

STAVBA A VÝVOJ HVĚZD

Petr Harmanec, Miroslav Brož
Astronomický ústav Univerzity Karlovy

Verze 8: 8. června 2009

Obsah

1 Úvodem	5
1.1 Vznik teorie	5
1.2 Model našeho Slunce	8
2 Obecné zákonitosti a fyzikální vztahy	13
2.1 Základní pojmy	13
2.2 Stavová rovnice	15
2.2.1 Ideální plyn	16
2.2.2 Tlak záření	18
2.2.3 Elektronová degenerace	19
2.2.4 Částečná ionizace v povrchových vrstvách	23
3 Základní rovnice stavby hvězd	26
3.1 Rovnice zachování hmoty	26
3.2 Pohybová rovnice a její limitní případ: rovnice hydrostatické rovnováhy	26
3.3 Rovnice tepelné rovnováhy	27
3.3.1 Proton–protonový řetězec	28
3.3.2 CNO cyklus	31
3.3.3 Přeměna hélia na uhlík a další reakce	33
3.3.4 Tepelná rovnováha a změny entropie	35
3.4 Rovnice přenosu energie	36
3.4.1 Rovnice zářivého přenosu energie	37
3.4.2 Rovnice konvektivního přenosu energie	46
4 Matematická struktura rovnic hvězdného nitra	53

5	Počáteční a okrajové podmínky	55
6	Henyeova numerická metoda integrace vnitřních částí hvězdy	60
6.1	Metoda úplné linearizace	60
6.2	Meze linearizace	63
7	Vývoj osamocené hvězdy	65
7.1	Ilustrativní příklad: vývoj hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$	65
7.2	Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotnosti hvězdy	71
8	Srovnání předpovědí teorie hvězdného vývoje s pozorováním	80
8.1	Jak získávat pozorovací data?	80
8.1.1	Zářivý výkon hvězdy	80
8.1.2	Efektivní teplota hvězdy	82
8.1.3	Hmotnosti a poloměry hvězd	82
8.1.4	Diagram V versus $(B - V)$ pro hvězdokupy	82
8.2	Vysvětlení hlavních rysů Hertzsprungova–Russellova diagramu	83
8.3	Projevy vývoje ve hvězdokupách	84
8.4	Projevy vývoje ve dvojhvězdách	85
8.5	Změny chemického složení pozorované ve spektrech	88
8.6	Test vnitřní struktury hvězd pomocí apsidálního pohybu	88
8.6.1	Apsidální pohyb v klasické mechanice	88
8.6.2	Relativistický apsidální pohyb	90
8.6.3	Celkový apsidální pohyb	91
8.7	Projevy vývoje za dobu lidské historie	91
9	Jednoduché analytické modely a odhady	93
9.1	Polytropní děj	93
9.2	Laneova–Emdenova diferenciální rovnice	96
9.3	Polytropní modely hvězd	99
10	Hvězdný vítr a ztráta hmoty z hvězd	103
10.1	Základní fakta a úvahy	103
10.2	Parkerova teorie větru u chladných hvězd	106
10.3	CAK teorie hvězdného větru řízeného zářením	108
10.4	Vliv hvězdného větru na vývoj hvězd	111
11	Vliv rotace	116
11.1	Rocheův model a jednoduché odhady	116
11.2	Modely hvězdného vývoje se započtením rotace	120
11.3	Některé výsledky vývoje rotujících hvězd	123

12 Vývoj dvojhvězd	129
12.1 Rocheův model a jednoduché odhady	129
12.2 Výpočet hvězdného vývoje ve stadiu výměny hmoty	133
12.3 Některé výsledky modelování vývoje dvojhvězd	137
12.4 Modely vývoje dvojhvězd versus pozorování	144
13 Pulsace hvězd	146
13.1 Radiální pulsace sférických hvězd	146
13.1.1 Podmínka pro vznik pulsací	146
13.1.2 Opacitní mechanismus pulsací	147
13.1.3 Hrubý odhad periody radiálních pulsací	148
13.1.4 Vztahy perioda – zářivý výkon – barva	151
13.2 Neradiální pulsace	152
13.2.1 Sektorální pulsace rotujících hvězd	157
13.3 Jednoduché vlnění	159
13.3.1 Akustické vlny v homogenním prostředí (p-módy)	161
13.3.2 Vnitřní gravitační vlny (g-módy)	162
13.3.3 Povrchové gravitační vlny (f-módy)	163
14 Gravitační kolaps protohvězd	168
14.1 Průběh kolapsu	168
14.2 Fragmentace oblaku	169
14.3 Vývoj před hlavní posloupností	171
14.4 Eddingtonova limita	173
15 Explosivní stadia ve vývoji hvězd	175
15.1 Supernovy typu II, Ib, Ic	175
15.2 Supernovy typu Ia	180
16 Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia	188
16.1 Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy–Rayetovy hvězdy	188
16.2 Hvězdy spektrálního typu B	189
16.2.1 Chemicky pekulární Bp hvězdy	190
16.2.2 Pulsující β Cep hvězdy	190
16.2.3 Pomalu pulsující B hvězdy (Slowly pulsating B stars, SPB)	192
16.2.4 Hvězdy se závojem (Be stars)	192
16.2.5 Svítivé modré proměnné (Luminous Blue Variables, LBV)	199
16.3 Hvězdy spektrálních typů A a F	200
16.3.1 Am hvězdy (CP1 hvězdy)	201
16.3.2 Ap hvězdy	202
16.3.3 δ Scuti hvězdy	203

