aproximací a vedení tepla v laterálním směru se neuvažuje. Tabulka existujících modelů YORP jevu je uvedena v práci Rozitis & Green (2012).

Třídídimenzionální rovnici vedení tepla není potřeba řešit, pakliže uvažujeme pouze takové tvary asteroidu, jejichž rozměry asteroidu a útvarů na jeho povrchu jsou dostatečně velké. V takovém případě je možné laterální vedení tepla zanedbat.

4.2 Motivace problému

Pionýrskou prací, zabývající se právě vlivu malých útvarů, je Golubov & Krugly (2012). Na jednoduchém modelu demonstruje vznik YORP jevu na povrchovém útvaru a diskutuje jeho řádovou velikost. Na povrchu asteroidu uvažuje balvan ve tvaru zdi, jež je dostatečně vysoká na to, aby bylo možné modelovat jednodimenzionální vedení tepla ve zdi pouze v transversálním směru.

Při východu Slunce nad lokální horizont je zahřívána východní strana a teplo je vedeno dovnitř balvanu. Je-li tloušťka balvanu srovnatelná s hloubkou průniku tepelné vlny, teplo balvanem projde na západní stranu. Při západu Slunce je díky tomu zahřívána na vyšší teplotu než strana ranní při východu Slunce. Vyzářuje proto větší tok, a působí tak větší reakční silou.

Teplo balvanem prochází taktéž ze strany západní na stranu východní, a zahřívání balvanu při západu Slunce tak způsobí zvýšení teploty na ranní straně. Přesto však může vzniknout nenulový YORP efekt, neboť radiální síla je závislá na čtvrté mocnině teploty. Teplota na západní straně dosáhne vyšší absolutní hodnoty, a proto je reakční síla působící na západní stranu průměrně vyšší než síla působící na stranu východní. Vskutku, kdybychom uvažovali lineární závislost síly na teplotě, byl by výsledný střední moment nulový. Uvedený mechanismus je schematicky zakreslen na obrázku 9.



(a) Ráno je asteroid chladný, ranní strana je zahřívána, odpolední strana vyzářuje málo.

(b) Útvarem projde tepelná vlna, a tudíž je západní strana zahřívána na vyšší teplotu, než východní strana ráno.

Obrázek 9: Kvalitativní popis mechanismu YORP efektu vznikajícího na balvanu. Asteroid vyzářuje díky tepelné vodivosti povrchového útvaru více na západní straně než na straně východní, celková síla působící na asteroid dle zákona akce a reakce tedy směřuje na východ.

Střední moment síly, kterým působí jediný povrchový útvar v důsledku laterálního vedení tepla, budeme označovat jako *lokální* YORP jev, pro odlišení od momentu způsobeného globální asymetrií tělesa. Všimněme si, že směr vedení tepla v útvaru je dán pouze rotací asteroidu a nezávisí na útvaru samotném. Díky tomu je lokální YORP jev *aditivní*: momenty sil, kterými působí jednotlivé útvary, mají přibližně stejný směr a navzájem se sčítají. Přesto, že jediný útvar působí na planetku velice malým momentem síly, ve výsledku mohou všechny povrchové útvary vyvinout moment řádově větší.

4.3 Formulace problému

Cílem této práce je odhadnout řádovou velikost lokálního YORP jevu. Řešíme proto třídídimenzionální rovnici vedení tepla v povrchovém útvaru metodou konečných prvků a hledáme výsledný střední moment, kterým útvar působí. Následně spočteme celkový YORP jev působící na modelový asteroid a tento moment porovnáme s hodnotou globálního YORP jevu, naměřenou fotometricky či spočtenou existujícím modelem YORP jevu. Problém řešíme za následujících předpokladů:

- **Sluneční záření je jediným zdrojem energie.** Rovnici vedení tepla (3.19) řešíme s nulovou pravou stranou. Neuvažujeme například teplo vznikající z radioaktivních přeměn, apod.

- **Asteroid rotuje kolem nejkratší osy tenzoru setrvačnosti.** Asteroid rotuje stabilně, nejde o tumbler. Zanedbáváme vlivy impaktů těles a gravitačních slapů na rotaci.
- **Asteroid obíhá po kruhové trajektorii a má nulovou šikmost.** Není nutné uvažovat oběh asteroidu kolem Slunce ani sezónní změny insolační funkce. Problém má tak periodu jednoho synodického dne, spočtený moment působící na těleso stačí středovat přes tuto periodu. Pro trajektorie s nenulovou excentricitou je možné provést korekci změny úhlové frekvence ω vynásobením faktorem $(1 - e^2)^{-1/2}$ (Scheeres, 2007). Pro obecný případ nenulové šikmosti však velikost YORP efektu netriviálně mění v průběhu oběhu a podobnou korekci nelze provést.
- **Zkoumáme vliv jediného útvaru, nacházejícího se na rovníku asteroidu.** Jde o přirozenou a výhodnou volbu. Útvar na rovníku bude působit díky nejdelšímu ramenu největším momentem (ve srovnání s ostatními asteroidopisnými šířkami).
- **Topografický útvar je symetrický vůči vůči rovině místního poledníku.** Naším cílem je nalézt střední moment, kterým působí jediný útvar. Pokud by byl zkoumaný asymetrický vůči rovině poledníku, lokální YORP by závisel na konkrétní orientaci útvaru. Předpoklad symetrie zaručí, že spočteme právě moment způsobený laterálním vedením tepla. Obrázek 10 názorně ukazuje vznik nenulového momentu u asymetrických útvaru v Rubincamově aproximaci nulové vodivosti.



(a) Vektor síly svírá s normálou povrchu nepravý úhel, projekce do kolmého směru je proto menší.

(b) Síla působí právě v kolmém směru. Útvar bude kvůli většímu ramenu působit větším momentem síly.

Obrázek 10: Modelový případ demonstrující vznik radiačního momentu u nesymetrických útvarů.

Pokud bychom chtěli předpoklad symetrie opustit, můžeme výsledné momenty průměrovat přes několik různých orientací útvaru. Alternativně je možné spočítat moment pro danou orientaci, a to v obecném případě a v limitě nulové vodivosti. Ve druhém případě přitom vymizí složka způsobená vedením tepla, zatímco moment síly způsobený asymetrií se téměř nezmění (Breiter et al., 2010a).

- **Úhlové rozdělení záření rozptýleného na povrchu asteroidu i záření tepelného je lambertovské.** Jde o nejjednodušší model čili o rozumnou výchozí volbu pro výpočet YORP jevu. Díky stejné závislosti pro rozptyl i tepelnou emisi je snadné sčítat příspěvky od rozptýleného a tepelného záření, neboť elementární síly, kterými záření působí, jsou rovnoběžné. Tato volba je částečně ospravedlněna v Breiter & Vokrouhlický (2010); YORP efekt se pro vybrané tvary asteroidů zdá být takřka nezávislým na zvoleném modelu rozptylu.
- **Materiálové parametry jsou prostorově homogenní a nezávislé na teplotě.** Předpokládáme, že útvar je stejného složení, jako jeho podloží, a že tepelná vodivost K , hustota ρ a měrná tepelná kapacita C jsou konstanty.

4.4 Okrajové a počáteční podmínky

Naším cílem je určit rozložení teploty v povrchovém útvaru a jeho blízkém okolí, řešíme proto rovnici vedení tepla s příslušnými okrajovými podmínkami. Na povrchu zkoumané oblasti Ω musí být splněna podmínka energetické bilance (3.15). Protože neuvažujeme celý asteroid, je potřeba zvolenou část povrchu doplnit plochou jdoucí vnitřkem asteroidu. Hranici zkoumané oblasti Ω rozdělíme na dvě plochy $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Plocha Γ_1 představuje povrch asteroidu a zkoumaný topografický útvar. Tuto

povrchovou část doplníme plochou Γ_2 , a to tak, aby byla výsledná hranice uzavřená. V principu nezáleží na tvaru této plochy a můžeme ji zvolit libovolně. Pro jednoduchost volíme tvar odpovídající pěti stranám kvádrů o rozměrech $a \times a \times c$, povrch asteroidu potom představuje vrchní, šestou stranu.

Na ploše Γ_2 je potřeba specifikovat okrajové podmínky. Zvolíme-li délku a šířku oblasti řádově větší než je charakteristická velikost povrchového útvaru, můžeme předpokládat, že útvar nebude mít na hranici téměř žádný vliv. Zdejší teplota bude proto odpovídat řešení rovnice vedení tepla v *poloprostoru*, které (za určitých doplňujících předpokladů) je možné spočítat analyticky; tuto hodnotu označíme u_{theory} . Dostáváme tak Dirichletovu okrajovou podmínku

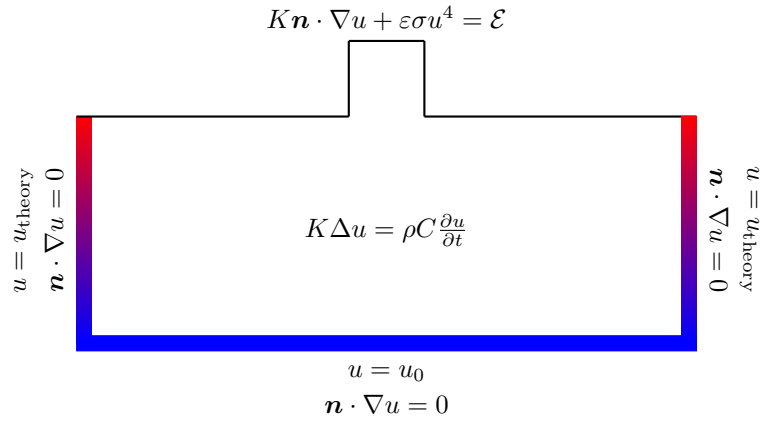
$$u = u_{\text{theory}} \quad \mathbf{r} \in \Gamma_2 . \quad (4.1)$$

Díky velké hloubce oblasti (ve srovnání s tepelnou hloubkou L_{wave}) víme, že teplota na spodní části hranice bude téměř konstantní a můžeme zde předpokládat podmínku $u = u_0$.

Dále je možné požadovat na hranici také Neumannovu okrajovou podmínku

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u = 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma_2 . \quad (4.2)$$

Interpretace se přitom liší pro spodní část a pro boční části hranice. Ve velké hloubce je teplota konstantní, a proto je $\nabla u = 0$. Na bočních stranách se sice teplota mění, ale pouze s hloubkou. Asymetrii, a tedy laterální tok tepla, který by mohl způsobit povrchový útvar, zanedbáváme. Vektor ∇u je tedy kolmý na lokální normálu \mathbf{n} , ergo $\mathbf{n} \cdot \nabla u = 0$.



Obrázek 11: Rovnice vedení tepla a okrajové podmínky pro všechny stěny uvažovaného modelu. Barevně je naznačena část, která má v průběhu výpočtu pevně danou teplotu (na teoretickou hodnotu), teplota uvnitř a na povrchu je počítána numericky.

Teplota je taktéž časově proměnná, a je proto nutné určit počáteční podmínku $u(\mathbf{r}, 0) = u^0(\mathbf{r})$. Inzolační funkce \mathcal{E} je periodická, a z vlastností rovnice vedení tepla tudíž vyplývá, že teplota $u(\mathbf{r}, t)$ bude konvergovat k jistému periodickému řešení, nezávislému na zvolené počáteční podmínce. Volba této podmínky má tak vliv pouze na rychlost konvergence. Počáteční podmínku proto volíme

$$u^0(\mathbf{r}) = u_{\text{theory}}(\mathbf{r}, 0) , \quad (4.3)$$

neboť analytické řešení představuje nejlepší odhad teploty, jaký máme k dispozici.

4.5 Limitní chování lokálního YORP jevu

Analytické řešení povrchové teploty, resp. výsledného momentu, pro obecný povrchový útvar neexistuje. Můžeme však nalézt alespoň chování YORP jevu v určitých limitních případech. Tyto situace zároveň mohou sloužit jako nutná podmínka správnosti numerického řešení.

Izotermální těleso

Je-li celý útvar zahřán na stejnou teplotu u , výsledný moment bude nulový. Důkaz tohoto tvrzení je možné provést pro útvar libovolného tvaru, symetrie zde není nutná. Pro izotermální těleso je možné vytknout čtvrtou mocninu teploty před integrál. V normálové aproximaci má elementární síla směr místní normály, využitím formule vektorové analýzy (Čapek, 2007)

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \times \mathbf{f} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{f} d\Omega ,$$

tak dostaneme identity pro výsledný moment \mathbf{T}

$$\mathbf{T} = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma u^4}{c} \oint_{\Gamma_1} \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Gamma = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma u^4}{c} \left(\int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{r} d\Omega - \oint_{\Gamma_2} \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Gamma \right) = 0 ,$$

kde jsme využili známou identitu $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ a zřejmý fakt, že se člen $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ na hranici Γ_2 odečte. Pro izotermální asteroid tedy zaniká YORP efekt.

Rubincamova aproximace

Pro symetrické útvary je střední hodnota momentu v limitě nulové vodivosti nulová. Nechť existuje rovina symetrie procházející středem asteroidu. Vzájemně sdružené body označíme \mathbf{r} , \mathbf{r}' . Potom platí $\langle \mathcal{E} \rangle(\mathbf{r}) = \langle \mathcal{E} \rangle(\mathbf{r}')$ a $\mathbf{r} \times \mathbf{n}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} \times \mathbf{n}(\mathbf{r}')$. Dostáváme

$$\langle \mathbf{T}^{K \rightarrow 0} \rangle = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma}{c} \oint_{\partial\Omega} \langle \mathcal{E} \rangle \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Gamma = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma}{c} \left(\oint_{\Gamma} \langle \mathcal{E} \rangle \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Gamma + \oint_{\Gamma'} \langle \mathcal{E} \rangle \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Gamma \right) = 0 .$$

Díky opačnému znaménku $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ se oba integrály odečtou. Užitím neaproximovaných vektorů \mathbf{h} bychom z důvodu symetrie dospěli ke stejnému výsledku. Všimněme si, že na rozdíl od izotermální limity, která je platí i pro globální YORP jev, vymizení momentu v Rubincamově aproximaci je odlišné od chování globálního YORP jevu, který zůstává v Rubincamově limitě zpravidla zachován (Breiter et al., 2010a).

Případ nulové, resp. velice nízké, tepelné vodivosti je důležitá podmínka pro kontrolu správnosti numerického modelu. V případě izotermálního tělesa neboli při uvážení vysoké vodivosti vyznačuje východní a západní strana útvaru stejně, dojde proto k vymizení momentu \mathbf{T} v každém okamžiku. Nulová střední hodnota $\langle \mathbf{T} \rangle$ je triviální důsledek. Oproti tomu, v případě nulové vodivosti je výsledný moment nenulový a kvůli velkým amplitudám teploty dosahuje vysokých hodnot. Tlak vymizí až po středování přes jednu periodu.

5 Rovnice vedení tepla

Tato kapitola je zaměřena na odvození teoretických vlastností stanoveného problému a vztahů, které budeme při numerickém řešení užívat. Zaměříme se na analytické řešení rovnice vedení tepla u_{theory} , které používáme v okrajových podmínkách stanoveného problému a které taktéž slouží ke kontrole numerického modelu a k odhadu diskretizační chyby. Vycházíme z prací Lagerros (1996), Čapek (2007).

5.1 Analytické řešení jednodimenzionální rovnice vedení tepla

Pro analytické odvození teploty u budeme předpokládat zjednodušený případ, kdy Slunce ozařuje (nekonečnou) rovinu $z = 0$. Díky translační symetrii této úlohy v rovinách $z = \text{konst}$ tedy hledáme teplotu u jako funkci pouze hloubky pod povrchem z a času t , třidimenzionální rovnice vedení tepla se tak redukuje na rovnici jednodimenzionální

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} , \quad (5.1)$$

kde $\alpha = K/\rho C$ je tepelná difuzivita. Dále požadujeme splnění dvou okrajových podmínek

$$-K \frac{\partial u}{\partial z}(0, t) + \varepsilon \sigma u^4(0, t) = \mathcal{E}(t) , \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(\infty, t) = 0 . \quad (5.3)$$

Podmínka (5.3) vylučuje nefyzikální řešení, kdy teplota roste nebo klesá s hloubkou z nade všechny meze.

Na povrch poloprostoru dopadá zářivý tok $\mathcal{E}(t)$ periodický v čase, bez újmy na obecnosti volme počáteční čas tak, aby

$$\mathcal{E}(t) = (1 - A_h) \Xi(\Phi \cos \omega t) , \quad (5.4)$$

kde $\Xi(x) \equiv xH(x)$, $H(x)$ značí Heavisideovu skokovou funkci. Funkce $\mathcal{E}(t)$ je zřejmě spojitá a po částech spojitě diferencovatelná, je tedy součtem své Fourierovy řady

$$\mathcal{E}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_n e^{in\omega t} . \quad (5.5)$$

Na základě toho hledáme stacionární řešení rovnice (5.1), které bude taktéž periodické v čase (s periodou $2\pi/\omega$). Teplota je zřejmě funkcí spojitě diferencovatelnou, můžeme tedy psát obecné řešení

$$u(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(z) e^{in\omega t} . \quad (5.6)$$

Dosazením do rovnice vedení tepla (5.1) a porovnáním koeficientů u $e^{in\omega t}$, dostaneme rovnici

$$u_n'' = \frac{in\omega}{\alpha} u_n , \quad (5.7)$$

kde čárka značí derivaci podle z . Obecné řešení rovnice se liší v závislosti na znaménku n

$$u_0(z) = a_0 + b_0 z \quad (5.8)$$

$$u_n(z) = a_n \exp\left(-\frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{n\omega}{\alpha}} z\right) + b_n \exp\left(\frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{n\omega}{\alpha}} z\right) \quad (5.9)$$

$$u_{-n}(z) = a_{-n} \exp\left(\frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{n\omega}{\alpha}} z\right) + b_{-n} \exp\left(-\frac{i-1}{2} \sqrt{\frac{n\omega}{\alpha}} z\right) \quad (5.10)$$

Nultý člen rozvoje je lineární funkcí z . Z okrajové podmínky $u'_n \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$ však vidíme, že koeficient b_0 musí být nulový. Člen u_0 je pak konstanta. Analogicky nahlédneme, že koeficienty b_n a b_{-n} musí být nulové, jinak by teplota s rostoucí hloubkou rostla (či klesala) nade všechny meze.

Zavedeme-li substituci

$$\beta_n \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \frac{n\omega}{\alpha}},$$

můžeme s úmluvou $\beta_n = \beta_{-n}$ psát obecné řešení pro fourierovský koeficient $u_n(z)$ ve tvaru

$$u_n(z) = a_n e^{-(1+i)\beta_n z} \quad (5.11)$$

$$u_{-n}(z) = a_{-n} e^{(i-1)\beta_n z} \quad (5.12)$$

Všimneme si, že pro funkci $u_0(z)$ formálně platí řešení (5.11) i (5.12).

Odtud lze nahlédnout fyzikální interpretaci konstanty β_n — jde o reciprokou hodnotu charakteristické vzdálenosti pro průnik tepelné vlny (resp. n -té složky Fourierova rozvoje) pod povrch tělesa.

Integrační konstanty a_n určíme z okrajové podmínky (5.2). Teplotu na povrchu ($z = 0$) můžeme po dosazení za u_n psát

$$u(0, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}. \quad (5.13)$$

V okrajové podmínce však vystupuje teplota ve čtvrté mocnině. Pro usnadnění výpočtu budeme předpokládat, že změny teploty jsou řádově menší než průměrná teplota, tj. $u_n \ll u_0, \forall n \neq 0$. Člen u^4 pak můžeme linearizovat

$$u^4 \approx u_0^4 + 4u_0^3 \sum_{n \neq 0} u_n e^{in\omega t}. \quad (5.14)$$

Spočteme derivaci teploty podle z ze vztahu (5.6)

$$\frac{\partial u}{\partial z}(0, t) = - \sum_{n>0} a_n \beta_n (1+i) e^{in\omega t} + \sum_{n>0} a_{-n} \beta_n (i-1) e^{-in\omega t}. \quad (5.15)$$

Vztahy (5.15), (5.14) a (5.5) dosadíme do okrajové podmínky (5.2)

$$-K \sum_{n>0} a_n \beta_n (1+i) e^{in\omega t} + K \sum_{n>0} a_{-n} \beta_n (i-1) e^{-in\omega t} + \varepsilon \sigma u_0^4 + 4\varepsilon \sigma u_0^3 \sum_{n \neq 0} a_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_n e^{in\omega t} \quad (5.16)$$

Porovnáme koeficienty u $e^{in\omega t}$. Díky vzájemné separaci koeficientů a_n dostáváme ihned řešení

$$u_0 = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{E}_0}{\varepsilon \sigma}}, \quad (5.17)$$

$$a_n = \frac{\mathcal{E}_n}{4\varepsilon \sigma u_0^3 + K(1+i)\beta_n}, \quad (5.18)$$

$$a_{-n} = \frac{\mathcal{E}_{-n}}{4\varepsilon \sigma u_0^3 + K(1-i)\beta_n}. \quad (5.19)$$

První rovnice udává průměrnou teplotu v asteroidu. Jak jsme již ukázali, tento člen Fourierova rozvoje je konstantní, průměrná teplota nezávisí na hloubce z .

Z výsledků (5.18) a (5.19) bychom mohli sestavit řešení pro $u(z, t)$, nebylo by však příliš přehledné. Pokusíme se nyní rovnici upravit do tvaru, ze které bude možné nahlédnout fyzikální význam. Nejprve definujeme bezrozměrné veličiny redukující počet nezávislých parametrů.

$$\Theta_n \equiv \frac{K \beta_n}{4\varepsilon \sigma u_0^3}, \quad (5.20)$$

$$\varphi_n \equiv -\arctg\left(\frac{\Theta_n}{\Theta_n + 1}\right) \operatorname{sgn} n. \quad (5.21)$$

Veličina Θ_n se označuje jako *tepelný parametr* (Lagerros, 1996)¹³ n -tého koeficientu Fourierova rozvoje. Faktor φ_n představuje fázový posun mezi povrchovou teplotou a insolační funkcí. Vzhledem k tomu, že obě veličiny jsou závislé na n skrz β_n , bude platit $\Theta_n = \Theta_{-n}$ a $\varphi_n = -\varphi_{-n}$.