16.3.4	SX Phe hvězdy	204
16.3.5	γ Dor hvězdy	204
16.3.6	Lithium a berylium u F a G hvězd	205
16.4	G, K a M hvězdy	206
16.4.1	Projevy a časová proměnnost hvězdných chromosfér	207
16.4.2	Pulsující hvězdy: Cefeidy, Miry a AGB hvězdy	211
16.5	Hvězdy v raných vývojových stádiích	213
16.6	Hvězdy v pozdních vývojových stádiích	214
16.6.1	Bílí trpaslíci a ZZ Ceti hvězdy	214
16.6.2	Novy	216
16.6.3	Supernovy	217
	Rejstřík	222
	Literatura	227

1 Úvodem

1.1 Vznik teorie

Po dlouhou dobu zůstávala otázka fyziků a astrofyziků, proč hvězdy vydrží bez viditelné změny zářit tak dlouho, nezodpovězena. Zkusme nejprve různé zdroje energie posoudit jednoduchými energetickými úvahami.

Anaxagorás v 5. st. př. n. l. tvrdil, že hvězda, respektive Slunce, je rozžhavená masa železa. Kdyby tomu tak bylo, celkovou tepelnou energii obsaženou v železe bychom mohli odhadnout jako ¹

$$Q \simeq M_{\odot} c \Delta T \doteq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 450 \text{ J/K/kg} \cdot 6000 \text{ K} \doteq 5,4 \cdot 10^{36} \text{ J}. \quad (1)$$

To se může zdát hodně, ale při současném zářivém výkonu Slunce $L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W}$ to znamená, že by Slunce vydrželo zářit po dobu

$$\tau \simeq \frac{Q}{L_{\odot}} \doteq \frac{5,4 \cdot 10^{36} \text{ J}}{3,8 \cdot 10^{26} \text{ J/s}} \doteq 1,4 \cdot 10^{10} \text{ s} \doteq 460 \text{ yr}, \quad (2)$$

což je evidentně velmi málo. Nicméně takové jednoduché chladnutí (jen s větším ΔT a menším L) probíhá u bílých trpaslíků, v pozdních fázích hvězdného vývoje.

Ještě v 19. století existovaly úvahy o tom, zda je možné, aby Slunce získávalo svou zářivou energii chemickými reakcemi, tedy spalováním tuhých či tekutých látek. Názor, že to není pravděpodobné, vyslovil již John Herschel. Ostatně pro oxidaci vodíku $2^1\text{H}_2 + ^{16}\text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$, která má velkou výhřevnost $H \doteq 100 \text{ MJ/kg}$, je

$$Q \simeq M_{\text{vodíku}} H \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{9} \cdot 10^8 \text{ J} \doteq 2,5 \cdot 10^{37} \text{ J} \quad (3)$$

a použijeme-li stejný trik se zářivým výkonem, vyjde charakteristická doba $\tau = Q/L_{\odot} \doteq 2000 \text{ yr}$.

Lékař J. R. Mayer uvažoval roku 1846 o tom, že by Slunce mohlo získávat energii dopady meteoritů. Každou sekundu by se ovšem na záření musela přeměňovat kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2 \simeq L_{\odot} \cdot 1 \text{ s}$, což by při rychlostech dopadu $v \simeq 100 \text{ km/s}$ znamenalo tok hmoty

$$\frac{dm}{dt} \simeq \frac{2L_{\odot}}{v^2} \doteq \frac{2 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{(10^5)^2} \text{ kg/s} \doteq 7,6 \cdot 10^{16} \text{ kg/s} \doteq 1,2 \cdot 10^{-6} M_{\odot}/\text{yr}, \quad (4)$$

čili $\tau \simeq M_{\odot}/(dm/dt) \simeq 1 \text{ Myr}$. Navíc by se přírůstek hmotnosti musel měřitelně projevit na změně drah planet.² Pro Slunce tedy tento zdroj nepřipadá v úvahu, ale taková akrece planetesimál byla hlavním zdrojem tepelné energie planet.

¹Řeční filosofové samozřejmě neoperovali s pojmy teplo, měrná tepelná kapacita, neznali zákon zachování energie ani nezměřili hmotnost a teplotu Slunce. V tomto kontextu se na odhad musíme dívat.

²Podle 3. Keplerova zákona je $a^3/P^2 = M$, po diferencování (při $a = \text{konst.}$) $dM = -2\frac{a^3}{P^3}dP$ a $\frac{dP}{P} = -\frac{1}{2}\frac{dM}{M} \simeq 10^{-6} \simeq 30 \text{ s}$ za rok, což se ovšem nepozoruje.

H. von Helmholtz roku 1854 přišel místo toho s hypotézou, že Slunce září díky uvolňování energie gravitačním smršťováním. Gravitační potenciální energie koule o konstantní hustotě je rovna $E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$. Podle viriálového teorému platí pro gravitačně vázané systémy $\langle E_K \rangle = -\frac{1}{2}\langle E_G \rangle$, tudíž celková mechanická energie hvězdy je $E(R) = E_K + E_G = \frac{1}{2}E_G$. V nekonečnu byla pochopitelně energie $E(\infty) = 0$; při kolapsu se tedy uvolní jejich rozdíl³

$$\Delta E = E(\infty) - E(R) = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \doteq 0,3 \cdot \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{7 \cdot 10^8} \text{ J} \doteq 1,1 \cdot 10^{41} \text{ J}. \quad (5)$$

Odpovídající doba zářivé stability

$$\tau_{\text{KH}} \simeq \frac{\Delta E}{L_{\odot}} \simeq 10 \text{ Myr} \quad (6)$$

se nazývá *Kelvinova–Helmholtzova škála*. Zlepšující se odhady stáří Země ale vyloučily i tuto možnost, třebaže, jak uvidíme, se gravitační kontrakce v určitých stádiích hvězdného vývoje skutečně významně uplatňuje (například při přechodu od hlavní posloupnosti do stadia červeného obra, ve fázi T Tauri nebo při výbuchu supernovy).

Více než 97 % látky v nitru Slunce je plně ionizováno, přičemž na každý atom připadá řádově $E_{\text{ion}} \simeq 13,9 \text{ eV}$ a celkem by se při rekombinaci uvolnilo

$$E \simeq \frac{M_{\odot}}{m_{\text{H}}} E_{\text{ion}} \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{1,7 \cdot 10^{-27}} 13,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 2,7 \cdot 10^{39} \text{ J}; \quad (7)$$

dobu $\tau \simeq 0,2 \text{ Myr}$. Stupeň ionizace ve Slunci se v současnosti prakticky nemění, ale třeba při gravitačním kolapsu mezihvězdného mračna se právě na ionizaci neutrálních atomů spotřebovává nezanedbatelné množství tepelné energie, čímž klesne teplota oblaku a podpoří se jeho další smršťování.

Po objevu radioaktivity (Becquerel 1896) bylo evidentní, že se jedná o velmi vydatný zdroj. Při postupném rozpadu jediného atomu uranu ^{235}U se uvolní $E_{\text{U}} \doteq 200 \text{ MeV}$; celková energie by tedy mohla být až

$$E \simeq \frac{M_{\odot}}{m_{\text{U}}} E_{\text{U}} \doteq \frac{2 \cdot 10^{30}}{235 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}} \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 1,6 \cdot 10^{44} \text{ J} \quad (8)$$

a odpovídající $\tau \simeq 14 \text{ Gyr}$. Na hvězdách nicméně prvky těžší než železo nepozorujeme.⁴

Teprve koncem třicátých let dvacátého století byl nalezen skutečný zdroj stabilního záření hvězd: *jaderná syntéza prvků*, zejména slučování vodíku na helium — viz např. Weizsäcker (1937), Bethe a Critchfield

³Jinými slovy: v nekonečnu jsou celková, gravitační potenciální i kinetická energie rovné nule. Hmotný element při volném pádu z nekonečna prolétává ve vzdálenosti R od centra parabolickou rychlostí $v_p = \sqrt{2GM/R}$. Aby neodletěl po parabole znovu do nekonečna, ale usadil se na kruhové dráze o poloměru R , musel by být zbrzděn nějakou srážkou na kruhovou (keplerovskou) rychlost $v_k = \sqrt{GM/R}$. Rozdíl odpovídajících kinetických energií se disipuje na teplo.

⁴Pomineme to, že kritické množství uranu, nad kterým dochází k řetězové reakci, je pouhých 50 kg.