Do rovnice (5.6) dosadíme spočtené hodnoty $u_n(z)$ a zlomek v (5.18), (5.19) rozšíříme komplexně sdruženým číslem. Po úpravě dostaneme

$$u(z, t) = u_0 + \sum_{n>0} \frac{\mathcal{E}_n}{4\epsilon\sigma u_0^3} \frac{(1-i)\Theta_n + 1}{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1} e^{-\beta_n z} e^{i(n\omega t - \beta_n z)} + \sum_{n>0} \frac{\mathcal{E}_{-n}}{4\epsilon\sigma u_0^3} \frac{(1+i)\Theta_n + 1}{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1} e^{-\beta_n z} e^{-i(n\omega t - \beta_n z)} \quad (5.22)$$

Fázový faktor φ_n jsme zavedli šikovně, neboť platí

$$\begin{aligned} \sin \varphi_n &= -\frac{\Theta_n \operatorname{sgn} n}{\sqrt{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1}}, \\ \cos \varphi_n &= \frac{\Theta_n + 1}{\sqrt{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1}}. \end{aligned}$$

Pozorujeme, že oba čitatele ve zlomcích v (5.22) lze přepsat

$$(1 \mp i)\Theta_n + 1 = \Theta_n + 1 \mp i\Theta_n = \sqrt{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1} (\cos \varphi_n \pm i \sin \varphi_n) = \sqrt{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1} e^{\pm i\varphi_n}.$$

Dosazením tak dostáváme výsledné řešení teploty $u(z, t)$:

$$u(z, t) = u_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{\mathcal{E}_n}{4\epsilon\sigma u_0^3} \frac{1}{\sqrt{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1}} e^{-\beta_n z} e^{i(n\omega t - \beta_n z \operatorname{sgn} n + \varphi_n)}. \quad (5.23)$$

Pro praktický výpočet teploty je nutné aproximovat Fourierovu řadu insolační funkce $\mathcal{E}(t)$ částečným součtem dostatečně vysokého řádu. Vzhledem k volbě počátečního času je insolační funkce sudá, tj. $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{-n}$, a Fourierova řada je tedy řadou kosinovou. V grafu 12a je zobrazena funkce $\Xi(\cos \omega t)$ a částečné součty příslušné Fourierovy řady do řádu 6, který má tvar¹⁴

$$\mathcal{E}(t) \approx (1 - A_h) \Phi \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t + \frac{2}{35\pi} \cos 6\omega t \right). \quad (5.24)$$

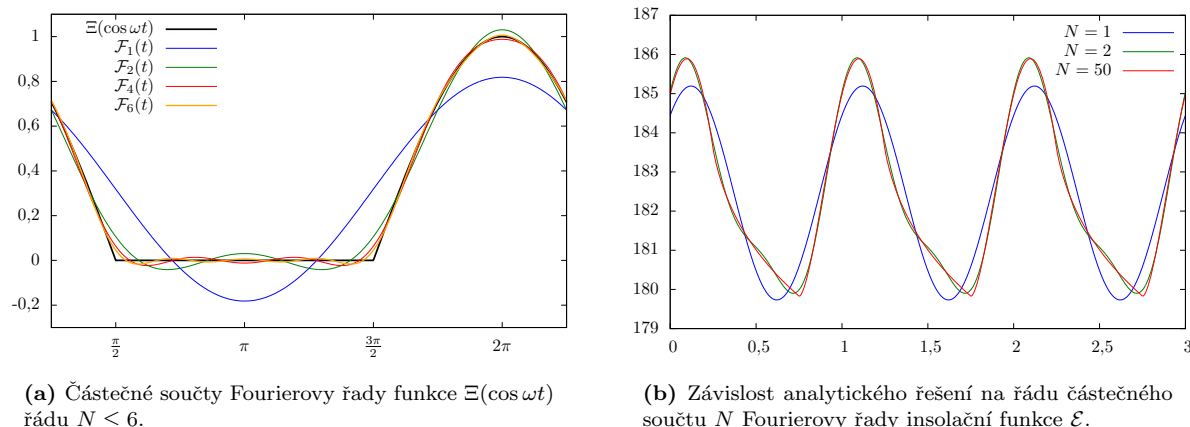
Nekonečná suma v řešení (5.23) se tak redukuje na součet konečného počtu členů,

$$u(z, t) = u_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2\mathcal{E}_n}{4\epsilon\sigma u_0^3} \frac{1}{\sqrt{2\Theta_n^2 + 2\Theta_n + 1}} e^{-\beta_n z} \cos(n\omega t - \beta_n z + \varphi_n). \quad (5.25)$$

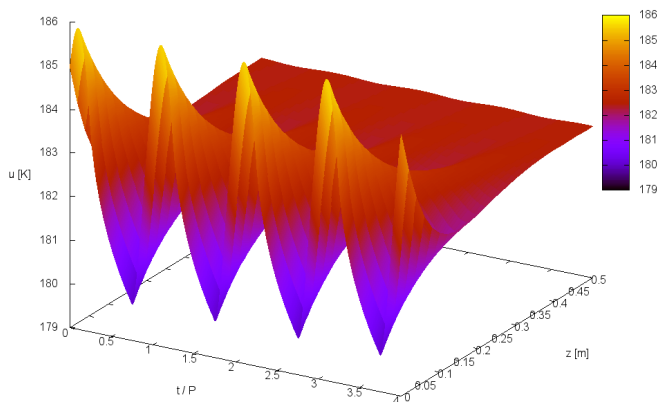
Pozorujeme, že n -tému členu kosinového rozvoje insolační funkce $\mathcal{E}(t)$ odpovídá kosinus v rozvoji povrchové teploty, který má stejnou periodu, ale je fázově posunut o φ_n . Obecná teplota v hloubce z je potom posunutá o fázi $(\varphi_n - \beta_n z)$. Řešení se skládá z lineární kombinace exponenciálně tlumených tepelných vln, což dobře odpovídá intuitivní představě. Graf analytického řešení povrchové teploty pro různé řády částečných součtů je vidět na obrázku 12b. Závislost teploty na čase t i na hloubce z je pak na obrázku 13.

¹³Tepelný parametr zavedený v Lagerros (1996) nebo také v Golubov & Krugly (2012) se od našeho liší o numerickou konstantu.

¹⁴Insolační koeficienty \mathcal{E}_n jsou tedy rovny polovinám koeficientů, které stojí před kosiny, neboť $e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = 2 \cos n\omega t$.



Obrázek 12: Konvergence částečných součtů Fourierovy řady insolační funkce a analytického řešení.



Obrázek 13: Graf analytického řešení v závislosti na čase t a na hloubce pod povrchem z . Je vidět, že (pro danou vodivost) již půl metru pod povrchem je teplota téměř konstantní.

Rubincamova limita nulové vodivosti

Zkusme nalézt zjednodušený tvar řešení v limitě nulové vodivosti, tj. $\lim_{K \rightarrow 0^+} u(z, t)$. Difuzivita je přímo úměrná vodivosti, $\alpha \propto K$, a proto platí úměrnosti $\beta_n \propto \alpha^{-\frac{1}{2}}$, $\Theta_n \propto \sqrt{K}$. Pro $K \rightarrow 0$ tedy i $\Theta_n \rightarrow 0$ a v důsledku i $\varphi_n \rightarrow 0$, neboť $\varphi_n \sim \Theta_n$, $\Theta_n \rightarrow 0$. Dosazením limitních hodnot do řešení (5.25) dostáváme:

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} u(z, t) = \begin{cases} u_0 & z > 0 \\ u_0 + \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{4\varepsilon\sigma u_0^3} & z = 0 \end{cases}$$

Jak jsme očekávali, teplota se mění pouze na povrchu. Všimněme si však, že povrchová teplota *není* rovná teplotě spočtené přímo z Rubincamovy aproximace (3.16). Vínou nese linearizace čtvrté mocniny teploty. Dosazením limitní hodnoty povrchové teploty do linearizovaného vztahu (5.14) dostaneme

$$u^4 \approx u_0 + 4u_0^3 \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_0}{4\varepsilon\sigma u_0^3} = \frac{\mathcal{E}}{\varepsilon\sigma},$$

Vidíme, že b_0 je nutně nulové, neboť pro situace $b_0 > 0$, resp. $b_0 < 0$ snadno ukážeme, že levá strana rovnice musí být větší, resp. menší než nula, a rovnice proto neplatí. Stejně jako v případě poloprostorové oblasti, průměrná teplota u_0 je konstanta, konkrétně

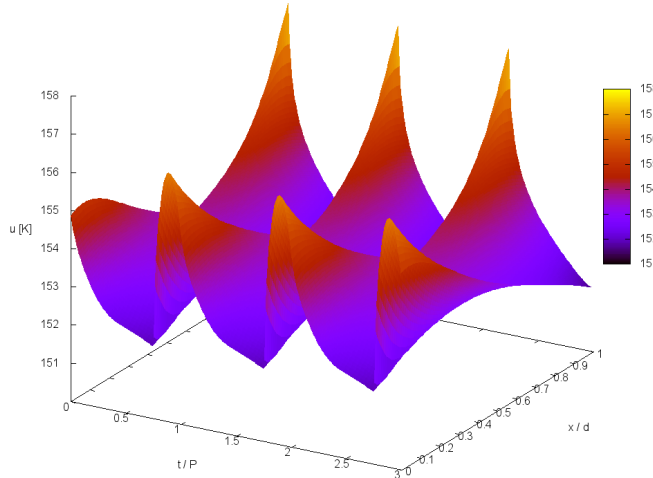
$$u_0(x) = \sqrt[4]{\frac{\mathcal{E}_0}{\varepsilon\sigma}}.$$

Střední hodnota síly $\langle \mathbf{f} \rangle$, kterým působí emitované záření na východní a západní stranu zdi, závisí na střední hodnotě čtvrté mocniny teploty. Z definice střední hodnoty

$$\langle u^4 \rangle(x) = \frac{1}{P} \int_0^P u^4(x, t) dt \approx u_0^4 + 4u_0^3 \frac{1}{P} \int_0^P \sum_{n \neq 0} u_n(x) e^{in\omega t} dt = u_0^4.$$

Vidíme, že střední hodnota čtvrté mocniny teploty nezávisí na souřadnici x , a je tedy stejná pro východní i západní stranu. Celková síla působící na zeď bude proto vždy nulová a lokální YORP jev zaniká.

Uvedená aproximace umožňuje nalézt přibližné analytické řešení teploty ve zdi (viz obrázek 15), avšak není možné ji použít pro výpočet výsledného momentu. Jinak řečeno, vznik YORP jevu na symetrických útvarech je způsoben právě nelineární závislostí síly na povrchové teplotě. Stejný výsledek očekáváme i pro obecný tvar povrchového útvaru. Zdůrazníme, že vymizení středního momentu je podmíněno symetrií útvaru.



Obrázek 15: Analytické řešení teploty $u(x, t)$ uvnitř jednodimenzionální zdi.

5.3 Parametrická závislost momentu síly

Povrchová teplota topografického útvaru obecně závisí na velkém množství parametrů. Zejména se jedná o parametry materiálové, jako jsou hustota ρ , měrná tepelná kapacita C , tepelná vodivost K ; vlastnosti povrchu určující tepelnou emisivitu ε a hemisférické albedo A_h ; parametry insolační funkce, tj. poloměr orbity R , rotační frekvence ω a samozřejmě geometrie povrchu. Parametry však nejsou zcela nezávislé, kupříkladu hustota a tepelná kapacita se v rovnici vedení tepla vyskytují pouze v součinu, není tedy nutné zkoumat závislost teploty na každém parametru samostatně. Problém je možné redukovat na několik nezávislých parametrů, které nyní nalezneme. Nejprve zavedeme užitečné veličiny, které nám umožní přejít do bezrozměrných souřadnic.

Subsolární teplota u_* , odpovídající teplotě na povrchu asteroidu při nulové tepelné vodivosti materiálu, je-li Slunce v zenitu, tj. $\cos \vartheta_{\odot} = 1$,

$$u_* \equiv \sqrt[4]{\frac{(1 - A_h)\Phi_{\odot}}{\varepsilon\sigma}}.$$

Tepelná hloubka L_{wave} , charakteristická vzdálenost tepelné vlny, šířící se dovnitř asteroidu,

$$L_{\text{wave}} \equiv \sqrt{\frac{2K}{\omega\rho C}}.$$

Odpovídá převrácené hodnotě koeficientu β_1 , zavedeném v kapitole 5.1. V některých pracích se z definice vynechává konstantní faktor $\sqrt{2}$, např. Lagerros (1996); Golubov & Krugly (2012). Význam tohoto faktoru vyplývá z analytického řešení.

Tepelný parametr Θ ,

$$\Theta \equiv \frac{K}{4\pi^{-\frac{3}{4}}L_{\text{wave}}\varepsilon\sigma u_*^3}.$$

Odpovídá tepelnému parametru Θ_1 , zavedenému v kapitole 5.1. Stejně jako u tepelné hloubky, faktor $4\pi^{-\frac{3}{4}}$ vyplývá z analytického řešení a ve zmíněných pracích se vynechává.

Rovnici vedení tepla (3.19) a příslušnou okrajovou podmínku (3.15) transformujeme do nových souřadnic

$$\varphi = \omega t, \quad \mathbf{r} = L_{\text{wave}}\boldsymbol{\xi}, \quad u = u_*\tau, \quad (5.32)$$

kde τ je bezrozměrná teplota. Dostáváme tak rovnici pro τ s okrajovou podmínkou

$$\frac{1}{2}\Delta_{\boldsymbol{\xi}}\tau - \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = 0 \quad (5.33)$$

$$4\pi^{-\frac{3}{4}}\Theta\mathbf{n} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\tau + \tau^4 = \cos \vartheta_{\odot}\mu \quad (5.34)$$

Index u gradientu, resp. Laplaceova operátoru specifikuje proměnnou, podle které derivujeme.

Vidíme, že řešení $\tau(\boldsymbol{\xi}, \varphi)$ je závislé pouze na tepelném parametru a skrytě také na „bezrozměrném tvaru“ povrchu, skrze požadavek splnění okrajové podmínky $\forall\boldsymbol{\xi}: L_{\text{wave}}\boldsymbol{\xi} \in \partial\Omega$. Pokud bychom tedy uvažovali jediný povrchový útvar — krychli o hraně ℓ , pak bude problém záviset na Θ a na ℓ/L_{wave} .

Z uvedených parametrů jsou tedy nezávislé pouze dva, uvažujeme-li pouze izotropní škálovací transformace geometrie¹⁵. Tento závěr platí za předpokladu, že je v dopadajícím toku zahrnuta pouze insolační část \mathcal{E}_{\odot} , neuvažujeme tepelné \mathcal{E}_{rad} a rozptýlené \mathcal{E}_{sc} záření od okolních částí povrchu. Z definičních vztahů (3.24), (3.25) vidíme, že při započítání i těchto příspěvků se objeví další nezávislé parametry, a to hemisférické albedo A_h (původně zahrnuté v subsolární teplotě u_*) a albedo v infračervené oblasti A_{IR} .

Řešení v původních proměnných dostaneme prostým dosazením

$$u(\mathbf{r}, t) = u_*\tau\left(L_{\text{wave}}\boldsymbol{\xi}, \frac{\varphi}{\omega}\right). \quad (5.35)$$

V principu teplota u závisí krom zmíněných nezávislých parametrů také na u_* , L_{wave} a ω . Nicméně, zatímco závislost na Θ a na geometrii může být značně netriviální, závislost na transformačních proměnných je explicitně vidět z rovnice (5.35). Navíc, zajímá nás pouze střední hodnota celkové síly, kterou útvar působí. Dojde tak k integraci prostorové i časové závislosti (výsledný moment není závislý na zvolených souřadnicích). Celkový střední moment síly proto bude z transformačních veličin závislý pouze na u_* , a to ve čtvrté mocnině.

¹⁵Při obecné transformaci je samozřejmě volných parametrů více, např. délka, výška, šířka, sklon, ...

5.4 Škálovací transformace oblasti

Důležitým faktorem ovlivňujícím sílu, kterou útvar působí, je velikost, resp. rozměry útvaru. Je-li tvar povrchu popsán hranicí $\partial\mathcal{O}$ v bezrozměrných souřadnicích ζ_j , pak chceme znát sílu, kterou působí útvar daný hranicí

$$\partial\Omega = \mathbf{S}\partial\mathcal{O} = \{\mathbf{r} \equiv \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\zeta}; \boldsymbol{\zeta} \in \partial\mathcal{O}\} ,$$

kde \mathbf{S} je škálovací matice

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{pmatrix} .$$

Namísto provádění výpočtů s různými hranicemi $\partial\Omega$ je výhodné mít hranici neměnnou a změny rozměrů reprezentovat právě škálovací maticí \mathbf{S} . Použijeme-li transformační vztahy¹⁶

$$x_j = S_j \zeta_j , \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{1}{S_j} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} , \quad (5.37)$$

dostáváme rovnici vedení tepla a okrajovou podmínku v bezrozměrných souřadnicích ζ :

$$K \sum_{j=1}^3 \frac{1}{S_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta_j^2} - \rho C \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (5.38)$$

$$K \sum_{j=1}^3 \frac{n_j}{S_j} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} + \varepsilon \sigma u^4 = \mathcal{E} \quad (5.39)$$

kde n_j je j -tá komponenta vnější normály. Zpravidla nás zajímá závislost na absolutní velikosti objektu, případně na jeho výšce. Škálovací matice je potom tvaru:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \cdot h \end{pmatrix}$$

Případné zobecnění pro libovolnou lineární transformaci oblasti $\partial\mathcal{O}$ je přímočaré.

¹⁶V rovnici (5.37) nesčítáme přes index j .

6 Metoda konečných prvků

Nyní popíšeme metodu numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic a odvodíme slabou formulaci rovnice vedení tepla s příslušnými okrajovými podmínkami, zavedenými v kapitole 3.3. Vycházíme z Langtangen (2003), odkud jsme též převzali značení a terminologii.

6.1 Základní principy

Základní myšlenkou metody konečných prvků je aproximace hledané funkce konečnou lineární kombinací předem definovaných bázevých funkcí $N_i(\mathbf{r})$. Je-li funkce u (v našem případě hledaná teplota) závislá na prostorových souřadnicích \mathbf{r} a na čase t , aproximujeme ji rozvojem

$$u(\mathbf{r}, t) \approx \hat{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^M u_i(t) N_i(\mathbf{r}) . \quad (6.1)$$

Problém nalezení funkce $u(\mathbf{r}, t)$ se redukuje na problém nalezení konečně mnoha konstant (vůči \mathbf{r}) $u_i(t)$.

Mějme diferenciální operátor $\mathcal{L}(u)$, hledáme řešení rovnice

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad \mathbf{r} \in \Omega . \quad (6.2)$$

Aproximací funkce u dle vztahu (6.1) však obecně dostaneme

$$\mathcal{L}(\hat{u}) \neq 0 \quad \mathbf{r} \in \Omega .$$

Žádná lineární kombinace \hat{u} nemusí řešit rovnici (6.2). Hledáme proto takovou funkci \hat{u} , která *minimalizuje* hodnotu $|\mathcal{L}(\hat{u})|$ v prostoru všech lineárních kombinací bázevých funkcí. Tato hodnota se nazývá *residuum* operátoru $\mathcal{L}(u)$. Očekáváme, že minimalizací $\mathcal{L}(\hat{u})$ zároveň dostaneme funkci, která (v určitém smyslu) dobře aproximuje hledanou funkci u .

Při hledání funkce \hat{u} chápeme residuum jako funkci koeficientů $u_i(t)$ a prostorových proměnných \mathbf{r} . Volbou hodnot $u_i(t)$ tedy dostaneme obecně nekonstantní funkci proměnných \mathbf{r} . Abychom mohli mluvit o minimalizaci residua, je nutno nejprve určit normu, resp. specifikovat, v jakém smyslu residuum minimalizujeme.

Obvyklou metodou je hledat minimum určitého prostorového průměru funkce \hat{u} . Jsou-li W_j dané váhové funkce, hledáme řešení \hat{u} takové, že řeší soustavu rovnic

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_j \, d\Omega = 0 \quad \forall j = 1, \dots, M . \quad (6.3)$$

Pro obecné váhové funkce W_j mluvíme o metodě vážených residuí. Váhové funkce je možné volit různým způsobem, aby dobře vystihovaly zkoumaný problém. Speciální volbu $W_j = N_j$, tedy

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) N_j \, d\Omega = 0 \quad \forall j = 1, \dots, M , \quad (6.4)$$

nazýváme Galerkinovou metodou. Jinou možností je například volba $W_j = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{[i]})$, tedy minimalizace residua v M uzlových bodech, mluvíme o kolokační metodě.

Lze ukázat, že řešení \hat{u} soustavy rovnic (6.4) je nejlepší aproximací funkce u mezi všemi funkcemi v lineárním obalu funkcí $N_i(\mathbf{r})$, což je bezpochyby užitečná vlastnost Galerkinovy metody. Naším cílem je nyní převést tuto soustavu na soustavu tvaru

$$a(\hat{u}, N_j) = b(N_j) , \quad (6.5)$$

kde $a(\cdot, \cdot)$, resp. $b(\cdot)$ je bilineární, resp. lineární forma. Toho lze samozřejmě dosáhnout pouze při znalosti operátoru $\mathcal{L}(\hat{u})$. Zdůrazněme, že tento operátor musí být lineární, aby bylo možné dostat rovnici ve tvaru (6.5). Pro obecně nelineární operátor je nutné buď provést linearizaci nebo řešit nelineární problém iterační metodou.

Konečně, dosadíme z definice za \hat{u} , čímž dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^M a(N_i, N_j) u_i = b(N_j) . \quad (6.6)$$

Zavedeme-li matici $\mathbf{A} = a(N_i, N_j)$, vektor $\mathbf{b} = b(N_i)$ a vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_M)^\top$, dostaneme maticový problém

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (6.7)$$

pro neznámou \mathbf{u} . Řešení je možné hledat různými numerickými metodami, například nalezením inverzní matice \mathbf{A}^{-1} , Gaussovou eliminační metodou nebo metodou sdružených gradientů.

Picardova iterační metoda

Pokud je diferenciální operátor $\mathcal{L}(u)$ nelineární, pak dostaneme nelineární problém

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} . \quad (6.8)$$

Tento problém je možné řešit Picardovou metodou postupných iterací. Namísto nalezení řešení \mathbf{u} hledáme aproximativní posloupnost \mathbf{u}_k , která k vektoru \mathbf{u} konverguje. V $(k+1)$ iteraci řešíme rovnici

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{b} \quad (6.9)$$

s neznámou \mathbf{u}_{k+1} . Předpokládáme, že vektor \mathbf{u}_k již máme spočten z předchozí iterace, jde proto o lineární rovnici, kterou je možné řešit některou z výše zmíněných metod. Uvedený postup vyžaduje znalost počátečního vektoru \mathbf{u}_0 . Tuto hodnotu volíme dle konkrétního problému; pokud nemáme žádný odhad vektoru \mathbf{u} , přirozenou volbou je $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Iterujeme tak dlouho, dokud neplatí

$$\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\| < \varepsilon \quad (6.10)$$

pro pevně zvolené ε .

Konvergence posloupnosti vektorů \mathbf{u}_k není nijak zaručena. V případě, že by byla tato posloupnost divergentní, je možné *relaxovat* iterační metodu. Řešíme rovnici

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{u}_* = \mathbf{b} \quad (6.11)$$

s neznámou \mathbf{u}_* , následně nalezneme vektor \mathbf{u}_{k+1} jako lineární kombinaci spočteného řešení \mathbf{u}_* a řešení z předchozí iterace

$$\mathbf{u}_{k+1} = \omega \mathbf{u}_* + (1 - \omega) \mathbf{u}_k , \quad (6.12)$$

kde ω je relaxační parametr. Volba $\omega = 1$ vede k původnímu, nerelaxovanému řešení. Vhodnou volbou relaxačního parametru je možné předejít divergenci řešení. Je třeba mít na paměti, že pro malé hodnoty $\omega \ll 1$ je konvergence metody zpravidla velice pomalá.

6.2 Okrajové podmínky

Řešení parciální diferenciální rovnice (6.2) je obecně nejednoznačné. Pro jednoznačnost je nutno specifikovat okrajové podmínky problému, případně počáteční podmínky pro časově závislé problémy. Nechť tedy existují plochy Γ_i , $i = 1, \dots, n$ takové, že

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^n \Gamma_k &= \partial\Omega , \\ \Gamma_k \cap \Gamma_l &= \emptyset \quad k \neq l . \end{aligned}$$

Okrajové podmínky můžeme potom vyjádřit analogicky k rovnici (6.2). Mějme diferenciální operátory $\mathcal{S}_k(u)$, požadujeme řešení u takové, že

$$\mathcal{S}_k(u) = 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma_k . \quad (6.13)$$

Metodu vážených residuí můžeme upravit doplněním vážených průměrů přes hranici oblasti Ω . Hledáme řešení soustavy rovnic

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_j d\Omega + \sum_{k=1}^n \oint_{\Gamma_k} \mathcal{S}_k(\hat{u}) W_j^k d\Gamma = 0 , \quad (6.14)$$

kde W_j^k jsou váhové funkce pro k -tou okrajovou podmínku.

Otázkou zůstává vztah váhových funkcí W_j , W_j^k a a bázových funkcí N_j . Zpravidla volíme $N_j = W_j = \pm W_j^k$, neboť tato volba je výhodná pro eliminaci Neumannovy okrajové podmínky z výsledné rovnice (viz kapitolu 6.5).

6.3 Časová závislost

Doposud jsme pracovali pouze s prostorovými proměnnými \mathbf{r} , čas hrál roli parametru. Teoreticky je možné pracovat s časem t analogicky jako s prostorem, tedy hledat řešení ve tvaru

$$\hat{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^M u_i N_i(\mathbf{r}, t) ,$$

kde N_i jsou bázové funkce ve čtyřrozměrném prostoročasu. Tato metoda však nemá žádné praktické výhody. Prostorové bázové funkce je možné výhodně volit tak, aby vystihovaly geometrii zkoumané oblasti Ω , zpravidla nemá význam volit různou diskretizaci času v různých bodech prostoru.

Místo toho řešíme dynamický vývoj metodou konečných diferencí, konkrétně implicitní Eulerovou metodou. Zvolíme pevnou (malou) hodnotu časového kroku Δt a spojitou závislost na $\hat{u}(t)$ nahradíme za posloupnost $\hat{u}^n = \hat{u}(n\Delta t)$. Hodnota \hat{u}^0 potom odpovídá počáteční podmínce, \hat{u}^1 je řešení v čase Δt atd. Parciální derivaci \hat{u} podle času aproximujeme podílem diferencí

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \approx \frac{\hat{u}^n - \hat{u}^{n-1}}{\Delta t} \quad (6.15)$$

V čase n řešíme rovnici (6.14) pro neznámou funkci \hat{u} , přičemž předchozí hodnotu \hat{u}^{n-1} (případně \hat{u}^{n-2} při řešení rovnice druhého řádu v čase, atd.) již známe z předchozího kroku, resp. z počáteční podmínky.

Aproximací derivace vzniká v každém časovém kroku kumulativní chyba velikosti $\mathcal{O}(\Delta t)$, proto se Eulerově metodě říká také metoda prvního řádu. Volbou nižší hodnoty kroku Δt tedy dosáhneme nižší chyby řešení. Prakticky není možné volit Δt libovolně malé, neboť pro velmi nízké hodnoty začnou hrát roli zaokrouhlovací chyby při aritmetických operacích v počítači.

6.4 Diskretizace třírozměrného prostoru

Vlastnosti metody konečných prvků do značné míry závisí na volbě bázových funkcí N_i . Zpravidla volíme po částech polynomiální funkce. Shrňme, co bychom od bázových funkcí očekávali a proč jsou právě polynomiální funkce výhodné.

Množina bázových funkcí musí být **lineárně nezávislá**, aby bylo možné funkci \hat{u} jednoznačně určit pomocí koeficientů u_i .

Praktickým požadavkem na bázové funkce je **malý nosič**. Pokud bude každá z bázových funkcí nenulová pouze v malé prostorové oblasti, potom budou překryvové integrály bázových funkcí

$$\int N_i N_j d\Omega , \quad \int N_i \nabla N_j d\Omega , \quad \int \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \dots$$

nulové pro většinu i, j . Matice $\mathbf{A} = a(N_i, N_j)$ bude potom řídká, a při použití vhodné metody řešení (např. metody sdružených gradientů) se tak značně zjednoduší a zejména zrychlí numerické řešení lineárního systému (6.7).

Polynomiální funkce umožňují **jednoduché numerické výpočty**. Výpočet maticových prvků $a(N_i, N_j)$ spočívá v numerickém výpočtu plošných a objemových integrálů. Je proto vhodné volit báze funkce tak, aby bylo možné rychle vyčíslit funkční hodnoty funkcí N_i a ∇N_i , tedy minimalizovat počet nezbytných aritmetických operací. Z tohoto důvodu je nevhodné používat funkce jako $\sin x$ apod.

Báze funkce by měly odpovídat konkrétní **geometrii problému**. Obecně nepravidelná oblast Ω je reprezentována trojúhelníkovými ploškami, tvořící její hranici $\partial\Omega$. Pro řešení problému metodou konečných prvků je nutné diskretizovat i vnitřek oblasti. Provedeme proto *tetrahedronizaci* oblasti Ω — rozložíme ji na čtyřstěny, a to tak, že trojúhelníkové plošky představují stěny hraničních čtyřstěňů. Dostaneme množinu uzlových bodů $\mathbf{r}^{[i]}$ v oblasti Ω (a na její hranici), které tvoří vrcholy čtyřstěňů. Je výhodné volit báze funkce tak, aby funkce $N_i(\mathbf{r})$ nabývala v uzlovém bodě $\mathbf{r}^{[i]}$ hodnotu 1 a aby v ostatních bodech nabývala hodnotu 0. Potom bude totiž hodnota funkce \hat{u} v uzlovém bodě $\mathbf{r}^{[i]}$ rovna koeficientu u_i .

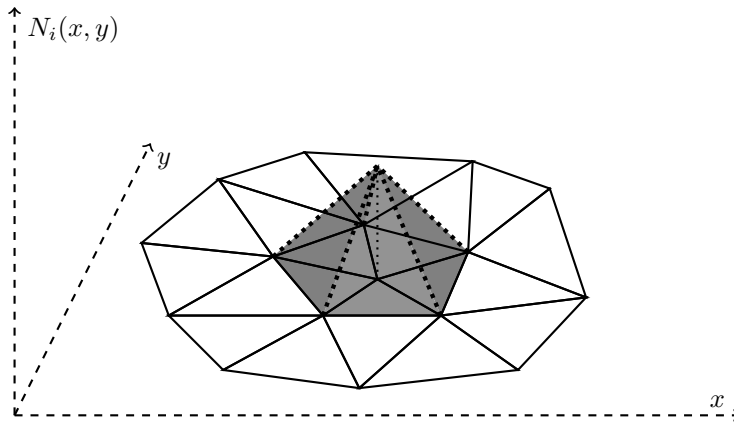
Po částech lineární báze funkce

Z důvodů uvedených výše se za báze funkce volí obvykle funkce po částech polynomiální, které mají navíc fixované hodnoty (případně i hodnoty derivací) v uzlových bodech $\mathbf{r}^{[i]}$. Jako typický příklad uvedeme po částech lineární báze funkce, lagrangeovské P1-prvky, které splňují (Hecht, 2012)

$$N_i(x, y, z) = a_i^j + b_i^j x + c_i^j y + d_i^j z \quad \text{pro } (x, y, z) \in T_j$$

$$N_i(\mathbf{r}^{[j]}) = \delta_{ij}$$

kde δ_{ij} Kroneckerovo delta. Funkce N_i tedy nabývá 1 v bodě $\mathbf{r}^{[i]}$, 0 ve všech ostatních uzlových bodech a ve čtyřstěnech, kterým patří vrchol $\mathbf{r}^{[i]}$, je hodnota N_i lineárně interpolována. Jedna z těchto báze funkcí ve dvourozměrném prostoru je znázorněna na obrázku 16 (třírozměrný prostor by byl náročnější na vizualizaci).



Obrázek 16: Jedna z po částech lineárních báze funkcí na dvojrozměrném prostoru.

Metoda konečných prvků se s výhodou využívá právě v nepravidelných oblastech, jejichž hranici je možné jednoduše rozložit na trojúhelníkové plošky. Navíc je možné volit objemy čtyřstěňů menší v oblastech, kde dochází k velkým oscilacím řešení u a naopak v místech, kde se u příliš nemění, lze volit objem čtyřstěňů větší. Tímto způsobem je možné omezit chybu diskretizace a přitom zachovat „rozumný“ výpočetní čas.

6.5 Slabá formulace rovnice vedení tepla

V předchozích odstavcích byly popsány obecné principy řešení problému metodou konečných prvků. Nyní přistoupíme ke konkrétnímu problému, tedy k řešení rovnice vedení tepla s okrajovými podmínkami, jak bylo popsáno v kapitole 4.4.

Zavedeme diferenciální operátor příslušející rovnici vedení tepla

$$\mathcal{L}(u) = \nabla \cdot (K \nabla u) - \rho C \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6.16)$$

a operátory pro jednotlivých okrajových podmínkách

$$\mathcal{S}_1(u) = K \mathbf{n} \cdot \nabla u + \varepsilon \sigma u^4 - \mathcal{E} , \quad (6.17)$$

$$\mathcal{S}_2(u) = K \mathbf{n} \cdot \nabla u . \quad (6.18)$$

Přeformulováním rovnice a okrajových podmínek pomocí zavedených operátorů dostáváme soustavu rovnic:

$$\mathcal{L}(u) = 0 \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (6.19)$$

$$\mathcal{S}_1(u) = 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma_1 \quad (6.20)$$

$$\mathcal{S}_2(u) = 0 \quad \mathbf{r} \in \Gamma_2 \quad (6.21)$$

Soustavu řešíme metodou vážených residuí, hledáme tedy \hat{u} takové, že

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \mathcal{S}_1(\hat{u}) W_j^1 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \mathcal{S}_2(\hat{u}) W_j^2 \, d\Gamma = 0 \quad j = 1, \dots, M . \quad (6.22)$$

Naším cílem je nyní převést tuto rovnici do tvaru (6.5). K tomu bude nutné udělat několik úprav. Nejprve upravíme první člen v rovnici

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\hat{u}) W_j \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u} W_j) \, d\Omega - \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla W_j \, d\Omega - \int_{\Omega} \rho C \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} W_j \, d\Omega . \quad (6.23)$$

Nyní aplikujeme Gaussovu větu vektorové analýzy

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla \hat{u} W_j) \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} K \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{u} W_j \, d\Gamma , \quad (6.24)$$

Všimneme si výrazu $K \mathbf{n} \cdot \nabla u$, který se vyskytuje v okrajových podmínkách (6.17) – (6.18). Z tohoto důvodu zvolíme $W_j = -W_j^1 = -W_j^2 = N_j$. Protože $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, z aditivity integrálu plyne

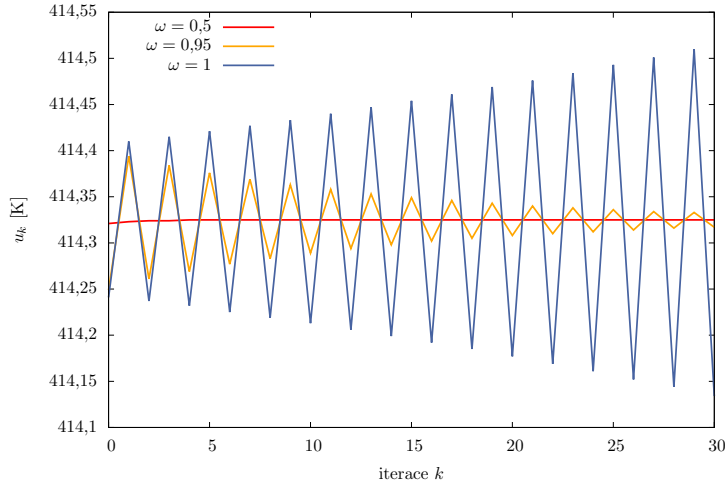
$$\oint_{\partial\Omega} K \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{u} N_j \, d\Gamma = \int_{\Gamma_1} K \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{u} N_j \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} K \mathbf{n} \cdot \nabla \hat{u} N_j \, d\Gamma \quad (6.25)$$

a Neumannova okrajová podmínka z rovnice (6.22) zcela vymizí.

Dosazením volby váhových funkcí a zmíněných úprav dostáváme rovnici

$$\int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_j \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho C \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} N_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\varepsilon \sigma \hat{u}^4 - \mathcal{E}) N_j \, d\Gamma = 0 . \quad (6.26)$$

Pozorujeme, že z původní rovnice druhého řádu dostáváme rovnici pouze prvního řádu.



Obrázek 17: Povrchová teplota spočtená v k -té iteraci pro tepelnou vodivost $K = 0,004$ W/m/K. Nerelaxovaná Picardova metoda vede pro nízké hodnoty vodivosti k divergenci posloupnosti u_k , konvergence dosáhneme volbou vhodné hodnoty relaxačního parametru ω .

V rovnici (6.26) se vyskytují dva členy, které je nutno vhodnou aproximací eliminovat, a to časová derivace $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$ a nelineární člen \hat{u}^4 . Metodu pro řešení časové závislosti jsme popisovali v kapitole 6.3 — časovou derivaci nahradíme podílem diferencí

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \approx \frac{\hat{u} - \hat{u}^0}{\Delta t}, \quad (6.27)$$

kde \hat{u}^0 značí řešení v předchozím časovém kroku, resp. počáteční podmínku, a Δt časový krok. Čtvrtou mocninu teploty bychom mohli linearizovat stejným způsobem jako při odvozování analytického řešení

$$\hat{u}^4 \approx \hat{u}_0^4 + 4\hat{u}_0^3(\hat{u} - \hat{u}_0).$$

Vznik lokálního YORP jevu je však podmíněn nelinearitou (viz kapitolu 5.2), použití výše uvedeného vztahu je tedy nepřijatelné. Namísto toho užijeme metodu postupných iterací, popsanou v podkapitole 6.1. Provedeme semi-linearizaci

$$\hat{u}^4 \approx \hat{u}\hat{v}^3, \quad (6.28)$$

kde \hat{v} označuje řešení z předchozí iterace. Výslednou rovnici rozdělíme na bilineární část a na část lineární. Dostáváme

$$\begin{aligned} a(\hat{u}, N_j) &= \int_{\Omega} K \nabla \hat{u} \cdot \nabla N_j \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\rho C}{\Delta t} \hat{u} N_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \varepsilon \sigma \hat{u} \hat{v}^3 N_j \, d\Gamma, \\ b(N_j) &= \int_{\Omega} \rho C \frac{\hat{u}^0}{\Delta t} N_j \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} \varepsilon N_j \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Došli jsme k rovnici ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (6.30)$$

kde \mathbf{u} je neznámá. Vektor \mathbf{v} byl spočten v předchozí iteraci, rovnice je tedy lineární.

Kvůli problémům s konvergencí volíme relaxační parametr $\omega = 0,6$. Tato hodnota zaručuje konvergenci pro všechny zkoumané hodnoty parametrů, zároveň ale není zbytečně malá. Iterační proces je ukončen po splnění podmínky (6.10), zpravidla je potřeba 2 až 8 iterací, v závislosti na změně

teploty mezi časovými kroky. Při malých změnách teploty je $\hat{u} \approx \hat{u}^0$, a počáteční hodnota $\hat{v} = \hat{u}_0$ je proto velice blízká řešení. V grafu 17 vidíme konkrétní průběh iteračního procesu v daném časovém kroku. Zatímco nerelaxovaná posloupnost \mathbf{u}_k diverguje, vhodná volba relaxačního parametru způsobí konvergenci.

Zbývá nám zakomponovat Dirichletovu okrajovou podmínku, tedy

$$\hat{u} = I_h u_{\text{theory}} \quad \mathbf{r} \in \Gamma_2, \quad (6.31)$$

kde $I_h f \equiv \sum_{j=1}^M f(\mathbf{r}^{[j]}) N_j$ je lineární interpolant funkce f . Tuto podmínku splníme následovně: pro všechny uzlové body $\mathbf{r}^{[j]} \in \Gamma_2$ položíme

$$\begin{aligned} a(N_j, N_j) &= \text{TGV}, \\ b(N_j) &= I_h u_{\text{theory}} \cdot \text{TGV}, \end{aligned}$$

kde TGV je velmi vysoká hodnota (*très grande valeur*), ve **FreeFem++** rovna 10^{30} . TGV je ve výpočtu efektivně nekonečno, všechny nediagonální prvky matice $a(N_i, N_j)$ jsou proto ve výpočtu hodnoty u_i zanedbatelné, a výsledná hodnota tak bude právě $I_h u_{\text{theory}}$ (Hecht, 2012).

7 Numerický model pro jednoduché útvary

V této kapitole popíšeme výsledky našeho modelu. Model umožňuje spočítat lokální YORP jev pro libovolnou geometrii povrchového útvaru, na idealizovaném příkladu vysoké zdi tak můžeme naše výsledky porovnat s existujícím jednodimenzionálním modelem (Golubov & Krugly, 2012). Numerický model zahrnuje stíny vrhané útvarem, globální sebeohřev (od tepelně emitovaného i rozptýleného záření) a vliv absorpce záření na směr reakční síly.

Různé tvary balvanů vytváříme pomocí programu `Blender 2.62`, který je volně ke stažení¹⁷. Získáme tak hranici uvažované oblasti složenou z trojúhelníkových plošek. Následně vytvoříme třídimenzionální síť programem `TetGen` (Si, 2006).

Pro danou geometrii povrchového útvaru řešíme třídídimenzionální rovnici vedení tepla s příslušnými okrajovými podmínkami pomocí programu `FreeFem++` (viz dodatek B). Na základě spočteného rozložení teploty na povrchu útvaru určíme střední hodnotu momentu síly, kterým útvar působí na asteroid. Výpočtem střední hodnoty pro různé parametry problému zkoumáme chování lokálního YORP jevu.

Výpočty byly prováděny na výpočetním clusteru hilda¹⁸. Výpočet střední hodnoty momentu síly pro danou sadu parametrů trvá 20 až 40 hodin v závislosti na použitém modelu. Celkem bylo provedeno kolem 500 výpočtů pro různé tvary balvanů a různé modely, což odpovídá přibližně 500 dní výpočetního času.

7.1 Diskretizace a její vliv na numerické řešení

Při řešení problému metodou konečných prvků je nutné diskretizovat prostor i čas. Tím nutně dochází k numerickým chybám. S volbou jemnější diskretizace bychom měli dostat přesnější výsledky. Cílem této podkapitoly je zjistit, jak závisí chyba numerického řešení na volbě diskretizace prostoru a času.

Prostorová diskretizace

V kapitole 3 byly odvozeny vztahy pro radiační sílu, moment síly a zářivé toky, v integrálním nebo v diferenciálním tvaru. Pro numerické výpočty je nutné provést formální záměnu¹⁹

$$dS \rightarrow S_i, \quad d\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f}_i, \quad \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{r})dS \rightarrow \sum_{i=1}^N \varphi(\mathbf{r}_i)S_i,$$

kde dS , resp. S_i je plošný element, resp. i -tá ploška povrchu, $d\mathbf{f}$, resp. \mathbf{f}_i je elementární síla, resp. síla působící na i -tou plošku, a \mathbf{r}_i je těžiště plošky S_i . Integraci přes povrch tedy převedeme na sumaci přes konečný počet plošek.

Všechny funkce závislé na prostorových proměnných \mathbf{r} , jako normála \mathbf{n} , průměrné emisní vektory \mathbf{h} , povrchová teplota u , stínící a viditelnostní funkce μ , ν apod. se tak redukuje na konečný počet funkčních hodnot v bodech \mathbf{r}_i , náležících ploškám S_i . Diskretizace prostoru umožňuje hodnoty funkcí μ a ν předpočítat a poté užívat během numerického řešení rovnice vedení tepla, neboť tyto hodnoty jsou dány pouze geometrií problému a nezávisí na čase.

Časová diskretizace

Spojitou závislost funkce na čase, $\varphi = \varphi(t)$, převedeme na posloupnost funkčních hodnot v ekvidistantních bodech s časovým krokem Δt ,

$$\varphi(t) \rightarrow \varphi^j = \varphi(j\Delta t).$$

¹⁷<http://www.blender.org/> (ke dni 16. 5. 2014)

¹⁸<http://hilda.troja.mff.cuni.cz/> (ke dni 16. 5. 2014).

¹⁹Závislost na čase pro zjednodušení zápisu nevyepisujeme.

Derivaci funkce $\varphi(t)$ podle času nahradíme podílem konečných diferencí

$$\frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{\varphi^j - \varphi^{j-1}}{\Delta t} .$$

Podobně jako při výpočtu plošného integrálu je nutné aproximovat časovou střední hodnotu funkce $\varphi(t)$ sumací

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P \varphi(t) dt \rightarrow \frac{1}{P_{\Delta t}} \sum_{j=1}^{P_{\Delta t}} \varphi^j ,$$

kde $P_{\Delta t} = P/\Delta t$ označuje počet časových kroků za periodu.

Vliv diskretizace

Pro zkoumání chyby vzniklé diskretizací potřebujeme numerické řešení porovnávat s řešením, které považujeme za přesné. To v obecnosti neznáme, volíme proto modelovou situaci, u které jsme analytické řešení odvodili — rovný povrch bez jakýchkoliv topografických útvarů. Abychom mohli analytické řešení pokládat za přesné, je nutné minimalizovat chybu linearizace. Parametry problému proto volíme tak, aby amplituda teploty byla výrazně menší než její střední hodnota (konkrétně $\Delta u \sim 6$ K, $\langle u \rangle \sim 180$ K). Zkoumáme závislost na třech volitelných parametrech:

$\Delta\Omega$ = Maximální objem čtyřstěnů tvořících třídímní síť. Tuto hodnotu je možné nastavit při tetrahedronizaci v programu **TetGen** (Si, 2006).

Δt = Časový krok. Je-li P rotační perioda, pak se za jednu periodu provede $P/\Delta t$ kroků.

ε = Limit iteračního procesu, prováděného v rámci jednoho časového kroku kvůli minimalizaci chyby vzniklé při semi-linearizaci teploty $\hat{u}^4 \approx \hat{u}\hat{v}^3$.

Cílem je zjistit, jak se bude lišit numericky spočtená povrchová teplota u od teoretické hodnoty u_{theory} . Proto je nutné specifikovat metriku, pomocí které budeme odchylku vyjadřovat. Zavedeme dvě metriky, charakterizující chybu spočtené teploty:

$$\sigma(u, u_{\text{theory}}) = \sqrt{\frac{1}{P_{\Delta t}} \sum_{j=1}^{P_{\Delta t}} (u^j - u_{\text{theory}}^j)^2} , \quad (7.1)$$

$$\max(u, u_{\text{theory}}) = \max_j |u^j - u_{\text{theory}}^j| . \quad (7.2)$$

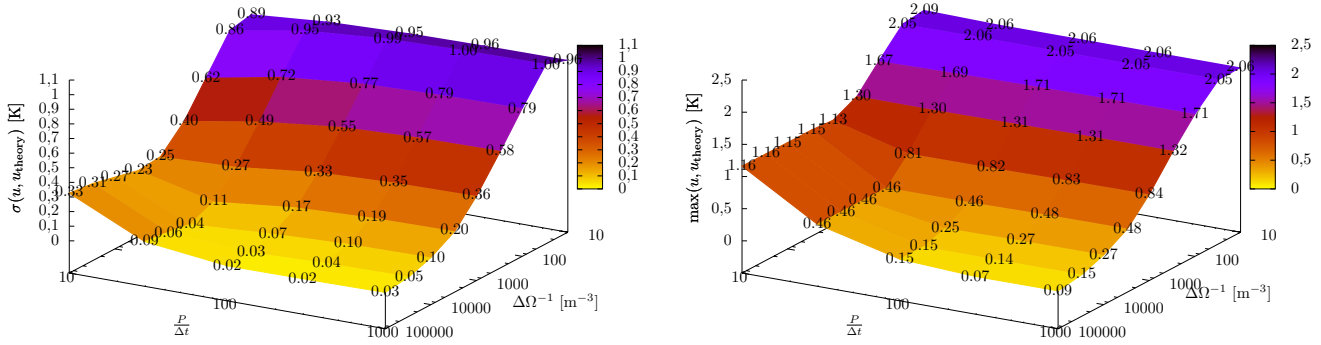
Metrika $\sigma(\cdot, \cdot)$ představuje průměrnou kvadratickou odchylku od analytického řešení v Kelvinech, metrika $\max(\cdot, \cdot)$ maximální absolutní odchylku v Kelvinech. Grafy těchto hodnot pro různé prostorové a časové diskretizace jsou na obrázku 18. Pozorujeme, že se zmenšováním časového kroku a objemu čtyřstěnu konverguje teplota u k analytickému řešení u_{theory} . Časový průběh teploty a konvergence k analytickému řešení je vidět na obrázku 19.

Pro nízké hodnoty tepelné vodivosti K ($K \lesssim 0,01$ W/m/K) bude docházet k výrazným odchylkám od analytického řešení, nikoliv však kvůli numerickým chybám, ale kvůli linearizaci čtvrté mocniny teploty v analytickém řešení. V těchto případech se může analytické řešení povrchové teploty odchýlovat od řešení nelineárního problému o desítky procent, a nelze je tedy použít pro odhad chyby.

Prostorová diskretizace ovlivňuje chybu výsledné teploty dvojím způsobem. Na objemu čtyřstěnu $\Delta\Omega$ závisí bázové funkce N_i , jemnější diskretizace přinese přesnější aproximaci hladké funkce u lineární kombinací bázových funkcí \hat{u} . Diskretizace prostoru však také ovlivní trojúhelníkové plošky tvořící hranici oblasti, a tedy i funkce definované na hranici, zejména stínící funkci μ a viditelnostní funkci ν . Vliv diskretizace povrchu na vrhaný stín je vidět na obrázku 20.

Uvážíme-li na povrchu balvan ve tvaru zdi, výsledná síla, kterou bude tento útvar působit, bude dána rozdílem sil, kterými působí západní a východní strana zdi. Přitom síly na obě strany jsou zpravidla podobné velikosti, rozdílem těchto hodnot dojde k nárůstu relativní chyby. Je proto třeba volit velice malý časový krok Δt i objem čtyřřetěnu $\Delta\Omega$.

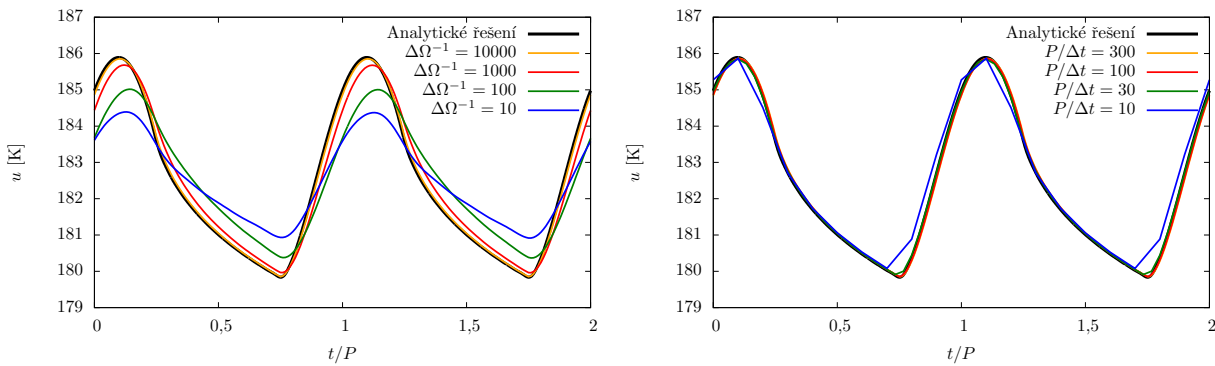
Z výše uvedeného není možné omezit numerickou chybu obecně, neboť řešení taktéž závisí na počtu iterací, na tepelném parametru Θ a na geometrii problému. Pro daný útvar proto volíme diskretizaci prostoru a času a limit iteračního procesu tak, aby snížení limitu na polovinu, resp. zmenšení objemu čtyřřetěnu či časového kroku na polovinu, nezměnilo řešení více než o stanovenou chybu. Zpravidla volíme $\Delta\Omega^{-1} = 100\,000$, $P/\Delta t = 1\,440$ a $\varepsilon = 0,1$. Při snížení iteračního limitu²⁰ na polovinu dojde ke změně teploty o přibližně 0,2 %.



(a) Střední kvadratická odchylka od analytického řešení $\sigma(u, u_{\text{theory}})$.

(b) Maximální odchylka od analytického řešení $\max(u, u_{\text{theory}})$.

Obrázek 18: Konvergence v čase a prostoru. Odchylka vynesena v závislosti na recipročné hodnotě objemu čtyřřetěnu $\Delta\Omega^{-1}$ a na počtu časových kroků za periodu $P/\Delta t$.

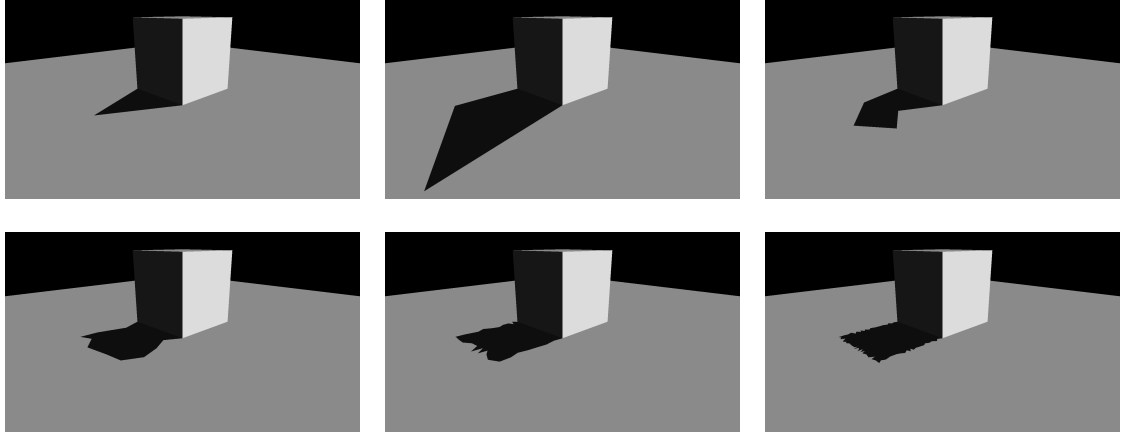


(a) Konvergence při zjemňování prostorové diskretizace. Časový krok zvolen $P/\Delta t = 100$.

(b) Konvergence při zmenšování časového kroku. Prostorová diskretizace zvolena $\Delta\Omega^{-1} = 10\,000$.

Obrázek 19: Numerické řešení povrchové teploty pro různé prostorové a časové diskretizace. V obou případech pozorujeme konvergenci k analytickému řešení.

²⁰Připomeňme, že iterační proces je ukončen, je-li $\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\| < \varepsilon$. Pro třídimenzionální síť složenou z 20 000 uzlových bodů bude proto rozdíl teplot v k a $(k+1)$ iteraci $\lesssim 10^{-3}$ K.



Obrázek 20: Stín pro šest různých rozlišení povrchu ($-\log \Delta\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bráno zleva shora), vržený Sluncem, které se nachází 45° nad horizontem.

7.2 Závislost středního tlaku na parametrech

Moment síly středovaný přes periodu, kterým působí asymetrický povrchový útvar, bude mít směr obecně různý od rotační osy \mathbf{e} . Směr i velikost momentu závisejí na přesném tvaru a na velikosti útvaru. I symetrický útvar však může působit nenulovým momentem díky laterálnímu vedení tepla. Důležitou vlastností tohoto jevu je jeho *aditivita* — radiální síla vždy působí ve směru rotace a příspěvky od jednotlivých útvarů se navzájem sčítají.

Moment síly, kterým působí asymetrické útvary, lze pak chápat jako složení příspěvku od asymetrie a od laterálního vedení tepla. Uvažujeme-li velký počet útvarů, které jsou na povrchu náhodně orientovány, očekáváme, že příspěvky od asymetrie se budou vzájemně rušit, díky vedení tepla však budou útvary vykazovat určitý globální trend — budou působit silou ve směru rotace, čili momentem ve směru rotační osy. Zaměříme se nyní právě na tuto složku momentu síly, kterým zkoumaný útvar působí. Z rovnice (3.30) vidíme, že právě tato složka způsobuje změnu úhlové frekvence, což je měřitelná veličina (alespoň v principu).

Elementární síla, působící na dané místo, má směr obecně odlišný od místní normály, neboť část záření, která je z daného místa vyzářena, je pohlcena na nerovnostech povrchu. V kapitole 3 jsme proto zavedli průměrné emisní vektory \mathbf{h} (3.11), které směr a velikost síly charakterizují. Přitom z tohoto vektoru přispěje pouze určitá složka do změny úhlové frekvence:

$$\frac{d\omega}{dt} \propto d\mathbf{T} \cdot \mathbf{e} \propto (\mathbf{r} \times d\mathbf{f}) \cdot \mathbf{e} \propto (\mathbf{r} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{h} ,$$

kde \mathbf{e} označuje jednotkový vektor ve směru rotační osy. V kartézských topografických souřadnicích v bodu na rovníku asteroidu je vektor \mathbf{e} shodný s jednotkovým vektorem ve směru osy x , osa z je potom orientována v radiálním směru:

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}_x , \quad \mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_z .$$

Pozorujeme, že jediná složka síly $d\mathbf{f}$, resp. vektoru \mathbf{h} , která přispívá do změny úhlové frekvence, je y -ová složka h_y .

Pro porovnávání velikosti momentů pro různé útvary a různé hodnoty parametrů je výhodné zavést bezrozměrný tlak

$$\Pi = \frac{1}{S} \int_{\Gamma_1} \frac{u^4}{u_*^4} h_y d\Gamma , \quad (7.3)$$

kde S označuje plochu daného útvaru. Projekce výsledné síly do směru y je potom

$$f_y = -\frac{(1 - A_h)\Phi_\odot}{c}\Pi S . \quad (7.4)$$

Všimněme si, že plocha S po dosazení Π do rovnice (7.4) vymizí, má však význam normalizační; bezrozměrný tlak Π potom skutečně odpovídá tlaku a nikoliv tlakové síle.

Uvážíme-li zed', jejíž stěna s obsahem S má konstantní teplotu u , při normálové aproximaci $h_y \approx \frac{2}{3}$ dostaneme pro bezrozměrný tlak vztah

$$\Pi = \frac{2}{3} \frac{u^4}{u_\star^4} .$$

Naše definice (7.3) je proto zobecněním bezrozměrného tlaku z Golubov & Krugly (2012).

Teplota u je časově proměnná s periodou P , a stejnou vlastnost má tudíž i tlak Π . Velikost výsledného momentu charakterizuje střední hodnota bezrozměrného tlaku

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{P} \int_0^P \Pi dt . \quad (7.5)$$

Střední bezrozměrný tlak je netriviální funkcí parametrů (viz kapitulu 5.3)

$$\langle \Pi \rangle = \langle \Pi \rangle (\Theta, a/L_{\text{wave}}, b/L_{\text{wave}}, c/L_{\text{wave}}, \dots) ,$$

kde a, b, c, \dots představují geometrické parametry zkoumaného útvaru. Cílem je nalézt tuto (spojitou) závislost výpočtem $\langle \Pi \rangle$ v dostatečném počtu bodů a vhodnou interpolací. Zajímá nás především oblast v prostoru parametrů v okolí *maxima* středního tlaku, neboť z této hodnoty můžeme usuzovat na velikost topografických útvarů, které mají na lokální YORP jev největší vliv. Již víme, že střední tlak klesá do nuly v limitních případech $\Theta \gg 1$, $\Theta \ll 1$, $a \gg L_{\text{wave}}$ či $a \ll L_{\text{wave}}$, jak bylo ukázáno v kapitole 4.5.

Jako modelový útvar pro zkoumání vlastností středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ použijeme *zed'*, jejíž výška je výrazně větší než šířka. Ačkoliv je takový povrchový útvar poměrně nerealistický, umožňuje porovnat střední tlak $\langle \Pi \rangle$ s výsledkem jednodimenzionálního modelu z práce Golubov & Krugly (2012). *Zed'* je taktéž vhodným útvarem pro zkoumání vlivu globálního sebeohřevu a absorpce tepelného záření na výsledný tlak. Geometrii útvaru popíšeme jediným parametrem, a to tloušťkou zdi d . Střední tlak proto bude záviset na tepelném parametru Θ a na bezrozměrné tloušťce d/L_{wave} ²¹.

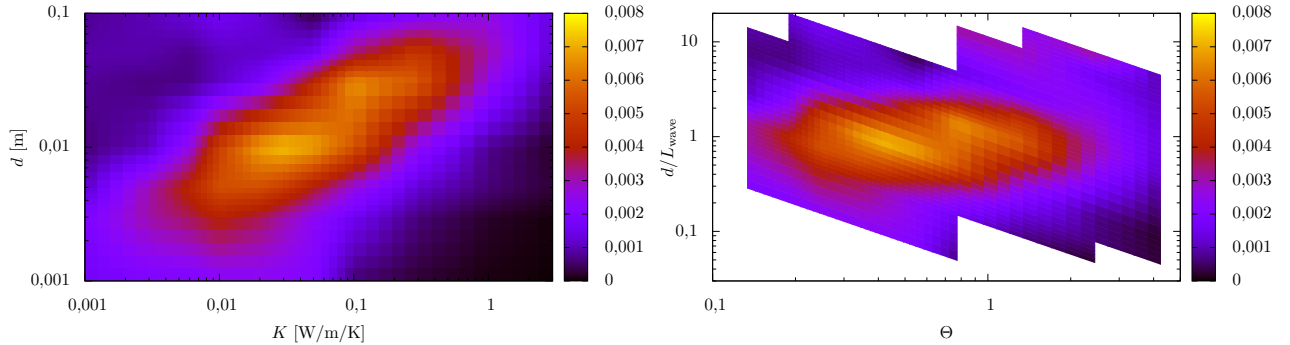
Uvažujeme insolační funkci ve tvaru $\mathcal{E}_\odot = (1 - A_h)\Phi_\odot \cos \vartheta_\odot \mu$, kde ϑ_\odot je zenitová vzdálenost Slunce a μ je stínící funkce. Neuvažujeme prozatím tepelné a rozptýlené záření, které na *zed'* dopadá od okolního povrchu asteroidu. Pro výpočet radiační síly užíváme normálovou aproximaci, $d\mathbf{f} \propto \mathbf{n}$. Za normalizační plochu, na kterou budeme bezrozměrný tlak $\langle \Pi \rangle$ vztahovat, volíme obsah boční stěny zdi. V důsledku nebude tlak záviset na výšce či šířce zdi.

Na obrázku 21a vidíme závislost středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$ na tloušťce zdi d a na tepelné vodivosti K , jsou-li ostatní parametry konstantní. Tento graf bude odlišný pro různé hodnoty hustoty ρ , kapacity C apod., lze z něj však vidět, jaké hodnoty tloušťky zdi a tepelné vodivosti jsou pro náš problém relevantní. Graf 21b je závislost tlaku na bezrozměrných parametrech Θ a d/L_{wave} . Pozorujeme, že maximální střední tlak působí na *zed'* při $d/L_{\text{wave}} \simeq 1$. Maximum v závislosti na tepelném parametru je pak pro $\Theta \simeq 0,5$. Tvar závislosti je obdobný jako v Golubov & Krugly (2012), maximální tlak je přitom nižší kvůli odlišné insolační funkci.

7.3 Porovnání různých modelů insolační funkce

Vysokou *zed'* použijeme pro zkoumání závislosti středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na různých modelech insolační funkce. Zvolíme konstantní tepelný parametr $\Theta = 0,5$ a sledujeme závislost tlaku na bezrozměrné tloušťce zdi d/L_{wave} . Používáme tyto modely:

²¹V Golubov & Krugly (2012) jsou užívány parametry Θ a d/L_{cond} , kde $L_{\text{cond}} \equiv \Theta \cdot L_{\text{wave}}$. Všimněme si, že takto definovaná vzdálenost L_{cond} nezávisí na úhlové frekvenci ω .



(a) Závislost středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$ na tloušťce zdi d a na tepelné vodivosti K . (b) Závislost středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné tloušťce d/L_{wave} a na tepelném parametru Θ .

Obrázek 21: Parametrická závislost středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$ v okolí jeho maxima pro balvan ve tvaru zdi. Uvažujeme stíny vrhané zdi, globální sebeohřev není zahrnut.

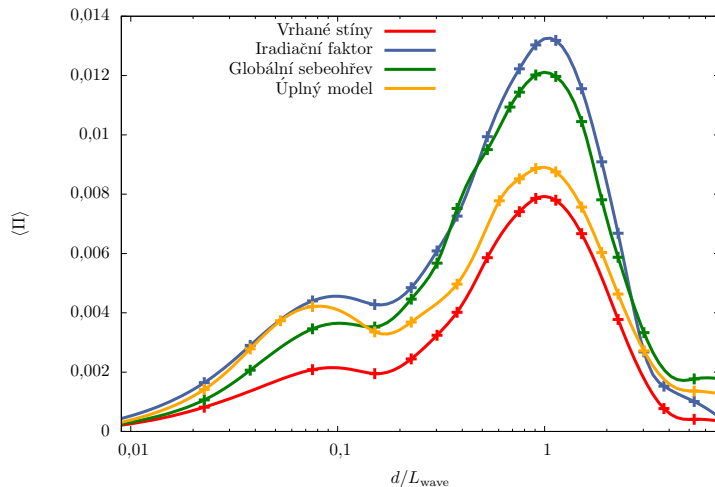
- **Vrhané stíny** označuje model, který zahrnuje stínění nekonvexitami povrchu. Zářivé toky od viditelných částí povrchu se zanedbávají.
- **Iradiační faktor** je zjednodušený model snažící se zohlednit záření dopadající na zed' od ostatních částí povrchu přidáním faktoru 2 k insolační funkci, tedy $\mathcal{E} = 2(1 - A_h)\Phi_{\odot} \cos \vartheta_{\odot}\mu$. Tento model je užívaný v Golubov & Krugly (2012).
- **Globální sebeohřev** uvažuje kromě zářivého toku \mathcal{E}_{\odot} též příspěvek emitovaného záření od povrchu asteroidu — tepelného toku \mathcal{E}_{rad} a rozptýleného toku \mathcal{E}_{sc} , počítaných dle vztahů (3.24) a (3.25).
- **Úplný model** zahrnuje výpočet průměrných emisních vektorů \mathbf{h} , zohledňuje tedy vliv absorpce záření na směr a velikost reakční síly. Předchozí modely užívají normálovou aproximaci $\mathbf{h} \approx \frac{2}{3}\mathbf{n}$.

Závislost $\langle \Pi \rangle = \langle \Pi \rangle(d/L_{\text{wave}})$ je pro zmíněné modely vidět na obrázku 22. Výsledek modelu *iradiační faktor* je v dobré shodě s jednodimenzionálním modelem z práce Golubov & Krugly (2012). Dostáváme takřka stejnou maximální hodnotu středního tlaku $\langle \Pi \rangle = 0,014$, průběh závislosti se však v některých ohledech liší.

Střední tlak je ve všech uvažovaných případech *kladný*, a lokální YORP na symetrických útvarech bude proto vždy způsobovat urychlování rotace. Odlišný výsledek uvádí Golubov & Krugly (2012), pro určité hodnoty parametrů Θ , d/L_{cond} vzniká záporný střední tlak. Autoři však vyjadřují jistou pochybnost nad tímto výsledkem.

Oproti modelu Golubov & Krugly (2012) taktéž pozorujeme vznik druhého *lokálního maxima* závislosti středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné tloušťce d/L_{wave} . Lokální maximum se objevuje pro velikosti útvarů $\ell \simeq 0,1 L_{\text{wave}}$. Pro naše modely je lokální maximum nejvýraznější pro *úplný model*. Z obrázku 22 vidíme, že v okolí hlavního maxima závislosti je *úplný model* relativně dobře aproximován modelem nejjednodušším, tedy modelem uvažujícím pouze vrhané stíny. V okolí sekundárního maxima však je odchylka těchto modelů značná, *úplný model* zde dokonce převažuje nad modelem *globální sebeohřev*, který uvažuje normálovou aproximaci směru radiační síly. Model značený *iradiační faktor* poměrně přesně vystihuje model *globální sebeohřev*. Prostým vynásobením insolační funkce faktorem 2 tak dostáváme dobré přiblížení výsledku, který obdržíme po zahrnutí globálního sebeohřevu.

Porovnejme modely *vrhané stíny* a *globální sebeohřev*. Zahrnutím sebeohřevu dojde k zvýšení středního tlaku o $\sim 50\%$. Tímto se lokální YORP jev odlišuje od jevu globálního. Uvážení sebeohřevu

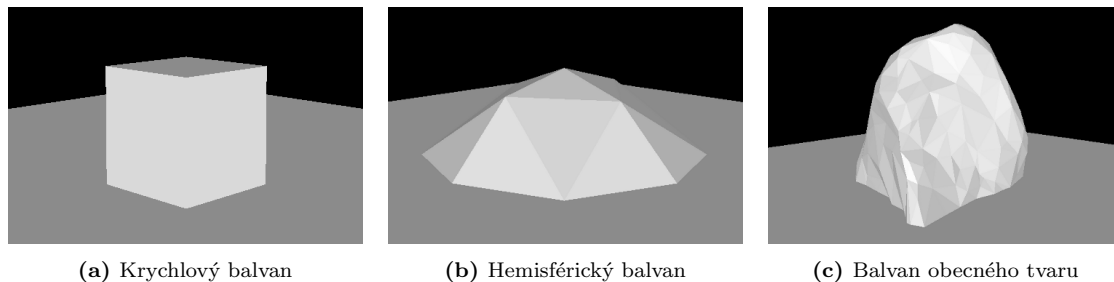


Obrázek 22: Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné tloušťce zdi d/L_{wave} . Tepelný parametr $\Theta = 0,5$. Křivky odpovídají různě složitým modelům. *Vrhané stíny* uvažuje pouze vzájemné stínění částí povrchu a zcela zanedbává globální sebeohřev. *Iradiační faktor* zohledňuje sebeohřev přidáním faktoru 2 k insolační funkci. *Globální sebeohřev* zahrnuje záření rozptýlené a tepelně emitované od všech viditelných plošek povrchu. *Úplný model* uvažuje kromě globálního sebeohřevu též vliv absorpce záření na směr reakční síly.

při modelování globálního jevu způsobí pro $\sim 75\%$ tvarů asteroidů (reálných i synteticky vytvořených) pokles účinku, ať jde o zpomalování či zrychlování rotace (Rozitis & Green, 2013a).

7.4 Závislost středního tlaku na geometrii útvaru

Vysoká zeď je pochopitelně nerealistickým topografickým útvarem, zaměříme se proto na obecnější tvary, jejichž výška je srovnatelná s jejich délkou, resp. šířkou. Zatímco střední tlak, kterým působí zeď, je možné modelovat i jednodimenzionálním modelem, u obecnějších balvanů to již není možné, a projeví se tak vliv třídimeznionálního vedení tepla. Postupujeme od idealizovaných tvarů až k tvaru zcela obecnému a sledujeme, jak se pro jednotlivé útvary liší střední bezrozměrný tlak. Aby bylo možné jednotlivé případy porovnávat, zvolíme jednotný parametr ℓ charakterizující velikost objektu, a to tak, že ℓ^2 odpovídá obsahu *základny* útvaru. Hodnotu ℓ^2 zároveň použijeme jako normalizační plochu S . Geometrie balvanů, které jsme ve výpočtech použili, je zobrazena na obrázku 23.



(a) Krychlový balvan

(b) Hemisférický balvan

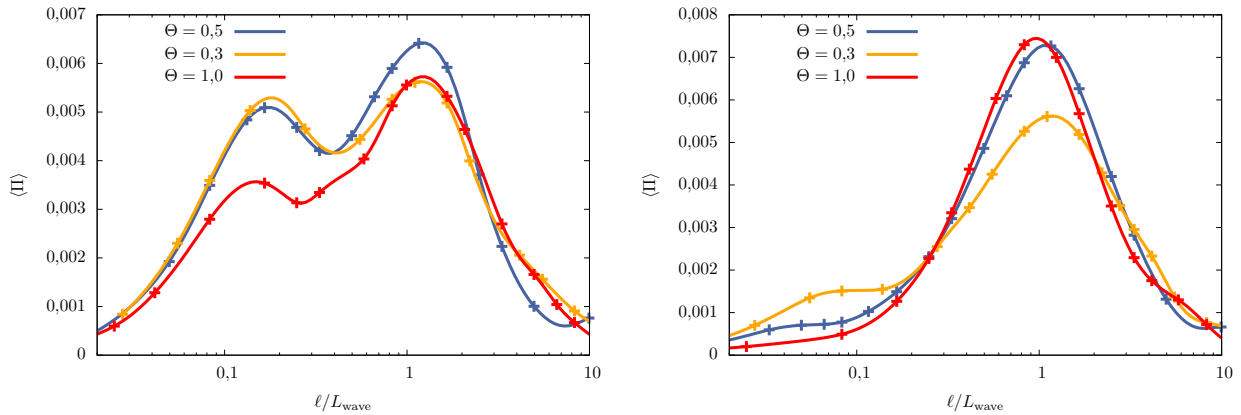
(c) Balvan obecného tvaru

Obrázek 23: Topografické útvary, pro které porovnáваме závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti ℓ/L_{wave} .

7.4.1 Krychlový balvan

Pro balvan ve tvaru krychle odpovídá rozměrový parametr ℓ délce hrany krychle. Zkoumáme závislost tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné hraně krychle ℓ/L_{wave} pro různé hodnoty tepelného parametru Θ . Problém řešíme ve dvou scénářích. V prvním uvažujeme krychli stejného složení jako materiál podloží, v druhém pokládáme krychli na regolit, jehož materiálové parametry jsou dle Farinella et al. (1998): tepelná vodivost $K = 0,0015 \text{ W/m/K}$, měrná tepelná kapacita $C = 680 \text{ J/kg/K}$, hustota $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$. Kvůli malé tepelné vodivosti regolitu je značně omezeno vedení tepla z útvaru dovnitř asteroidu (a naopak). Závislosti středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné hraně ℓ/L_{wave} pro oba zmíněné případy jsou na obrázku 24. Teploty na povrchu balvanu jsou zobrazeny na obrázku 25.

Pro krychli z homogenního materiálu pozorujeme velmi výrazné lokální maximum v okolí $\ell \sim 0,1 L_{\text{wave}}$. Pro případ $\Theta = 0,3$ je dokonce srovnatelné s maximum hlavním v okolí $\ell \sim L_{\text{wave}}$. Lokální maximum zřejmě souvisí s výměnou tepla mezi tvarem a podložím, neboť pro případ krychle ležící na regolitu (obrázek 24b) maximum zaniká. Stále však v místě maxima pozorujeme zmírnění klesání funkce.



(a) Příklad homogenního materiálu — krychle má stejnou vodivost jako podloží.

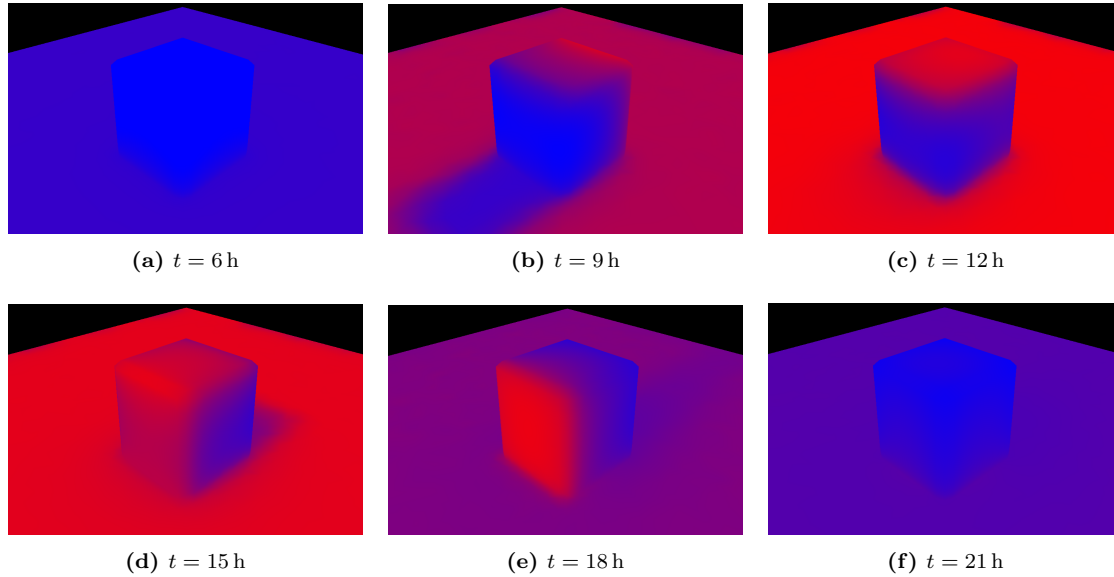
(b) Příklad odlišného materiálu krychle — krychle leží na regolitu s malou tepelnou vodivostí.

Obrázek 24: Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné délce hrany krychle ℓ/L_{wave} . Jednotlivé křivky odpovídají různým hodnotám tepelného parametru Θ .

7.4.2 Hemisférický balvan

Malé balvany nacházející se na povrchu asteroidů zpravidla nemají stěny kolmé k povrchu a výška části, kterou vyčnívají nad povrch, je menší než jejich šířka. Zkusíme proto tyto skutečnosti zohlednit uvážením balvanu, jehož stěny svírají s povrchem úhel $\sim 50^\circ$ a jehož výška je rovna $\sim 1/3$ jeho délky (průměru). Takový útvar představuje balvan, který je většinou svého objemu zaboren v regolitu. Pro zjednodušení však uvažujeme pouze balvan ležící na rovné vrstvě regolitu. Závislost středního tlaku na bezrozměrné velikosti hemisférického balvanu ℓ/L_{wave} pro tepelný parametr $\Theta = 0,5$ je na obrázku 26.

Oproti krychli (obrázek 24) pozorujeme výrazný pokles středního tlaku. To je pochopitelné: je-li útvar vysoký a jeho stěny svírají s povrchem velký úhel, pak radiální tlak působí díky velké ploše značnou tlakovou silou a taktéž značným momentem síly díky velkému ramenu. Naopak, plochý balvan nebo balvan zasazený hluboko do regolitu vyčnívá nad povrch menší plochou a kvůli sklonu stěn bude taktéž menší rameno momentu. Krychlový i hemisférický balvan leží na stejné ploše ℓ^2 , kvůli odlišnému tvaru se však jejich střední bezrozměrný tlak liší o faktor 5.



Obrázek 25: Teplota na povrchu krychlového balvanu v různých časových okamžicích. U jednotlivých obrázků je uveden čas odpovídající rotaci asteroidu, při $t = 12$ h se Slunce nachází v zenitu.

7.4.3 Balvan obecného tvaru

V předchozím jsme balvan volili symetrický, střední tlak proto klesal k nule pro malé hodnoty vodivosti, resp. pro velké hodnoty bezrozměrné velikosti ℓ/L_{wave} . Balvan obecného tvaru bude působit nenulovým momentem i pro malé hodnoty vodivosti právě kvůli asymetrii. Tento moment bude záviset na orientaci uvažovaného útvaru.

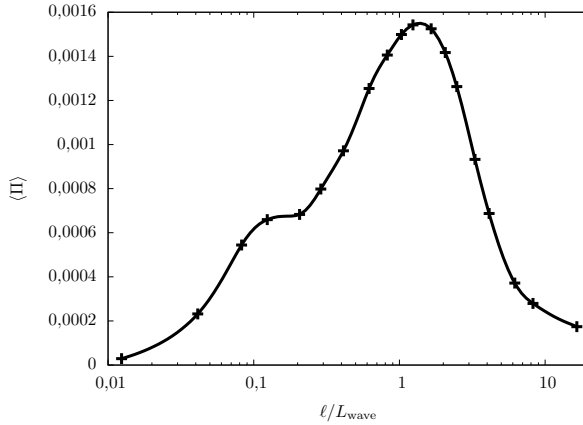
Pokud bychom chtěli získat určitou invariantní informaci o tlaku, který na obecný balvan působí, je třeba uvážit různé orientace balvanu na povrchu a hodnoty středního bezrozměrného tlaku pro různé orientace průměrovat. Očekáváme, že příspěvky k tlaku od asymetrie se při průměrování vzájemně kompenzují. Průměrovaná závislost $\langle \Pi \rangle (\ell/L_{\text{wave}})$ bude proto klesat k nule pro $K \rightarrow 0$, resp. $\ell/L_{\text{wave}} \rightarrow \infty$, jako je tomu pro symetrické útvary. Závislosti středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti balvanu ℓ/L_{wave} pro různé orientace jsou zakresleny v obrázku 27.

Uvažovaný balvan je částí objemu zabořen do regolitu. Tím se odlišuje od předchozích modelů, ve kterých útvar ležel na rovné vrstvě regolitu. Maximum průměrované závislosti středního tlaku na bezrozměrné velikosti je menší oproti závislosti pro krychli (obrázek 24), liší se přibližně faktorem 2. Ve srovnání s hemisférickým balvanem je naopak maximum větší faktorem 3. Tento výsledek není překvapující. Balvan je značně nepravidelný a síly, kterým působí záření na jednotlivé plošky útvaru, nemají všechny stejný směr, jako je tomu v případě krychle. Na rozdíl od hemisférického balvanu je však podstatně vyšší (viz obrázek 23) a při stejném obsahu základny tak bude působit větší silou.

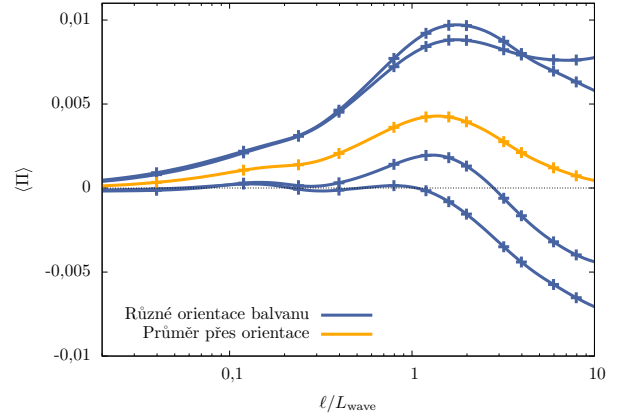
Podotkneme, že průměrovaná závislost se změní, budeme-li ji určovat z většího počtu různých orientací. Pravděpodobně však nedojde k žádné výrazné změně.

7.5 Zobecnění problému

Doposud jsme zkoumali závislost středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$ na parametrech za určitých předpokladů (viz kapitola 4.3). V této části se pokusíme zjistit, jakým způsobem se tlak změní, pokud některý z předpokladů opustíme či zeslabíme.



Obrázek 26: Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti hemisférického balvanu ℓ/L_{wave} pro tepelný parametr $\Theta = 0,5$.



Obrázek 27: Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti balvanu obecného tvaru ℓ/L_{wave} pro tepelný parametr $\Theta = 0,5$. Jednotlivé křivky odpovídají různým orientacím balvanu (otočení o $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ a 270°).

7.5.1 Závislost na asteroidopisné šířce

Výchozím předpokladem, odstraňující jeden z volných parametrů insolační funkce, byla nulová asteroidopisná šířka zkoumaného útvaru, tj. útvar se nacházel na rovníku asteroidu. Vektor \mathbf{n}_\odot směřující ke Slunci tak v kartézských obzorníkových topocentrických souřadnicích má x -ovou komponentu vždy nulovou.

Útvar nyní umístíme na obecnou asteroidopisnou šířku ϑ . Předpokládáme-li nadále nulovou šikmost asteroidu, a tedy nulovou deklinaci Slunce, dostaneme kartézské složky vektoru \mathbf{n}_\odot

$$\mathbf{n}_\odot = \sin \vartheta \cos t \mathbf{e}_x - \sin t \mathbf{e}_y - \cos \vartheta \cos t \mathbf{e}_z, \quad (7.6)$$

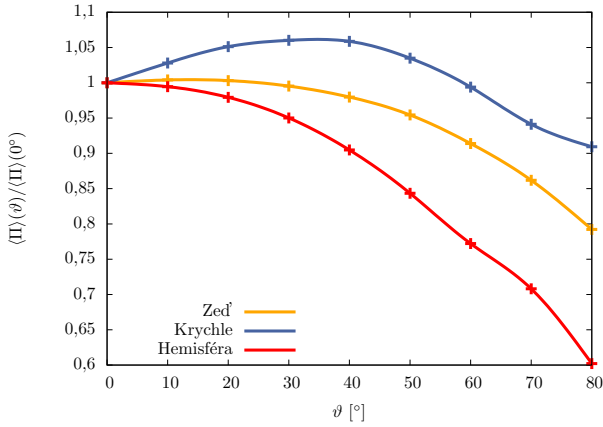
kde t označuje hodinový úhel. Střední tlak bude pochopitelně záviset na konkrétní geometrii útvaru. Pro tři různé modelové případy je závislost $\langle \Pi \rangle = \langle \Pi \rangle(\vartheta)$ vykreslena na obrázku 28.

Všimněme si, že pro krychlový balvan je střední tlak *vyšší* na asteroidopisných šířkách okolo 30° oproti rovníku. To je pochopitelně dáno specifickou orientací útvaru; svírá-li Slunce nenulový úhel s místní normálou, zahřívá větší plochu krychle ve srovnání s případem, kdy je Slunce v zenitu. Mírný nárůst středního tlaku s rostoucí asteroidopisnou šířkou pozorujeme i pro zed', pro hemisférický balvan je závislost klesá již pro okolí rovníku.

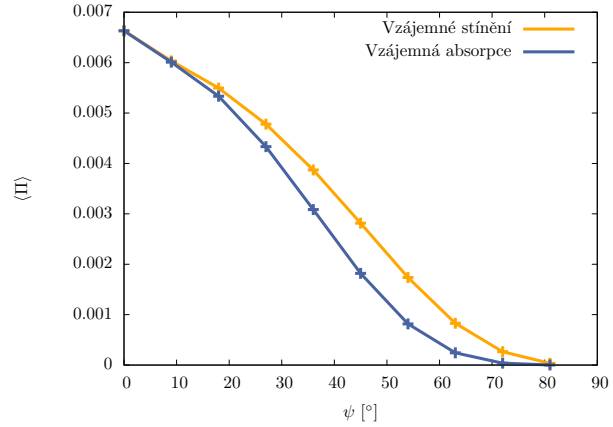
7.5.2 Zohlednění vzájemného stínění

Doposud jsme uvažovali osamocené útvary — každý útvar působí momentem, který je dán pouze polohou útvaru na povrchu asteroidu a nezávisí na rozmístění ostatních útvarů. Tato situace však není konzistentní s velkou hustotou balvanů, kdy dochází k *vzájemnému* stínění a navíc část záření bude pohlcena, dojde proto k snížení momentu síly. Uvažujeme proto situaci, kdy je lokální horizont vyvýšen ve všech směrech o *elevační úhel* ψ . Útvar tak bude ležet ve tmě tehdy, když bude zenitová vzdálenost Slunce $\vartheta_\odot > 90^\circ - \psi$, resp. $\vartheta_\odot < 270^\circ + \psi$. Závislost středního tlaku na elevačním úhlu je na obrázku 29.

Vidíme, že střední tlak poměrně rychle klesá s rostoucím elevačním úhlem — tlak klesne na polovinu pro úhel přibližně 40° . V uvedeném výpočtu jsme neuvažovali globální sebeohřev a vliv absorpce emitovaného záření povrchem.



Obrázek 28: Závislost středního tlaku, normovaného tlakem na rovníku, na asteroidopisné šířce.



Obrázek 29: Závislost středního tlaku na elevačním úhlu.

7.6 Výpočet úhlového zrychlení

Distribuce velikostí balvanů na povrchu asteroidu je zpravidla dobře aproximovatelná mocninnou závislostí. Předpokládáme, že diferenciální rozdělení velikostí $N(\ell)$ je v rozmezí velikostí ℓ_{\min} až ℓ_{\max} dáno známou závislostí

$$N(\ell) d\ell = N_0[\ell]_m^{-\gamma} d\ell, \quad (7.7)$$

kde N_0 je normalizační konstanta, volená tak, aby $N_{\text{total}} \equiv \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} N_0[\ell]_m^{-\gamma} d\ell$ byl celkový počet útvarů na povrchu ve zvoleném rozmezí velikostí. Aby nerostl celkový povrch útvarů s klesající velikostí ℓ_{\min} nade všechny meze, je třeba volit $\gamma < 3$.

Předpokládáme, že každý útvar působí momentem, který je závislý pouze na umístění na povrchu, nezávisí na rozmístění ostatních útvarů. Za tohoto předpokladu odvodíme vztah pro celkový moment síly, kterým povrchové útvary působí.

Označme $\delta T(\ell)$ střední hodnotu momentu síly (přesněji projekce momentu síly do směru rotační osy \mathbf{e}), kterým působí jediný útvar velikosti ℓ . Pokud moment nezávisí na umístění (například pokud jsou útvary rozmístěny na rovníku sférického asteroidu), potom dostaneme výsledný moment

$$T = \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \delta T(\ell) N(\ell) d\ell. \quad (7.8)$$

Budou-li útvary rozmístěny s distribuční funkcí \mathcal{D} ve sférických souřadnicích ϑ a φ), potom

$$T = \int_{\partial\Omega} \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \delta T(\ell, \vartheta, \varphi) N(\ell) \mathcal{D}(\vartheta, \varphi) d\ell d\Gamma. \quad (7.9)$$

7.6.1 Sférický asteroid

Zkusme nyní odhadnout řádovou velikost úhlového zrychlení. Uvažujme asteroid ve tvaru koule o poloměru r , na které jsou útvary rozmístěny izotropně — distribuční funkce je tedy $\mathcal{D}(\vartheta, \varphi) = 1/(4\pi r^2)$. Parametrizací sférickými souřadnicemi dostaneme

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\ell_{\min}}^{\ell_{\max}} \delta T(\ell, \vartheta) N(\ell) d\ell \cos \vartheta d\vartheta. \quad (7.10)$$

Moment síly δT vyjádříme pomocí středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$, který obecně závisí na velikosti útvaru ℓ i souřadnici ϑ :

$$\delta T(\ell, \vartheta) = \frac{(1 - A_h)\Phi_\odot}{c} \langle \Pi \rangle(\ell, \vartheta) \ell^2 r \cos \vartheta, \quad (7.11)$$

kde A_h je hemisférické albedo, Φ_\odot zářivý tok Slunce, c rychlost světla a $\cos \vartheta$ bezrozměrné rameno momentu.

Důležitým parametrem, který výrazně ovlivňuje výsledný moment T , je celkový počet útvarů N_{total} , resp. normalizační konstanta N_0 . Počet útvarů však závisí na poloměru r a je těžké ho odhadnout. Namísto toho označíme poměrnou část povrchu, kterou pokrývají útvary, jako f . Celkový počet útvarů na povrchu N_{total} je potom

$$N_{\text{total}} = \frac{4\pi r^2 f}{\bar{\ell}^2},$$

kde $\bar{\ell}^2$ značí střední hodnotu obsahu základny útvaru. Uvažujeme-li mocninné rozdělení velikostí s exponentem γ , (normovaná) hustota pravděpodobnosti $\varrho(\ell)$ má tvar

$$\varrho(\ell) = \frac{1 - \gamma}{\ell_{\text{max}}^{1-\gamma} - \ell_{\text{min}}^{1-\gamma}} \ell^{-\gamma} \quad (7.12)$$

a střední obsah základny $\bar{\ell}^2$ je tedy z definice roven

$$\bar{\ell}^2 = \int_{\ell_{\text{min}}}^{\ell_{\text{max}}} \varrho(\ell) \ell^2 d\ell = \frac{1 - \gamma}{3 - \gamma} \frac{\ell_{\text{max}}^{3-\gamma} - \ell_{\text{min}}^{3-\gamma}}{\ell_{\text{max}}^{1-\gamma} - \ell_{\text{min}}^{1-\gamma}}.$$

Dostáváme vztah pro normalizační konstantu diferenciálního rozdělení velikostí (7.7):

$$N_0 = \frac{1 - \gamma}{\ell_{\text{max}}^{1-\gamma} - \ell_{\text{min}}^{1-\gamma}} N_{\text{total}} = 4\pi r^2 f \frac{3 - \gamma}{\ell_{\text{max}}^{3-\gamma} - \ell_{\text{min}}^{3-\gamma}}.$$

Po dosazení odvozených vztahů do (7.10) dostaneme

$$T = \frac{2\pi r^3 f (3 - \gamma) (1 - A_h) \Phi_\odot}{\ell_{\text{max}}^{3-\gamma} - \ell_{\text{min}}^{3-\gamma}} \frac{1}{c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\ell_{\text{min}}}^{\ell_{\text{max}}} \langle \Pi \rangle(\ell, \vartheta) \ell^{2-\gamma} \cos^2 \vartheta d\ell d\vartheta. \quad (7.13)$$

Pro další úpravy již potřebujeme explicitní závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na velikosti útvaru ℓ a asteroidopisné šířce ϑ . Abychom mohli integrál ve vztahu (7.13) spočítat analyticky, uvažme jednoduchou závislost

$$\langle \Pi \rangle(\ell, \vartheta) = \Pi_0 \cos \vartheta.$$

Jde o hrubý odhad; předpokládáme, že útvary v uvedeném rozmezí působí tlakem nezávislým na velikosti, $\cos \vartheta$ představuje odhad závislosti tlaku na asteroidopisné šířce. Díky tomu je možné separovat proměnné v integrálu. Po dosazení dostáváme výsledný vztah pro celkový moment síly

$$T = \frac{8}{3} \pi r^3 f \Pi_0 \frac{(1 - A_h) \Phi_\odot}{c}. \quad (7.14)$$

Všimněme si, že tento vztah je nezávislý na parametrech mocninného rozdělení, tj. ℓ_{min} , ℓ_{max} , γ . Jde o důsledek volby konstantního středního tlaku Π_0 .

Úhlové zrychlení dostaneme ze známého momentu síly podle vztahu (3.30), totiž vydělením momentem setrvačnosti homogenní koule $I = \frac{2}{5} m r^2 = \frac{8}{15} \pi \rho r^5$, kde ρ označuje hustotu asteroidu,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{5f\Pi_0}{\rho r^2} \frac{(1 - A_h)\Phi_\odot}{c}.$$

Pro numerický výsledek dosadíme vhodné hodnoty parametrů. Uvažme asteroid ve vzdálenosti 1 AU s poloměrem $r = 1$ km, hustotou $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ a hemisférickým albedem $A_h = 0,1$. Ve volbě středního bezrozměrného tlaku Π_0 se skrývá velká nejistota. Zatímco pro uvažovaný hemisférický balvan (obrázek 26) by byla vhodná volba $\Pi_0 \approx 0,001$, pro balvan obecného tvaru (průměrovaná závislost na obrázku 27) dosahuje střední tlak vyšších hodnot, a tudíž jej můžeme aproximovat volbou $\Pi_0 \approx 0,003$. Na základě toho volíme střední tlak $\Pi_0 = (2 \pm 1) \cdot 10^{-3}$.

Předpokládejme, že topografické útvary, na které působí tento tlak, pokrývají desetinu celkového povrchu, tj. $f = 0,1$, ostatní útvary pro jednoduchost neuvažujeme. Zrychlení sférického asteroidu vlivem povrchových útvarů je potom rovno

$$\frac{d\omega}{dt} \approx (1,2 \pm 0,6) \cdot 10^{-8} \text{ rad/d}^2 .$$

Většina parametrů byla pouze odhadnuta, výsledek je proto nutno chápat jako řádový odhad velikosti momentu, kterým působí povrchové útvary. Největší nejistotu představuje poměrná plocha útvarů f a konstanta středního tlaku Π_0 .

Srovnajme tuto hodnotu s výsledkem modelu globálního YORP jevu. V práci Čapek & Vokrouhlický (2004) byla zkoumána závislost změny úhlové frekvence na šikmosti pro synteticky generované tvary asteroidů. Tyto asteroidy měly objem stejný jako koule o poloměru 1 km, čili stejný jako v našem výpočtu. Hustota byla taktéž totožná, tj. $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$. Pro všechny asteroidy byla uvažována kruhová orbita s poloměrem 2,5 AU, zatímco v našem výpočtu jsme použili orbitu o poloměru 1,0 AU. Zářivý tok Slunce Φ_\odot klesá se vzdáleností R jako $\Phi_\odot \propto R^{-2}$. Upravíme-li náš výpočet pro sférický asteroid ve vzdálenosti 2,5 AU, dostaneme zrychlení řádu

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{R=2,5 \text{ AU}} \approx (2,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-9} \text{ rad/d}^2 .$$

Pro porovnávání výsledků zavedme *charakteristickou dobu* YORP jevu $\tau \equiv P/(dP/dt)$, kde P je rotační perioda. V práci Čapek & Vokrouhlický (2004) je počáteční perioda syntetických asteroidů položena $P = 6$ h, charakteristická doba se potom pohybuje od 2 Myr do přibližně 40 Myr. Medián je roven 14,3 Myr pro nulovou vodivost, při uvážení nenulové vodivosti pak dojde k mírnému poklesu. Spočteme-li charakteristickou dobu YORP jevu pro sférický asteroid na základě našeho výpočtu, dostáváme $\tau = (35 \pm 18)$ Myr. Tato hodnota je zcela srovnatelná s hodnotou spočtenou pro globální topografii. Povrchové útvary tak zřejmě k výslednému momentu přispívají mírou srovnatelnou s globálním jevem.

7.6.2 Itokawa

Nyní přejdeme k výpočtu úhlové frekvence v méně idealizovaném případě. Jako základní těleso vezmeme asteroid (25143) Itokawa, u kterého známe tvar povrchu s velkou přesností (Gaskell et al., 2006). Problém již není řešitelný analyticky, a k řešení tedy použijeme numerické metody. Na základě fotografií povrchu Itokawy byla nalezena kumulativní, resp. diferenciální distribuce velikostí balvanů (Saito et al., 2006)

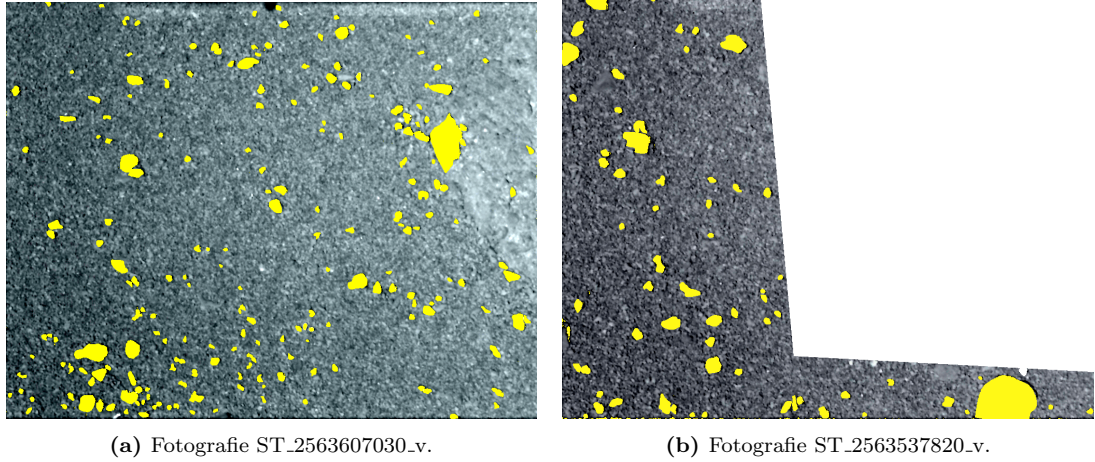
$$N(>\ell) \approx 4,8 \cdot 10^4 \cdot [\ell]_{\text{m}}^{-2,8} \quad (7.15)$$

$$N(\ell) d\ell \approx 1,3 \cdot 10^5 \cdot [\ell]_{\text{m}}^{-3,8} d\ell \quad (7.16)$$

Uvedené rozdělení je dobrým přiblížením pro velikosti útvarů $\ell \gtrsim 1$ m, pro menší útvary se závislost začíná zvolňovat (Miyamoto et al., 2007). Dostupné informace nevytvářejí nic o distribuci či celkovém počtu útvarů o velikostech 10^{-2} až 10^{-3} m, které jsou pro náš problém relevantní.

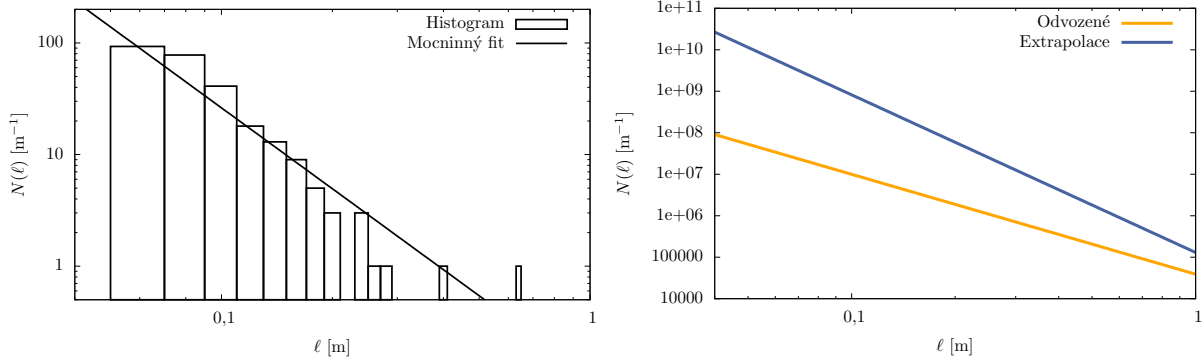
Celková plocha, kterou by zaujímaly útvary o velikostech 10^{-3} až 10^{-1} m s uvedeným rozdělením velikostí, by byla

$$S_{\text{total}} = \int_{\ell_{\text{min}}}^{\ell_{\text{max}}} \ell^2 N(\ell) d\ell \approx 4,0 \cdot 10^7 \text{ m}^2 . \quad (7.17)$$



Obrázek 30: Balvany na povrchu Itokawy, ze kterých odvozujeme mocinné rozdělení velikostí. Snímek vpravo se částí překrývá s levým snímkem, tuto část proto vynecháváme.

Povrch Itokawy však činí pouze $3,93 \cdot 10^5 \text{ m}^2$ (Demura et al., 2006). Mocinné rozdělení (7.16) tedy *nelze* extrapolovat do oblasti malých útvarů.



(a) Data získána ze snímků ST_2563537820_v, ST_2563607030_v, rozlišení 7 mm/pixel, resp. 6 mm/pixel (Miyamoto et al., 2007), což umožňuje nalézt útvary velikosti několika centimetrů.

(b) Porovnání mocinných rozdělení. Šedá čára odpovídá extrapolaci závislosti pro útvary o velikostech $\ell \gtrsim 1 \text{ m}$ (Saito et al., 2006). Černá závislost byla odvozena z detailních fotografií povrchu.

Obrázek 31: Mocinné rozdělení velikostí útvarů odvozené z detailních snímků povrchu Itokawy.

Pokusili jsme se proto odhadnout rozdělení velikostí na základě detailních snímků povrchu Itokawy, které byly pořízeny při sestupu sondy Hayabusa²². Rozlišení těchto snímků dosahuje až 6 mm/pixel (Miyamoto et al., 2007). Změřili jsme velikosti útvarů, které byly na snímcích dobře viditelné, vybrané balvany jsou vidět na obrázku 30. Dostáváme histogram velikostí útvarů (obrázek 31a). Naměřenými daty jsme proložili mocinnou funkci. Pokud uvážíme, že rozdělení velikostí je stejné i na jiných místech povrchu, dostáváme diferenciální rozdělení velikostí malých útvarů na celém povrchu Itokawy

$$N(\ell) d\ell \approx (3,9 \pm 1,8) \cdot 10^5 \cdot [\ell]_m^{-(2,4 \pm 0,3)} d\ell . \quad (7.18)$$

Exponent rozdělení je menší než 3, a celkový povrch útvarů tedy nebude s klesající velikostí růst nade všechny meze. Spočteme-li celkový povrch, který pokrývají útvary o velikostech 10^{-3} až 10^{-1} m

²²Snímky pořízeny 19. 11. 2005, dostupné na <http://darts.isas.jaxa.jp/planet/project/hayabusa/amica.pl> (ke dni 13. 5. 2014).



Obrázek 32: Tři různé realizace rozmístění hrubého terénu na povrchu Itokawy.

s uvedeným rozdělením, dostaneme $S_{\text{total}} \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ m}^2$. Porovnáním s povrchem Itokawy zjišťujeme, že útvary ve zvoleném rozsahu velikostí zaujímají přibližně třetinu povrchu Itokawy, což je přijatelný výsledek. Na obrázku 31b je porovnáno získané mocninné rozdělení s extrapolací rozdělení (7.16).

Závislost bezrozměrného tlaku na velikosti povrchového útvaru získáme ze spočtených hodnot lineární interpolací pro konstantní hodnotu tepelného parametru $\Theta = 0,5$. Použijeme k tomu výsledek, který jsme získali pro balvan obecného tvaru (průměrovaná závislost na obrázku 27).

Globální YORP je značně citlivý na přesný tvar povrchu (Statler, 2009). Pokusíme se proto určit, jakým způsobem ovlivňuje rozmístění drobných útvarů velikost celkového momentu, kterým útvary působí. K tomu použijeme podobnou metodu, jaká je použita v Lowry et al. (2014) pro výpočet závislosti globálního YORP jevu na rozmístění hrubého povrchu. Povrch Itokawy rozdělíme na *hrubou* a *hladkou* část, přičemž každá z nich zabírá právě polovinu celkového povrchu. Hrubou část generujeme náhodně; příklady rozdělení povrchu na hrubou a hladkou část lze vidět na obrázku 32.

Při výpočtu předpokládáme, že útvary se vzájemně neovlivňují. Za rozdělení velikostí útvarů zvolíme mocninné rozdělení (7.18). Tepelný parametr volíme $\Theta = 0,5$, neboť v této hodnotě dosahuje střední tlak $\langle \Pi \rangle$ svého maxima. Meze velikostí útvarů volíme $\ell_{\min} = 1 \text{ mm}$, $\ell_{\max} = 0,1 \text{ m}$. Útvary velikosti menší než 1 mm nemá smysl uvažovat, pro velké útvary zase neplatí odvozené mocninné rozdělení. Pokusíme se zohlednit stínění globálními nekonvexitami povrchu Itokawy uvážením závislosti středního tlaku na elevačním úhlu ψ , která byla popsána v podkapitole 7.5.2; za elevační úhel přitom volíme úhlovou výšku nejvyššího viditelného bodu povrchu nad lokální rovinou.

Algoritmus výpočtu celkového zrychlení rotace je potom přímočarý:

1. Z mocninného rozdělení ($\gamma = 2,4$) generujeme náhodnou velikost ℓ metodou inverzní transformace²³.
2. Vybereme plošku z hrubé části povrchu a útvar na tuto plošku umístíme. Všechny plošky mají stejnou pravděpodobnost výběru.
3. Spočteme moment síly, kterým tento útvar v daném místě působí. Uvažujeme přitom, že pro radiační sílu, kterou působí útvar, platí $\delta \mathbf{f} \propto \mathbf{e} \times \mathbf{n}$, a tudíž

$$\delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{e} \propto \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) .$$

Zvolíme-li $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{e}}_z = (0, 0, 1)$, potom $\delta \mathbf{T} \cdot \mathbf{e} \propto r_1 n_1 + r_2 n_2$

4. Akceleraci Itokawy dostaneme po vydělení spočteného momentu síly momentem setrvačnosti I , který je dle Scheeres et al. (2007) roven $I \doteq 7,77 \cdot 10^{14} \text{ kg m}^2$.

Útvary umísťujeme tak dlouho, dokud jejich celková plocha nezabírá *třetinu* hrubé části povrchu, neboli *šestinu* celkového povrchu Itokawy. Tato hodnota vyplývá z nalezeného mocninného rozdělení (7.18), pro jednoduchost přitom neuvažujeme chybu normalizační konstanty ani exponentu. Výsledné hodnoty úhlového zrychlení Itokawy pro různá rozmístění hrubého terénu jsme vynesli do histogramu na obrázku 33.

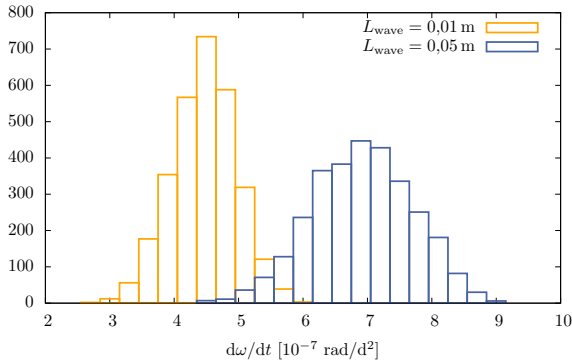
²³Má-li náhodná proměnná X rovnoměrné rozdělení v intervalu $[0, 1]$, potom má náhodná proměnná $F^{-1}(X)$ mocninné rozdělení v intervalu $[\ell_{\min}, \ell_{\max}]$, kde F je kumulativní distribuční funkce mocninné závislosti s hustotou pravděpodobnosti (7.12).

Na základě histogramu můžeme určit střední hodnotu rotačního zrychlení a standardní odchylku způsobenou rozmístěním hrubého povrchu. Pro použité hodnoty L_{wave} dostáváme

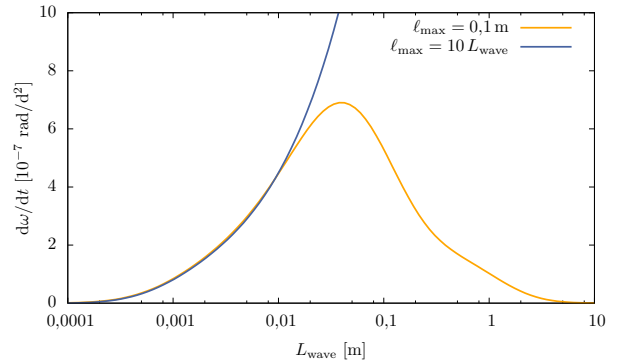
$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{L_{\text{wave}}=0,01 \text{ m}} \approx (4,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-7} \text{ rad/d}^2 ,$$

$$\left. \frac{d\omega}{dt} \right|_{L_{\text{wave}}=0,05 \text{ m}} \approx (7,1 \pm 0,8) \cdot 10^{-7} \text{ rad/d}^2 .$$

Pro jiné hodnoty L_{wave} je střední hodnota zrychlení vynesena v grafu 34. Všimněme si, že při volbě horní meze $\ell_{\text{max}} = 10 L_{\text{wave}}$ roste úhlové zrychlení se zvyšující se tepelnou hloubkou L_{wave} nade všechny meze; to je dáno extrapolací mocninného rozdělení (7.18) do oblastí velkých útvarů. Volbou konstantní horní meze ℓ_{max} konverguje závislost k nule pro velké hodnoty L_{wave} , což je pochopitelně dáno touto „úmělou“ volbou — pro hodnoty $L_{\text{wave}} \sim 1 \text{ m}$ budou hrát největší roli útvary o rozměrech $\sim 1 \text{ m}$, které však v tomto mocninném rozdělení zcela chybí.



Obrázek 33: Histogram znázorňující úhlové zrychlení pro různá rozmístění hrubého povrchu. Hrubý povrch přitom zaujímá polovinu povrchu Itokawy.

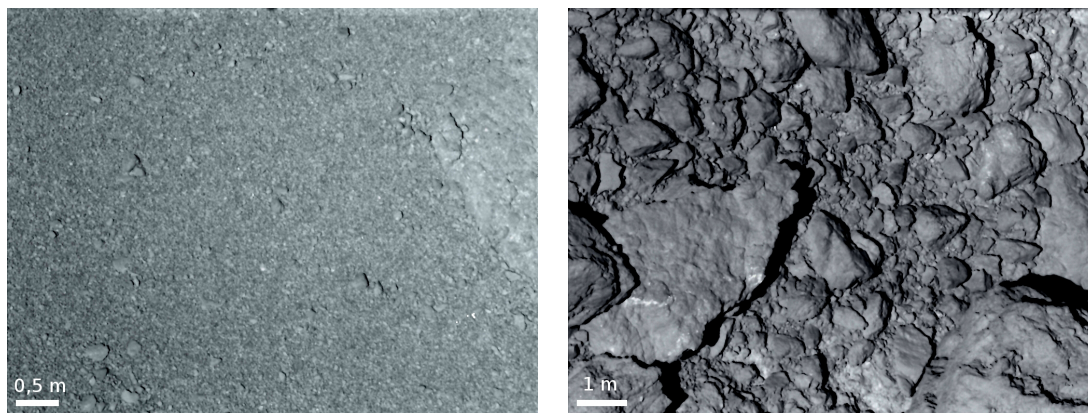


Obrázek 34: Závislost úhlového zrychlení Itokawy na tepelné hloubce L_{wave} . Předpokládáme, že útvary mají mocninné rozdělení velikostí s exponentem $\gamma = 2,4$ a jsou rozmístěny po celém povrchu planetky. Křivky odpovídají různým volbám horní meze ℓ_{max} .

8 Diskuze

Na základě spočtené závislosti momentu síly na velikosti útvaru jsme spočetli úhlové zrychlení, které topografické útvary udělují uvažovaným asteroidům. Náš model má velké množství volných parametrů, které nyní budeme diskutovat.

Fundamentální neznámou představuje **poměrná plocha f útvarů** neboli poměr celkové plochy, kterou zaujímají topografické útvary v relevantním rozmezí velikostí, k celkové ploše povrchu, a taktéž **exponent γ mocninného rozdělení velikostí útvarů**. V kapitole 7.6.2 jsme ukázali, že extrapolace mocninné závislosti (7.16) popisující velké povrchové útvary na Itokawě do uvedeného rozmezí nepřipadá v úvahu. Proto jsme se pokusili rozdělení velikostí odhadnout na základě detailních snímků povrchu Itokawy, které pořídila sonda Hayabusa. Snímky zachycují útvary velikostí od jednotek centimetrů výše a odvozené rozdělení velikostí je tak zřejmě nejlepším odhadem, který můžeme z dostupných informací získat. Otázkou je, nakolik je možné ze snímků omezené části povrchu usuzovat na celkové rozdělení velikostí. Mocninné rozdělení bylo odvozené podle snímků části povrchu, ve které se vyskytuje velké množství útvarů velikosti v řádu centimetrů a ve které naopak chybí útvary metrových rozměrů. Na obrázku 35 jsou ostatně porovnána dvě různá místa povrchu, na nichž se rozdělení velikostí útvarů podstatně liší.



(a) Snímek ST_2563607030_v.

(b) Snímek ST_2539437177_v.

Obrázek 35: Dva snímky různých míst povrchu Itokawy; pozorujeme zcela odlišnou topografii.

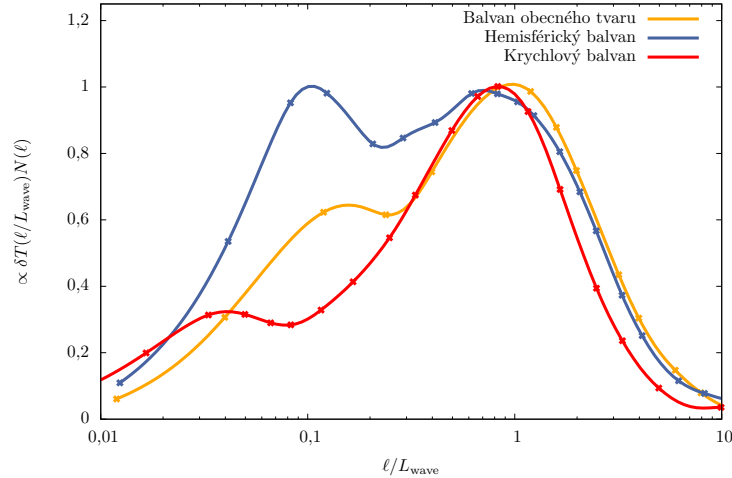
Vliv rozmístění útvarů jsme zohlednili náhodným rozdělením povrchu na hrubou a hladkou část. Ukazuje se, že závislost na poloze útvarů je relativně slabá, případy největší a nejmenší akcelerace se liší faktorem 2 (viz obrázek 33). Ve srovnání s ostatními volnými parametry problému je vliv rozmístění útvarů nepříliš významný.

Pokud nebudeme uvažovat vzájemnou interakci (stínění, ozařování) útvarů, potom je výsledný moment síly přímo úměrný poměrné ploše útvarů, $T \propto f$. Spočtené zrychlení pro sférický asteroid, resp. pro planetku Itokawa, lze tedy jednoduše upravit, pokud bychom chtěli uvážit menší množství topografických útvarů.

Problematickým parametrem je **tvar** povrchových útvarů, zejména jejich **plochost**. Porovnejme ostatně grafy 24 a 26. Hemisférický balvan je výrazně plošší oproti balvanu krychlovému, a jeho střední bezrozměrný tlak se tak liší faktorem 5. O rozdělení plochosti útvarů nemáme takřka žádné informace, jediným vodítkem mohou být stíny vrhané útvary na snímcích povrchu.

Při výpočtu jsme zvolili **meze velikostí uvažovaných útvarů** jako $\ell_{\min} = 1 \text{ mm}$, $\ell_{\max} = 0,1 \text{ m}$. Uvažované mocninné diferenciální rozdělení má exponent $\gamma = 2,4$, součet povrchů útvarů bude proto konečný i při uvážení $\ell_{\min} = 0$. Moment síly působící na jediný útvar je však úměrný $\delta T \propto \langle \Pi \rangle \ell^2$, kde $\langle \Pi \rangle$ označuje střední bezrozměrný tlak. Celkový moment, kterým působí povrchové útvary o velikosti v intervalu $(\ell, \ell + d\ell)$ bude úměrný $\langle \Pi \rangle \ell^2 N(\ell) d\ell \propto \langle \Pi \rangle \ell^{-0,4} d\ell$. Na obrázku 36 je tato závislost vy-

kreslena pro tři uvažované tvary balvanů: krychli, hemisféru a balvan obecného tvaru. Pozorujeme, že moment nediverguje pro $\ell \rightarrow 0$, a i při uvážení $\ell_{\min} = 0$ tak nebudou mikrometrové útvary (formálně) působit větším momentem než útvary centimetrových velikostí. Přesto však mohou submilimetrové útvary výrazně ovlivnit spočtenou hodnotu úhlového zrychlení. Otázkou je, zdali se takto velké útvary stále chovají jako jednotlivé kameny, nebo zda tvoří souvislou vrstvu materiálu. Jak jsme viděli na případu hemisférického balvanu, střední tlak je výrazně menší, pokud útvar vyčnívá nad okolní povrch pouze malou částí. Z toho důvodu nemá význam uvažovat útvary velice malých rozměrů.



Obrázek 36: Normovaná hodnota celkového momentu síly, kterým působí povrchové útvary velikosti ℓ , uvažujeme-li mocninné rozdělení velikostí s exponentem $\gamma = 2,4$. Hodnota tepelného parametru byla zvolena $\Theta = 0,5$. Srovnáme-li křivku odpovídající hemisférickému balvanu s grafem 26, pozorujeme, že útvary o velikosti $\ell \simeq 0,1 L_{\text{wave}}$ působí momentem síly o podobné velikosti jako útvary velikosti $\ell \simeq L_{\text{wave}}$.

Výsledný moment je také závislý na materiálových parametrech, zejména na **tepelné vodivosti** K asteroidu. Tepelná vodivost se může pohybovat v relativně velkém rozmezí, od 10^{-3} W/m/K, například pro regolit, až po řádově 10^1 W/m/K pro materiály s vysokým obsahem kovů (Farinella et al., 1998). Pro různé hodnoty vodivosti přitom budou maximálním momentem síly působit povrchové útvary různých velikostí. Výpočet úhlového zrychlení Itokawy jsme provedli pro dvě různé hodnoty tepelné vodivosti, dvojnásobná hodnota vodivosti zde vede k vyššímu momentu o přibližně 50 %.

Diskuze ročního lokálního YORP jevu

Zjednodušením našeho numerického modelu byla volba rotační osy kolmé k rovině dráhy. Tehdy nemusíme uvažovat orbitální pohyb, a stačí tak středovat výsledný moment síly přes rotační periodu. Pokud uvážíme obecnou polohu rotační osy, s oběhem planety kolem Slunce bude docházet ke změnám insolační funkce a projeví se roční změny teploty. Očekáváme proto, že roční varianta lokálního YORP jevu se objeví na útvarech, jejichž velikost je srovnatelná s roční tepelnou hloubkou, která se pohybuje v řádu metrů (Rozitis & Green, 2012).

Zatímco denní lokální YORP jev způsobuje změnu úhlové frekvence asteroidu, neboť radiační síla způsobená rozdílem teplot na západní a východní straně útvaru působí ve směru rotace asteroidu. Oproti tomu, roční lokální YORP jev vzniká rozdílem teplot na severní a jižní straně útvaru. Reakční síla je tak *rovnoběžná* s osou rotace a nebude způsobovat změnu úhlové frekvence, ale pouze precesi a změnu šikmosti asteroidu. Z našich výpočtů není možné usuzovat na důležitost ročního jevu, zde je tedy prostor pro budoucí výzkum.

Diskuze posunu těžiště Itokawy

Z obrázku 33 vidíme, že velikost úhlového zrychlení Itokawy je srovnatelná s velikostí zpomalení, které vychází z modelu globálního YORP jevu ($d\omega/dt = 2$ až $6 \cdot 10^{-7}$ rad/d² podle použitého rozlišení tvaru Breiter et al. (2009)). Přesto, že je v našem výpočtu množství volných parametrů, topografické útvary mohou vysvětlit nesoulad mezi pozorovanou změnou úhlové frekvence Itokawy a hodnotou, kterou předpovídá model globálního YORP jevu.

Tím ovšem vzniká otazník nad prací Lowry et al. (2014), ve které je tento nesoulad vysvětlen posunem těžiště Itokawy. Na základě tohoto výsledku je pak určen rozdíl mezi hustotou „hlavičky“ a „těla“ Itokawy, přičemž vliv lokální topografie je ignorován. Ukázali jsme, že tento závěr je pravděpodobně nepřesný; topografické útvary mají na rotaci Itokawy velký vliv. I v případě, že by byl náš výsledek nadhodnocen například nereálně velkou hodnotou středního tlaku $\langle \Pi \rangle$, posun těžiště, a tedy i rozdíl hustot obou částí Itokawy nemusí být tak vysoký, jak uvádí Lowry et al. (2014).

Limitní chování středního tlaku

Střední bezrozměrný tlak $\langle \Pi \rangle$, zavedený v kapitole 7.2, je vhodnou veličinou pro charakterizaci lokálního YORP jevu. Za nezávislé parametry jsme zvolili tepelný parametr Θ a velikost útvaru normovanou tepelnou hloubkou ℓ/L_{wave} . Z výpočtů plyne, že střední tlak v prostoru těchto parametrů nabývá maxima pro $\Theta \sim 1$ a $\ell \sim L_{\text{wave}}$. V limitních případech $\Theta \gg 1$, $\Theta \ll 1$, $\ell \gg L_{\text{wave}}$ nebo $\ell \ll L_{\text{wave}}$ střední tlak klesá k nule, jak lze vidět z grafu 21b. Stejný závěr vyplývá i z práce Golubov & Krugly (2012).

Pokusme se nahlédnout, proč lokální YORP jev vymizí ve zmíněných limitních případech. Pokud je povrchový útvar **příliš velký**, tzn. $\ell \gg L_{\text{wave}}$, dojde k zahřátí pouze malé povrchové vrstvy útvaru. Tepelná vlna z raní strany útvaru zanikne dříve, než projde na stranu odpolední. Střední bezrozměrný tlak působící na obě strany útvaru proto bude stejný, a ve výsledku střední moment síly, kterým působí povrchový útvar na asteroid, zanikne. Připomeňme, že tento závěr platí tehdy, je-li útvar symetrický podle roviny místního poledníku.

V případě, kdy je útvar **příliš malý**, tzn. $\ell \ll L_{\text{wave}}$, se při zahřátí jedné strany útvaru takřka současně zahřeje i strana druhá. Obě strany útvaru tak po celý den mají stejnou teplotu, a okamžitý moment síly, kterým útvar působí, zaniká, jak jsme ověřili v kapitole 4.5. Tento výsledek platí i pro obecně asymetrické útvary, viz limitní chování různých orientací balvanu obecného tvaru na obrázku 27.

Pokud asteroid rotuje **příliš rychle**, tzn. $\Theta \gg 1$, amplitudy teplotních změn na stěnách útvaru jsou velice malé, rozdíl radiačních sil, kterými stěny útvaru působí, a v důsledku i výsledný moment síly vymizí. V opačném případě, kdy asteroid rotuje **příliš pomalu**, tzn. $\Theta \ll 1$, klesá rychlost tepelné vlny k nule, a povrchová teplota je tak dána okamžitou rovnováhou mezi dopadajícím zářením a tepelnou emisí. I v tomto případě výsledný střední moment zaniká.

Mějme na paměti, že výše uvedené úvahy platí pro jediný útvar velikosti ℓ . Uvážíme-li velké množství topografických útvarů, pak pro různé úhlové frekvence budou hrát roli útvary různých velikostí, neboť maxima středního tlaku je dosaženo pro $\ell \simeq L_{\text{wave}}$. Hodnota úhlové frekvence, pro kterou bude celkový YORP jev od povrchových útvarů nejvýraznější, logicky závisí na exponentu mocninného rozdělení velikostí útvarů.

Rovnovážný stav mezi lokálním a globálním jevem

Zajímavou vlastností lokálního YORP jevu je neměnný směr jeho působení. Povrchové útvary *vždy* způsobují urychlování rotace asteroidu, jak lze vidět z grafů 22 nebo 24. Oproti tomu vlivem globálního YORP jevu může docházet k urychlování i ke zpomalování rotace asteroidu, změna úhlové frekvence je přitom nezávislá na její okamžité hodnotě. Pro lokální jev tomu tak není, moment síly dosahuje výrazných hodnot pouze v okolí určité úhlové frekvence (která závisí na materiálových a topografických parametrech asteroidu); pro velice rychle rotující i velice pomalu rotující asteroidy lokální jev zaniká.

Uvažme situaci, kdy asteroid rotuje rychlostí, která je příliš velká na to, aby lokální jev měl výraznější vliv na rotační dynamiku. Globální YORP jev způsobuje zpomalování rotace. S klesající úhlovou frekvencí dochází k nárůstu momentu síly, kterým působí topografické útvary, a lokální jev

začíná vyvažovat jev globální — zpomalování se zvolňuje. Pokud je na povrchu asteroidu dostatečné množství útvarů, lokální jev je schopen vyrovnat globální jev nebo jej dokonce převážit. V takovém případě se asteroid dostane do *rovnovážného stavu*, kdy se zpomalování způsobené globálním tvarem přesně rovná urychlování způsobeném topografickými útvary, a úhlová frekvence se nadále nemění. Globální YORP jev tak bude měnit pouze šikmost asteroidu, dokud nedojde k narušení rovnováhy.

9 Závěr

V této práci jsme se zabývali vlivem povrchových útvarů na úhlové zrychlení asteroidu. Naším cílem bylo odhadnout řádovou velikost momentu síly, kterým působí infračervené záření emitované z povrchových útvarů, a nalézt jeho závislost na materiálových a orbitálních parametrech. Pomocí programu **FreeFem++** jsme řešili třídímní rovnici vedení tepla v balvanu a na základě povrchového rozložení teploty jsme určili moment síly, kterým tento útvar na asteroid působí. Na modelovém příkladu — sférickém asteroidu — jsme ukázali, že pokud je povrch pokryt drobnými balvany z jedné desetiny, může být vlivem YORP jevu urychlován o $(1,2 \pm 0,6) \cdot 10^{-8} \text{ rad/d}^2$. Srovnatelný výsledek vyplývá z modelu globálního YORP jevu pro syntetické tvary asteroidů (Čapek & Vokrouhlický, 2004).

V našem výpočtu je množství volných parametrů (tvar balvanů, celkový počet balvanů a rozdělení jejich velikostí, materiálové parametry), pozorujeme však, že lokální YORP jev vznikající na povrchových útvech *má potenciál* výrazně ovlivnit úhlovou frekvenci asteroidu. Bez detailní znalosti topografie planety proto nejspíš není možné vyvodit kvantitativní závěry týkající se jejího úhlového zrychlení. Pokud totiž na planetce zcela chybí topografické útvary vhodných velikostí, bude lokální YORP jev zanedbatelný, pokud ale bude planetka naopak hustě pokryta útvary, lokální YORP jev může dokonce převážit jev globální. Tato situace možná nastává na planetce (25143) Itokawa — z modelů globálního YORP jevu vyplývá zpomalování rotace řádu 10^{-7} rad/d^2 (Breiter et al., 2009), ze světelných křivek však bylo určeno zrychlení rotace o velikosti $(3,54 \pm 0,38) \cdot 10^{-8} \text{ rad/d}^2$ (Lowry et al., 2014). Ukázali jsme, že povrchové útvary mohou planetce udělit zrychlení řádu 10^{-7} rad/d^2 a globální YORP jev tak kompenzovat.

Zjistili jsme, že symetrické povrchové útvary *vždy* způsobují akceleraci asteroidu. Stejný závěr bude platit i při uvážení všech povrchových útvarů, pakliže jsou útvary náhodně orientovány. Lokální YORP jev můžeme chápat jako složení jevu vzniklého asymetrií útvaru a jevu způsobeného laterálním vedením tepla útvarem. Příspěvky od asymetrie působí různými směry a navzájem se vyruší. Pro velké množství náhodně orientovaných povrchových útvarů proto nebude vliv asymetrie útvarů patrný. Oproti tomu příspěvky od laterálního vedení tepla působí silou ve směru rotace, a tak se navzájem sčítají. Celkově útvary způsobují zrychlení rotace asteroidu. Tento závěr je odlišný od chování jevu globálního, který může rotaci asteroidu urychlovat i zpomalovat (Rubincam, 2000).

A Stíny a viditelnost

A.1 Průsečík paprsku s trojúhelníkem

Základním problémem je najít průsečík (polo)přímky a trojúhelníku a rozhodnout, zda-li leží uvnitř či vně. Trojúhelník je určen svými třemi vrcholy, definované pomocí kartézských souřadnic. Polopřímka je pak dána parametricky, tedy jako množina bodů

$$\{\mathbf{R} + t\mathbf{U}, t \geq 0\} , \quad (\text{A.1})$$

kde \mathbf{R} je počáteční bod polopřímky a vektor \mathbf{U} udává směr. Přímka, resp. úsečka by se lišila pouze intervalem parametrických hodnot, tedy $t \in \mathbb{R}$, resp. $t \in \langle a, b \rangle$.

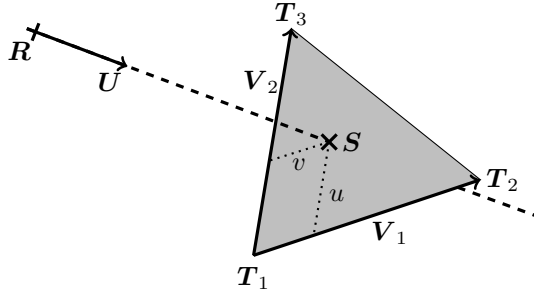
Rovina je v trojrozměrném prostoru definována normálovým vektorem \mathbf{N} a referenčním bodem \mathbf{P} , bod \mathbf{Q} leží v této rovině, pokud je vektor $\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ kolmý na normálu, neboli

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{N} = 0 .$$

Tento vztah můžeme přepsat do obvyklejšího tvaru, který nazýváme *rovnici roviny*

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} + d = 0 ,$$

kde jsme zavedli $d = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$. Rovinu pak zkráceně označujeme $\langle \mathbf{N}, d \rangle$. Je-li normála jednotkové délky, potom je d (orientovaná) vzdálenost roviny od počátku souřadnic a pro libovolný bod \mathbf{Q} je výraz $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} + d$ roven vzdálenosti bodu od roviny. Tři vrcholy trojúhelníku označíme \mathbf{T}_i , $i = 1, 2, 3$.



Obrázek 37: Geometrie a užitá značení pro test paprsek-troúhelník.

Sestrojíme rovinu $\langle \mathbf{N}, d \rangle$, ve které body \mathbf{T}_i leží. Označíme

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 , \\ \mathbf{V}_2 &= \mathbf{T}_3 - \mathbf{T}_1 , \\ \mathbf{N} &= \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 . \end{aligned}$$

Vektor \mathbf{N} je kolmý k oběma stranám trojúhelníku, a tudíž představuje hledanou normálu k rovině, obecně nejednotkové délky²⁴. Koeficient d je dle definice roven $-\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$, kde \mathbf{P} je libovolný bod v rovině, BÚNO volíme $\mathbf{P} = \mathbf{T}_1$. Rovnice roviny, ve které body \mathbf{T}_j leží, je proto

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}_1 = 0 . \quad (\text{A.2})$$

Nyní najdeme průsečík (polo)přímky a roviny. Tento bod \mathbf{S} musí jednak splňovat rovnici (A.2), zároveň však musí existovat takové t , že $\mathbf{S} = \mathbf{R} + t\mathbf{U}$. Pro hledání průsečíku na polopřímce či úsečce je navíc

²⁴Ve výpočtu normály je možné permutovat body \mathbf{T}_i , výsledek se však bude lišit nejvýše o znaménko souřadnic normály. Stejně tak se poté bude lišit znaménko d . Znaménko normály určuje „kladný“ a „záporný“ poloprostor. V praxi přirozeně orientujeme normálu tak, aby směřovala ven od tělesa.

dodatečnou podmínkou $t \geq 0$, resp. $t \in \langle a, b \rangle$. Z obou rovnic můžeme nyní vyjádřit parametr t ,

$$t = -\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{N} + d}{\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}}.$$

Případ kdy $\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} = 0$ a parametr t tedy není definován odpovídá situaci, kdy je (polo)přímka rovnoběžná s rovinou a průsečík neexistuje. V případě, kdy $t < 0$, existuje průsečík s odpovídající přímkou, ne však s polopřímkou.

Průsečík dostaneme po dosazení parametru t do parametrické definice přímky (A.1),

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{N} + d}{\mathbf{U} \cdot \mathbf{N}} \mathbf{U}. \quad (\text{A.3})$$

Obecně neleží v trojúhelníku \mathbf{T}_i , nutně však leží ve stejné rovině jako tyto body, a existují tedy *barycentrické souřadnice* u, v takové, že

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_1 + u\mathbf{V}_1 + v\mathbf{V}_2. \quad (\text{A.4})$$

Všimneme si, že takto definované souřadnice přirozeně definují podmínky, za kterých bude bod \mathbf{V} náležet trojúhelníku, a to následovně:

$$u \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

$$v \geq 0, \quad (\text{A.6})$$

$$u + v \leq 1. \quad (\text{A.7})$$

Zbývá tyto souřadnice nalézt. Rovnice (A.4) představuje de facto tři rovnice pro dvě neznámé (při rozepsání do souřadnic). Přesto však nestačí vyřešit např. soustavu rovnic pro x a y souřadnici, neboť v situaci, kdy bude rovina $\langle \mathbf{N}, d \rangle$ kolmá na rovinu $z = \text{konst}$, soustava nebude mít řešení (a bylo by tedy třeba řešit např. rovnice pro souřadnice x a z). Situaci lze však řešit bez závislosti na souřadnicích. Vynásobením rovnice (A.3) skalárně s vektorem \mathbf{V}_1 a \mathbf{V}_2 dostaneme dvě rovnice s neznámými u a v , řešení:

$$u = \frac{(\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2)(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{W}) - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)(\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{W})}{(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2) - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)^2},$$

$$v = \frac{(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{W}) - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{W})}{(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1)(\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2) - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)^2},$$

kde $\mathbf{W} = \mathbf{S} - \mathbf{T}_1$. Vidíme, že souřadnice u, v jsou dobře definované, pokud trojúhelník není degenerovaný, tj. pokud nejsou body \mathbf{T}_j kolineární.

A.2 Stínící funkce $\mu(\mathbf{r})$

Stínící funkce $\mu(\mathbf{r})$ je definována na hranici oblasti $\partial\Omega$ a nabývá hodnot 1, je-li bod \mathbf{r} osvětlen Sluncem, a 0, pokud leží bod \mathbf{r} ve stínu. Můžeme přitom rozlišit dva „druhy“ stínu. Bod \mathbf{r} bude ležet ve stínu, pokud bude místní normála \mathbf{n} odvrácená od Slunce, tj. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\odot < 0$, kde \mathbf{n}_\odot je vektor směřující ke Slunci. Tato podmínka nezávisí na ostatních bodech povrchu. Pokud však bude normála Slunci přivrácená, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\odot > 0$, bod \mathbf{r} stále může ležet ve stínu, a to ve stínu vrhaném okolními částmi povrchu.

Hranice $\partial\Omega$ je popsána množinou trojúhelníkových plošek. Z výpočetních důvodů omezíme stínící funkci na celé plošky. Přičemž daná ploška je zastíněná, jestliže je zastíněná její *těžiště*.

Nyní stručně popíšeme algoritmus výpočtu zastínění.

- I) Zvol povrchovou plošku — referenční.
- II) Pokud je referenční ploška odvrácená od Slunce, tedy

$$\mathbf{n}_\odot \cdot \mathbf{n}_{\text{ref}} < 0,$$

pak je ploška zastíněná; pokračuj bodem I).

III) Nalezni těžiště referenční plošky \mathbf{R} .

IV) Pro všechny povrchové plošky:

- i) Zvol povrchovou plošku — testovací.
- ii) Pokud je testovací ploška přivrácená ke Slunci, tedy

$$\mathbf{n}_{\odot} \cdot \mathbf{n}_{\text{test}} > 0 ,$$

nemůže vrhat stín; pokračuj bodem i).

- iii) Nalezni průsečík \mathbf{S} polopřímky $\{\mathbf{R} + t\mathbf{n}_{\odot}, t \geq 0\}$ s rovinou testovací plošky. Pokud neexistuje, pokračuj bodem i).
- iv) Nalezni barycentrické souřadnice u, v průsečíku \mathbf{S} . Pokud splňují podmínky (A.5) – (A.7), průsečík leží uvnitř trojúhelníka. Testovací ploška tedy vrhá stín na plošku referenční. Pokračuj bodem I).

V) Referenční ploška není zastíněna. Pokračuj bodem I).

Algoritmus postupně projde všechny povrchové plošky a přiřadí jim hodnotu stínící funkce. Zastínění povrchu se samozřejmě mění s časem, a hodnoty stínící funkce je proto nutné spočítat v každém časovém kroku.

A.3 Viditelnostní funkce $\nu(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$

Viditelnostní funkce ν je definována pro všechny dvojice bodů \mathbf{r}, \mathbf{r}' ležících na hranici oblasti $\partial\Omega$. Nabývá hodnoty 1, pokud na sebe body \mathbf{r}, \mathbf{r}' vidí, a 0 v opačném případě. Přesněji, funkce nabývá hodnoty 1, pokud spojnice bodů \mathbf{r}, \mathbf{r}' neprochází vnitřkem oblasti Ω a hranici této oblasti protne právě v bodech \mathbf{r}, \mathbf{r}' , a 0 v opačném případě. Z praktických důvodů omezíme viditelnost libovolných dvou bodů na viditelnost dvojic povrchových plošek.

I) Vyber dvojici povrchových plošek, označ jejich těžiště $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$.

II) Označ vektor $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. Pokud platí alespoň jedna z rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} &< 0 , \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} &> 0 , \end{aligned}$$

potom se nachází jedna z plošek pod horizontem druhé a nemají vizuální kontakt.

III) Pro všechny povrchové plošky:

- i) Zvol povrchovou plošku — testovací.
- ii) Nalezni průsečík \mathbf{S} úsečky $\{\mathbf{R}_1 + t(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), t \in (0, 1)\}$ s rovinou testovací plošky. Pokud neexistuje, pokračuj bodem i).
- iii) Nalezni barycentrické souřadnice u, v průsečíku \mathbf{S} . Pokud splňují podmínky (A.5) – (A.7), průsečík leží uvnitř trojúhelníka. Testovací ploška tedy leží mezi body \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 . Pokračuj bodem I).

IV) Body \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 na sebe vidí. Pokračuj bodem I).

Bod III) je přitom možné vynechat, je-li zkoumaná oblast „málo nekonvexní“. Např. v případě krychle ležící na rovném povrchu na sebe vidí všechny body, pro které je splněn bod II). V takovém případě je algoritmus složitosti $\mathcal{O}(N^2)$. V obecném případě je nutno pro každou dvojici plošek kontrolovat, zdali jejich spojnice neprotíná některou z povrchových plošek, algoritmus je proto složitosti $\mathcal{O}(N^3)$.

B FreeFem++

Pro řešení rovnice vedení tepla užíváme programu **FreeFem++** (Hecht, 2012), verzi 3.21 z 5. 3. 2013. Tento program slouží k řešení 2D a 3D parciálních diferenciálních rovnic metodou konečných prvků. Je napsán v C++ a samotná syntax jazyka je idiom C++. V programu je dostupné velké množství numerických metod k řešení lineárního problému (6.7), používáme metodu sdružených gradientů (CG), která je vhodná pro řídké systémy vysoké dimenze. Program je volně dostupný pro Windows, Mac i Linuxové systémy²⁵. V této kapitole uvádíme významné části používaného kódu se stručným komentářem.

Slabá formulace problému

Níže je uveden kód definující lineární problém, který řešíme metodou konečných prvků. Srovnejte tento kód se slabou formulací problému (6.29).

```

1 problem HDE(u,n,solver=CG)
2   = int3d(Th) (K/S^2*(dx(u)*dx(n) + dy(u)*dy(n) + dz(u)*dz(n)))
3   + int3d(Th) (rho*C*u/dt*n) - int3d(Th) (rho*C*u0/dt*n)
4   + int2d(Th, SURFACE) (epsil*sigma/S*u*v^3*n)
5   - int2d(Th, SURFACE) ((1-Ah)*Phi/S*n*Shadow)*(N.x*sun[0]+N.y*sun[1]+N.z*sun[2])
6   - int2d(Th, SURFACE) ( SelfHeating() * n / S)
7   + on(BOTTOM, u=U)
8   + on(SIDE, u=Utheory());

```

Funkce u a n odpovídají hledané teplotě \hat{u} , resp. váhové funkci v Galerkinově metodě N_i . Konstanty K , ρ , C , ϵ , σ , A_h , Φ značí po řadě tepelnou vodivost K , hustotu ρ , měrnou tepelnou kapacitu C , emisivitu ϵ , Stefanovu-Boltzmannovu konstantu σ , hemisférické albedo A_h a zářivý tok Slunce v místě asteroidu Φ_{\odot} . Jednotkový vektor ve směru Slunce, \mathbf{n}_{\odot} , je označen `sun`. Parametr S je škálovací faktor S (viz kapitolu 5.4), časový krok Eulerovy metody Δt je označen `dt`. Funkce užívané v problému, `Shadow()`, `SelfHeating()` a `Utheory()`, odpovídají stínící funkci $\mu(\mathbf{r})$, zářivému toku z rozptylu a tepelné emise z viditelných částí povrchu \mathcal{E}_{rad} a analytickému řešení teploty $u_{\text{theory}}(z, t)$. Popisky `SURFACE`, `BOTTOM`, `SIDE` označují části hranice oblasti Ω , zde značené `Th`.

Hlavní část programu — řešení problému a výpočet tlaku

Dva `for` cykly odpovídají časovému průběhu, resp. iteračnímu procesu v rámci jednoho časového kroku. Po nalezení teploty spočteme bezrozměrný tlak působící na útvar. Na konci každé periody zapíšeme střední hodnotu tlaku.

```

1 for (s=0; s<sstop; s+=ds)
2 {
3   if (abs(s-rint(s))<0.01) s = rint(s); // eliminate round-off errors
4   UpdateSun;
5   t = s / 360. * P;
6
7   for (j=0; j<niter; j++)
8   {
9     if (useradflux || usescflux) UpdateSelfHeating();
10    HDE; // solve problem
11    diff = u-v;
12    u = rp*u + (1-rp)*v; // relaxation
13    v = u;
14    res = diff[]*diff[]; // residue
15    if (res<eps) break;
16    if (j==niter-1) errout << "not finished after " << niter << " iterations" << endl;
17  }
18  u0 = u;
19
20  // dimensionless pressure

```

²⁵Program je dostupný na adrese <http://www.freefem.org/ff++/> (ke dni 16. 5. 2014).

```

21   real pr = 2./3 * int2d(Th, BOULDER) ( (u/Usubs)^4 * N.x ) / normarea;
22
23   mpr -= pr;
24   cnt++;
25
26   if (s%360 == 359)
27   {
28       info << "      " << mpr / cnt;
29       mpr = cnt = 0;
30   }
31 }

```

Výpočet stínění

Funkce UpdateShadow() projde všechny povrchové plošky a podle aktuální polohy Slunce (reprezentované polohovým vektorem sun) zjistí, které plošky jsou zastíněné.

```

1  func bool UpdateShadow()
2  {
3      if (!useshading) return false;
4      real[int] is(3); // coordinates of intersection
5      real[int] v1(3); // coordinates of ray source
6      real k, l;
7      for (int i=0; i<Th.nbe; i++)
8      {
9          if (Th.be(i).label >= VIRTUAL || DotArray(sun, shape, i) < 0 || sun[Z] < 0)
10             // not a surface, wrong normal or night time
11             {
12                 shadow(i) = 0.0;
13                 continue;
14             }
15         GetCentroid(v1, Th, i);
16         bool foundint = false;
17         for (int m=0; m<Th0.nbe && !foundint; m++)
18         {
19             k~ = DotArray(sun, mask, m);
20             if (k>=-ZERO) continue; // either parallel case or triangle facing the sun
21
22             // find the intersection of ray with plane
23             l = -(DotArray(v1, mask, m)+mask(m,W)) / k;
24
25             if (l<=-ZERO || l>INFY)
26                 // intersection is on the other half-space or in the "infinity"
27                 continue;
28
29             is[X] = v1[X]+l*sun[X];
30             is[Y] = v1[Y]+l*sun[Y];
31             is[Z] = v1[Z]+l*sun[Z];
32
33             // point-inside-the-triangle test
34             real[int] a(3), b(3), c(3);
35
36             a[X] = Th0.be(m)[1].x-Th0.be(m)[0].x;
37             a[Y] = Th0.be(m)[1].y-Th0.be(m)[0].y;
38             a[Z] = Th0.be(m)[1].z-Th0.be(m)[0].z;
39             b[X] = Th0.be(m)[2].x-Th0.be(m)[0].x;
40             b[Y] = Th0.be(m)[2].y-Th0.be(m)[0].y;
41             b[Z] = Th0.be(m)[2].z-Th0.be(m)[0].z;
42             c[X] = is[X]-Th0.be(m)[0].x;
43             c[Y] = is[Y]-Th0.be(m)[0].y;
44             c[Z] = is[Z]-Th0.be(m)[0].z;
45
46             real denom = 1 / ((Dot(a,a)) * (Dot(b,b)) - (Dot(a,b))^2);
47             real c1 = ((Dot(b,b)) * (Dot(c,a)) - (Dot(a,b)) * (Dot(c,b))) * denom;

```

```

48     real c2 = ((Dot(a,a)) * (Dot(c,b)) - (Dot(a,b)) * (Dot(c,a))) * denom;
49     if ((c1 >= -ZERO) && (c2 >= -ZERO) && (c1+c2 <= 1+ZERO))
50     {
51         shadow(i) = 0.0;
52         foundint = true;
53     }
54 }
55 if (!foundint)
56     shadow(i) = 1.0;    // no intersection => illumination
57 }
58 return true;
59 }

```

Viditelnost

Pro každou plošku vytvoříme seznam viditelných plošek `vispts` a také seznam viditelnostních koeficientů `viscoef`. Viditelnostním koeficientem plošky i vzhledem k plošce j nazýváme

$$f_{i,j} = \frac{\cos \vartheta_i \cos \vartheta_j}{r_{ij}^2} S_j ,$$

kde ϑ_i , resp. ϑ_j značí úhel mezi normálou plošky i , resp. j a spojnicí těchto plošek, r_{ij} značí jejich vzdálenost a S_j obsah plošky j . Výhodu zavedení těchto koeficientů zjistíme po diskretizaci tepelné emise od viditelných částí povrchu. Záměnou integrálu (3.24) za sumu povrchových plošek dostáváme

$$\mathcal{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}_i) = (1 - A_{\text{IR}}) \sum_{j=1}^N \varepsilon \sigma u_j^4 \frac{\cos \vartheta_i \cos \vartheta_j}{r_{ij}^2} S_j \nu_{ij} = (1 - A_{\text{IR}}) \sum_{j=1}^N \varepsilon \sigma u_j^4 f_{i,j} \nu_{ij} ,$$

kde u_j je teplota plošky j . Při výpočtu zářivého toku \mathcal{E}_{rad} dopadajícího na i -tou plošku nám tak stačí vynásobit čtvrtou mocninou teploty j -té plošky viditelnostním koeficientem a tyto hodnoty sečíst pro všechny viditelné plošky.

```

1  func bool PrecompVisibility()
2  {
3      if (!useshading) return false;
4      real[int] is(3);    // coordinates of intersection
5      real[int] v1(3);    // coordinates of ray source
6      real[int] v2(3);    // coordinates of ray target
7      real[int] ray(3);   // ray
8      real[int] r0(3);   // direction of ray
9      real k, s;
10     int idx = 0;
11
12     for (int i=0; i<Th.nbe; i++)
13     {
14         viscoef(i, 0) = 0;
15         vispts(i, 0) = -1;
16         if (Th.be(i).label >= VIRTUAL) continue;    // not a surface
17         GetCentroid(v1, Th, i);
18         idx = 0;
19         for (int j=0; j<Th.nbe; j++)
20         {
21             if (i==j) continue;
22             if (Th.be(j).label >= VIRTUAL) continue;    // not a surface
23
24             GetCentroid(v2, Th, j);
25             Sub(ray, v2, v1);
26             real length = Length(ray);
27             Mult(r0, ray, 1/length);
28
29             if (DotArray(r0, shape, i) < ZERO || DotArray(r0, shape, j) > -ZERO)

```



```

30         // ray goes to the ground
31         continue;
32
33     bool foundint = false;
34     for (int m=0; m<Th0.nbe && !foundint; m++)
35     {
36         k = DotArray(ray, mask, m);
37         if (k>=0) continue;
38         // find the intersection of ray with plane
39         s = -(DotArray(v1, mask, m) + mask(m,W)) / k;
40         if (s<=ZERO || s>1-ZERO)
41             continue;
42
43         is[X] = v1[X]+s*ray[X];
44         is[Y] = v1[Y]+s*ray[Y];
45         is[Z] = v1[Z]+s*ray[Z];
46         // point-inside-the-triangle test
47         real[int] a(3), b(3), c(3);
48         a[X] = Th0.be(m)[1].x-Th0.be(m)[0].x;
49         a[Y] = Th0.be(m)[1].y-Th0.be(m)[0].y;
50         a[Z] = Th0.be(m)[1].z-Th0.be(m)[0].z;
51         b[X] = Th0.be(m)[2].x-Th0.be(m)[0].x;
52         b[Y] = Th0.be(m)[2].y-Th0.be(m)[0].y;
53         b[Z] = Th0.be(m)[2].z-Th0.be(m)[0].z;
54         c[X] = is[X]-Th0.be(m)[0].x;
55         c[Y] = is[Y]-Th0.be(m)[0].y;
56         c[Z] = is[Z]-Th0.be(m)[0].z;
57
58         real denom = 1 / ((Dot(a,a) * (Dot(b,b)) - (Dot(a,b))^2);
59         real c1 = ((Dot(b,b) * (Dot(c,a)) - (Dot(a,b) * (Dot(c,b)))) * denom;
60         real c2 = ((Dot(a,a) * (Dot(c,b)) - (Dot(a,b) * (Dot(c,a)))) * denom;
61         if ((c1 >= -ZERO) && (c2 >= -ZERO) && (c1+c2 <= 1+ZERO))
62         {
63             // facets i and j don't have visual contact
64             foundint = true;
65         }
66     }
67     if (!foundint) // facets i and j DO have visual contact
68     {
69         viscoef(i, idx) = -DotArray(r0, shape, i) * DotArray(r0, shape, j) / (pi*length^2) * areas(j);
70         vispts(i, idx) = j;
71         idx++;
72     }
73
74 }
75 viscoef(i, idx) = 0; // end the array
76 vispts(i, idx) = -1;
77 }
78
79 // "h" vectors
80 if (usehvector) for (int i=0; i<Th.nbe; i++)
81 {
82     if (Th.be(i).label >= VIRTUAL) continue;
83
84     real[int] v1(3), v2(3);
85     GetCentroid(v1, Th, i);
86
87     for (int comp=0; comp<3; comp++)
88         hvectors(i, comp) = 2./3 * shape(i,comp);
89     int idx;
90     real[int] ray(3);
91     for (int j=0; j<Th.nbe/concavefactor; j++)
92     {
93         idx = vispts(i,j);
94         if (idx!=-1) break;

```

```

95         GetCentroid(v2, Th, idx);
96         Sub(ray, v2, v1);
97         real r = Length(ray);
98         for (int comp=0; comp<3; comp++)
99             hvectors(i, comp) -= viscoef(i, j) * ray[comp] / r;
100     }
101 }
102 }
103 return true;
104 }

```

Výpočet sebeohřevu

Viditelnostní koeficienty již máme spočítané, výpočet zářivých toků od viditelných částí povrchu je tak přímočarý.

```

1 func bool UpdateSelfHeating()
2 {
3     if (!useradflux && !usescflux) return 0;
4     real vprime;
5     int idx;
6     int i=0;
7
8     for (int k=0; k<Th.nbe; k++)
9     {
10        real flux = 0;
11        if (Th.be(k).label >= VIRTUAL) continue; // no flux incident on side/bottom facets
12        i = 0;
13        while (viscoef(k, i) != 0)
14        {
15            idx = vispts(k, i);
16            if (Th.be(idx).label >= VIRTUAL) continue; // no flux incoming from side/bottom facets
17
18            if (useradflux)
19            {
20                vprime = 1./3 * (v[][Th.be(idx)[0]] + v[][Th.be(idx)[1]] + v[][Th.be(idx)[2]]);
21                flux += (1-Air) * (1-Ah) * Phi * vprime^4 * viscoef(k, i);
22            }
23
24            if (usescflux)
25            {
26                flux += (1-Ah)*Ah*Phi* DotArray(sun, shape, idx) * viscoef(k, i) * shadow(idx);
27            }
28            i++;
29        }
30        fluxmap[k] = flux; // save flux for k-th faces
31    }
32    return true;
33 }

```

Reference

- Abe, S., Mukai, T., Hirata, N. et al. (2006). Mass and local topography measurements of Itokawa by Hayabusa. *Science*, 312:1344–1349.
- Bottke, W., Vokrouhlický, D., Brož, M. (2001). Dynamical spreading of asteroid families by the Yarkovsky effect. *Science*, 294:1693–1696.
- Bottke, W., Vokrouhlický, D., Rubincam, D., Nesvorný, D. (2006). The Yarkovsky and YORP effects: Implications for asteroid dynamics. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 34:157–191.
- Breiter, S., Bartczak, P., Czekaj, M. (2010a). YORP torques with 1D thermal model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 408:1576–1589.
- Breiter, S., Bartczak, P., Czekaj, M., Oczujda, B., Vokrouhlický, D. (2009). The YORP effect on 25143 Itokawa. *Astronomy and Astrophysics*, 507:1073–1081.
- Breiter, S., Michalska, H., Vokrouhlický, D., Borczyk, W. (2007). Radiation-induced torques on spheroids. *Astronomy and Astrophysics*, 471:345–353.
- Breiter, S., Vokrouhlický, D. (2010). YORP effect with anisotropic radiation. *arXiv:1009.1525*, 10.
- Breiter, S., Vokrouhlický, D., Nesvorný, D. (2010b). Analytical YORP torques model with an improved temperature distribution function. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401:1933–1949.
- Čuk, M. (2007). Formation and destruction of small binary asteroids. *The Astrophysical Journal Letters*, 659:57–60.
- Čuk, M., Burns, J. (2005). Effects of thermal radiation on the dynamics of binary NEAs. *Icarus*, 176:418–431.
- Čapek, D. (2007). *Thermal Effects in Physics and Dynamics of Small Bodies of the Solar System*. Dizertační práce, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics.
- Čapek, D., Vokrouhlický, D. (2004). The YORP effect with finite thermal conductivity. *Icarus*, 172:526–536.
- Demura, H., Kobayashi, S., Nemoto, E. et al. (2006). Pole and global shape of 25143 Itokawa. *Science*, 312:1347–1349.
- Ďurech, J., Vokrouhlický, D., Kaasalainen, M. (2008a). New photometric observations of asteroids (1862) Apollo and (25143) Itokawa—an analysis of YORP effect. *Astronomy and Astrophysics*, 488:345–350.
- Ďurech, J., Vokrouhlický, D., Kaasalainen, M. et al. (2008b). Detection of the YORP effect in asteroid (1620) Geographos. *Astronomy and Astrophysics*, 489:25–28.
- Ďurech, J., Vokrouhlický, D., Kaasalainen, M., Higgins, D. et al. (2012). Analysis of the rotation period of asteroids (1865) Cerberus, (2100) Ra-Shalom, and (3103) Eger—search for the YORP effect. *Astronomy and Astrophysics*, 547:10.
- Farinella, P., Vokrouhlický, D., Hartmann, W. K. (1998). Meteorite Delivery via Yarkovsky Orbital Drift. *Icarus*, 132:378–387.
- Fujiwara, A., Kawaguchi, J., Yeomans, D. K. et al. (2006). The rubble-pile asteroid Itokawa as observed by Hayabusa. *Science*, 312:1330–1334.

- Gaskell, R., Saito, J., Ishiguro, M. et al. (2006). Global Topography of Asteroid 25143 Itokawa. In *37th Annual Lunar and Planetary Science Conference*, volume 37, strana 1876.
- Golubov, O., Krugly, Y. N. (2012). Tangential Component of the Yorp Effect. *The Astrophysical Journal*, 752:11.
- Hayabusa — Science Data Archive (2014). Data z kamery amica, datum pozorování 19. 11. 2005. <http://darts.isas.jaxa.jp/planet/project/hayabusa/amica.pl> (13. 5. 2014).
- Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. *Journal of numerical mathematics*, 20:251–265.
- Kaasalainen, M., Torppa, J., Muinonen, K. (2001). Optimization Methods for Asteroid Lightcurve Inversion II. The Complete Inverse Problem. *Icarus*, 153:37–51.
- Kaasalainen, M., Ďurech, J., Warner, B. D., Krugly, Y. N., Gaftonyuk, N. M. (2007). Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques. *Nature*, 446:420–422.
- Kitazato, K., Abe, M., Ishiguro, M., Ip, W.-H. (2007). 25143 Itokawa: direct detection of the current decelerating spin state due to YORP effect. *Astronomy and Astrophysics*, 472:5–8.
- Lagerros, J. (1996). Thermal physics of asteroids. I. Effects of shape, heat conduction and beaming. *Astronomy and Astrophysics*, 310:1011–1020.
- Langtangen, H. (2003). *Computational Partial Differential Equations: Numerical Methods and Diffpack Programming*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2. vydání.
- Lowry, S. C., Fitzsimmons, A., Pravec, P. et al. (2007). Direct Detection of the Asteroidal YORP Effect. *Science*, 39:415.
- Lowry, S. C., Weissman, P. R., Duddy, S. R. et al. (2014). The internal structure of asteroid (25143) Itokawa as revealed by detection of YORP spin-up. *Astronomy and Astrophysics*, 562:48.
- Miyamoto, H., Yano, H., Scheeres, D. J. et al. (2007). Regolith migration and sorting on asteroid Itokawa. *Science*, 316:1011–1014.
- Muinonen, K. (1998). Introducing the Gaussian shape hypothesis for asteroids and comets. *Astronomy and Astrophysics*, 332:1087–1098.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D. (2007). Analytic theory of the YORP effect for near-spherical objects. *The Astronomical Journal*, 134:1750.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D. (2008). Vanishing torque from radiation pressure. *Astronomy and Astrophysics*, 480:1–3.
- Ostro, S. J., Margot, J.-L., Benner, L. a. M. et al. (2006). Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW4. *Science*, 314:1276–1280.
- Pravec, P., Harris, A. (2007). Binary asteroid population: 1. Angular momentum content. *Icarus*, 190:250–259.
- Pravec, P., Harris, A., Vokrouhlický, D. et al. (2008). Spin rate distribution of small asteroids. *Icarus*, 197:497–504.
- Pravec, P., Scheirich, P., Kusnirak, P. et al. (2006). Photometric survey of binary near-Earth asteroids. *Icarus*, 181:63–93.
- Rozitis, B., Green, S. F. (2011). Directional characteristics of thermal-infrared beaming from atmosphereless planetary surfaces - a new thermophysical model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415:2042–2062.

-
- Rozitis, B., Green, S. F. (2012). The influence of rough surface thermal-infrared beaming on the Yarkovsky and YORP effects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423:367–388.
- Rozitis, B., Green, S. F. (2013a). The influence of global self-heating on the Yarkovsky and YORP effects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 433:603–621.
- Rozitis, B., Green, S. F. (2013b). The strength and detectability of the YORP effect in near-Earth asteroids: a statistical approach. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 430:1376–1389.
- Rubincam, D. (2000). Radiative Spin-up and Spin-down of Small Asteroids. *Icarus*, 148:2–11.
- Saito, J., Miyamoto, H., Nakamura, R. et al. (2006). Detailed images of asteroid 25143 Itokawa from Hayabusa. *Science*, 312:1341–1344.
- Scheeres, D. (2007). The dynamical evolution of uniformly rotating asteroids subject to YORP. *Icarus*, 188:430–450.
- Scheeres, D., Gaskell, R. (2008). Effect of density inhomogeneity on YORP: The case of Itokawa. *Icarus*, 198:125–129.
- Scheeres, D. J., Abe, M., Yoshikawa, M. et al. (2007). The effect of YORP on Itokawa. *Icarus*, 188:425–429.
- Si, H. (2006). TetGen - A Quality Tetrahedral Mesh Generator and Three-Dimensional Delaunay Triangulator. <http://tetgen.berlios.de/>.
- Slivan, S. M. (2002). Spin vector alignment of Koronis family asteroids. *Nature*, 419:49–51.
- Statler, T. S. (2009). Extreme sensitivity of the YORP effect to small-scale topography. *Icarus*, 202:502–513.
- Steinberg, E., Sari, R. (2011). Binary Yorp Effect and Evolution of Binary Asteroids. *The Astronomical Journal*, 141:55.
- Taylor, P. A., Margot, J.-L., Vokrouhlický, D. et al. (2007). Spin rate of asteroid (54509) 2000 PH5 increasing due to the YORP effect. *Science*, 316:274–277.
- Vokrouhlický, D., Breiter, S., Nesvorný, D., Bottke, W. (2007). Generalized YORP evolution: Onset of tumbling and new asymptotic states. *Icarus*, 191(2):636–650.
- Vokrouhlický, D., Nesvorný, D., Bottke, W. (2003). The vector alignments of asteroid spins by thermal torques. *Nature*, 425:147–151.
- Vokrouhlický, D., Čapek, D. (2002). YORP-induced long-term evolution of the spin state of small asteroids and meteoroids: Rubincam’s approximation. *Icarus*, 159:449–467.
- Vokrouhlický, D., Čapek, D., Kaasalainen, M., Ostro, S. J. (2004). Detectability of YORP rotational slowing of asteroid 25143 Itokawa. *Astronomy and Astrophysics*, 24:21–24.
- Walsh, K. J., Richardson, D. C., Michel, P. (2012). Spin-up of rubble-pile asteroids: Disruption, satellite formation, and equilibrium shapes. *Icarus*, 220:514–529.
- Williams, T., Kelley, C., et al. (2010). Gnuplot 4.4: an interactive plotting program. <http://gnuplot.sourceforge.net/>.

Seznam obrázků

1	Modelový případ působení YORP efektu. Moment síly, kterým působí záření emitované z hranolů na rovníku asteroidu, se kvůli asymetrickému umístění nevyruší, a záření tak způsobí změnu rotační frekvence. Převzato z Bottke et al. (2006).	5
2	Závislost změny úhlové frekvence na šikmosti vlivem YORP jevu pro různá rozlišení povrchu Itokawy.	9
3	Značení použité pro popis asteroidu.	11
4	Zákon zachování energie na povrchu asteroidu. Zářivý dopadající od Slunce a od ostatních částí povrchu a teplo vedené dovnitř asteroidu musí být stejné, jako tepelná emise.	15
5	Značení užitá při popisu rozptýleného a tepelně emitovaného toku z viditelných částí povrchu.	16
6	Souřadný systém a geometrie zkoumaného problému. Zeď je ve směru y vysoká ℓ , ve směru z je nekonečná.	18
7	Závislost x -ové složky vektoru \mathbf{h} na vzdálenosti od zdi. Rozptyl hodnot u konečné zdi je způsoben závislostí na souřadnici y . Pozorujeme, že teorie pro nekonečnou zeď představuje maximum numericky určených hodnot.	19
8	Ilustrace odchylky vektorů \mathbf{h} od normálového směru pro modelový případ – krychle na rovném povrchu.	19
9	Kvalitativní popis mechanismu YORP efektu vznikajícího na balvanu. Asteroid vyzařuje díky tepelné vodivosti povrchového útvaru více na západní straně než na straně východní, celková síla působící na asteroid dle zákona akce a reakce tedy směřuje na východ.	21
10	Modelový případ demonstrující vznik radiačního momentu u nesymetrických útvarů.	22
11	Rovnice vedení tepla a okrajové podmínky pro všechny stěny uvažovaného modelu. Barevně je naznačena část, která má v průběhu výpočtu pevně danou teplotu (na teoretickou hodnotu), teplota uvnitř a na povrchu je počítána numericky.	23
12	Konvergence částečných součtů Fourierovy řady insolační funkce a analytického řešení.	28
13	Graf analytického řešení v závislosti na čase t a na hloubce pod povrchem z . Je vidět, že (pro danou vodivost) již půl metru pod povrchem je teplota téměř konstantní.	28
14	Popis užitý při řešení rovnice vedení tepla ve zdi.	29
15	Analytické řešení teploty $u(x, t)$ uvnitř jednodimenzionální zdi.	30
16	Jedna z po částech lineárních básových funkcí na dvojrozměrném prostoru.	36
17	Povrchová teplota spočtená v k -té iteraci pro tepelnou vodivost $K = 0,004$ W/m/K. Nerelaxovaná Picardova metoda vede pro nízké hodnoty vodivosti k divergenci posloupnosti u_k , konvergence dosáhneme volbou vhodné hodnoty relaxačního parametru ω	38
18	Konvergence v čase a prostoru. Odchylka vynesena v závislosti na reciproké hodnotě objemu čtyřstěnu $\Delta\Omega^{-1}$ a na počtu časových kroků za periodu $P/\Delta t$	42
19	Numerické řešení povrchové teploty pro různé prostorové a časové diskretizace. V obou případech pozorujeme konvergenci k analytickému řešení.	42
20	Stín pro šest různých rozlišení povrchu ($-\log \Delta\Omega = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ bráno zleva shora), vržený Sluncem, které se nachází 45° nad horizontem.	43
21	Parametrická závislost středního bezrozměrného tlaku $\langle \Pi \rangle$ v okolí jeho maxima pro balvan ve tvaru zdi. Uvažujeme stíny vrhané zdí, globální sebeohřev není zahrnut.	45
22	Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné tloušťce zdi d/L_{wave} . Tepelný parametr $\Theta = 0,5$. Křivky odpovídají různě složitým modelům. <i>Vrhané stíny</i> uvažuje pouze vzájemné stínění částí povrchu a zcela zanedbává globální sebeohřev. <i>Iradiační faktor</i> zohledňuje sebeohřev přidáním faktoru 2 k insolační funkci. <i>Globální sebeohřev</i> zahrnuje záření rozptýlené a tepelně emitované od všech viditelných plošek povrchu. <i>Úplný model</i> uvažuje kromě globálního sebeohřevu též vliv absorpce záření na směr reakční síly.	46
23	Topografické útvary, pro které porovnáваме závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti ℓ/L_{wave}	46

24	Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné délce hrany krychle ℓ/L_{wave} . Jednotlivé křivky odpovídají různým hodnotám tepelného parametru Θ	47
25	Teplota na povrchu krychlového balvanu v různých časových okamžicích. U jednotlivých obrázků je uveden čas odpovídající rotaci asteroidu, při $t = 12$ h se Slunce nachází v zenitu.	48
26	Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti hemisférického balvanu ℓ/L_{wave} pro tepelný parametr $\Theta = 0,5$	49
27	Závislost středního tlaku $\langle \Pi \rangle$ na bezrozměrné velikosti balvanu obecného tvaru ℓ/L_{wave} pro tepelný parametr $\Theta = 0,5$. Jednotlivé křivky odpovídají různým orientacím balvanu (otočení o $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ a 270°).	49
28	Závislost středního tlaku, normovaného tlakem na rovníku, na asteroidopisné šířce.	50
29	Závislost středního tlaku na elevačním úhlu ψ	50
30	Balvany na povrchu Itokawy, ze kterých odvozujeme mocnné rozdělení velikostí. Snímek vpravo se částí překrývá s levým snímkem, tuto část proto vynecháváme.	53
31	Mocnné rozdělení velikostí útvarů odvozené z detailních snímků povrchu Itokawy.	53
32	Tři různé realizace rozmístění hrubého terénu na povrchu Itokawy.	54
33	Histogram znázorňující úhlové zrychlení pro různá rozmístění hrubého povrchu. Hrubý povrch přitom zaujímá polovinu povrchu Itokawy.	55
34	Závislost úhlového zrychlení Itokawy na tepelné hloubce L_{wave} . Předpokládáme, že útvary mají mocnné rozdělení velikostí s exponentem $\gamma = 2,4$ a jsou rozmístěny po celém povrchu planety. Křivky odpovídají různým volbám horní meze ℓ_{max}	55
35	Dva snímky různých míst povrchu Itokawy; pozorujeme zcela odlišnou topografii.	56
36	Normovaná hodnota celkového momentu síly, kterým působí povrchové útvary velikosti ℓ , uvažujeme-li mocnné rozdělení velikostí s exponentem $\gamma = -2,4$	57
37	Geometrie a užité značení pro test paprsek-troúhelník.	61

Rejstřík

- (1862) Apollo, 6
- asteroidopisné šířka, 49

- bázové funkce, 33
- barycentrické souřadnice, 62
- bezrozměrný tlak, 43
- binární asteroid, 7
- binární YORP, 7

- délka vzestupného uzlu, 19
- difuzivita, 25
- diskretizace, 41

- (3103) Eger, 6
- elevační úhel, 49
- emisivita, 13
- emisní vektor \mathbf{h} , 13, 17
- Eulerova metoda, 35

- fázový faktor, 27
- Fourierův zákon, 14
- Fourierova řada, 25
- FreeFem++, 64

- Galerkinova metoda, 33
- Gaussova věta, 37
- (1620) Geographos, 6
- globální sebeohřev, 9, 15

- Hayabusa, 7
- Heavisideova funkce, 11, 25
- hemisférické albedo, 13
- hromada sutí, 8

- insolační funkce, 15, 25
- interpolant, 39
- (25143) Itokawa, 6, 7
- izotermální limita, 24

- Jarkovského jev, 4

- klasický model, 4
- kolokační metoda, 33
- Koronis, 6
- kritická frekvence, 7
- Kroneckerovo delta, 36
- kulové funkce, 20

- linearizace, 26
- lokální YORP jev, 21

- metoda inverzní transformace, 54
- metoda konečných prvků, 33
- metoda vážených residuí, 33
- mocninné rozdělení
 - diferenciální, 49
 - hustota pravděpodobnosti, 50
 - kumulativní, 52

- okraťové podmínky, 15, 22
 - diferenciální operátor, 37

- Picardova iterační metoda, 34
- počáteční podmínky, 23
- Poyntingův-Robertsonův efekt, 3

- regolit, 47
- relaxační parametr, 34
- residuuum, 33
- rovnice roviny, 61
- rovnice vedení tepla, 14
 - analytické řešení, 25
 - diferenciální operátor, 37
 - slabá formulace, 37
 - třídimenzionální, 14
- Rubincamova aproximace, 4, 14

- semi-linearizace, 38
- směrování IR emise, 20
- spin-orbitální rezonance, 6
- stínící funkce, 11
- střední bezrozměrný tlak, 44
- Stefanův-Boltzmannův zákon, 13
- subsolární teplota, 31
- světelné křivky, 5
- šikmost, 4

- tepelná hloubka, 31
- tepelná vodivost, 14
- tepelný parametr, 27, 31
- TetGen, 41
- tetrahedronizace, 36
- TGV, 39
- tumbler, 7, 22

- váhové funkce, 33, 35
- viditelnostní funkce, 11

- Wienův posunovací zákon, 13

- (54509) YORP, 6
- YY jev, 5