(1938) a Bethe (1939). Když se při jedné přeměně $4p \rightarrow \alpha$ uvolní energie $E_H = 28 \text{ MeV}$, vychází řádový odhad celkové energie

$$E_{\text{nuk}} \simeq \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{M_{\text{jádra}}}{m_{\text{H}}} E_H \doteq 0,19 \cdot \frac{5 \cdot 10^{29}}{1,7 \cdot 10^{-27}} \cdot 28 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \doteq 2,5 \cdot 10^{44} \text{ J} \quad (9)$$

a nukleární časová škála

$$\tau_{\text{nuk}} \simeq \frac{E_{\text{nuk}}}{L_{\odot}} \simeq 20 \text{ Gyr}. \quad (10)$$

Tím byla otevřena cesta ke konstrukci realistických modelů stavby a vývoje hvězd.

Je třeba si uvědomit, že téměř celá dosavadní teorie stavby a vývoje hvězd je vybudována a propočtena za pomoci *jednorozměrných modelů sféricky symetrických hvězd*. Diferenciální rovnice popisující stavbu vypadají takto (jejich odvozováním se zabýváme v kapitole 3; jedná se o rovnice zachování hmoty, hydrostatické rovnováhy, tepelné rovnováhy a přenosu energie)⁵

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}, \quad (11)$$

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}, \quad (12)$$

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T, X, Y, Z), \quad (13)$$

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{GT M_R}{4\pi P R^4} \nabla, \quad (14)$$

kde gradient $\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{ad}})$, $\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa(\rho, T, X, Y, Z) P L_R}{16\pi a c G M_R T^4}$, $\nabla_{\text{ad}} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}$, $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_P$, a soustavu uzavírá stavová rovnice hvězdné látky

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R} T \lambda(\rho, T) + \frac{a}{3} T^4, \quad (15)$$

kde $\mu^{-1} \doteq \frac{3}{2}X + \frac{1}{4}Y + 0,5$. Toto zjednodušení má své oprávnění — ukazuje se totiž, že hmota hvězd má vysoký stupeň koncentrace směrem ke středu. Všechny stavové veličiny lze proto pro daný model hvězdy považovat za funkce jediné proměnné, např. $R(M_R)$, $\rho(M_R)$, $P(M_R)$, $L_R(M_R)$, $T(M_R)$, kde M_R označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru R .⁶

Přesto je dobře si uvědomit, jaká další zjednodušení jsou činěna:

⁵Označení je následující: R poloměr, M_R hmotnost obsažená v kouli o poloměru R , ρ hustota, P tlak, L_R zářivý výkon vycházející z koule o poloměru R , ϵ_{nukl} měrný výkon jaderných reakcí, T teplota, X, Y a Z abundance vodíku, helia a kovů, κ opacita, c_P tepelná kapacita při konstantním tlaku, λ koeficient vyjadřující příspěvek nerelativistické degenerace elektronového plynu, μ střední molekulová hmotnost.

⁶Použití M_R jako nezávislé proměnné je výhodnější než použití R , zejména z důvodů numerických. V řídkých podpovrchových vrstvách se dokonce jako nezávislá proměnná používá tlak P .

- Zanedbává se *rotace* hvězd (odstředivá síla, změna tvaru hvězdy, diferenciální rotace). Modely, které berou rotaci hvězd v potaz a opouštějí předpoklad sférické symetrie, existují zatím jen ve velmi zjednodušené formě, jak o tom bude řeč později.
- Zanedbávají se možná *magnetická pole* a jejich vliv na stavbu hvězdy.
- Používá se nedokonalá *teorie konvekce*, která empiricky volí poměr $\alpha = l/H_P$ mezi střední volnou dráhou l konvektivního elementu a tlakovou škálou $H_P = - (d \ln P/dR)^{-1} = -P/(dP/dR)$ (angl. pressure scale height). Předpokládá se, že termodynamické procesy v nitru hvězdy probíhají adiabaticky, což je ale dobrá aproximace. U hmotnějších hvězd zůstává zdrojem nejistoty i jev, kterému se říká *konvektivní přestřelování* (angl. convective overshooting), totiž možnost, že konvekce díky setrvačnosti konvektivních elementů zasáhne i do vrstev nad konvektivní zónou.
- Přetrvává určitá nepřesnost v hodnotách extinkčních (neboli opacitních) koeficientů $\kappa(\rho, T, X, Y, Z)$ hvězdné látky (i když se situace v posledních letech hodně zlepšila) a tyto koeficienty se pro výpočty hvězdných niter používají středované přes celé elektromagnetické spektrum.
- Přetrvává i nejistota v určení účinných průřezů jaderných reakcí, což vede obecně k větším chybám v časové škále, než v povrchových charakteristikách modelových hvězd. Podle nejnovějších studií se nejistota v určení účinných průřezů reakcí pohybují v rozmezí 5 až 40 %.
- Pro velmi chladné hvězdy a pro velmi husté hvězdy přetrvávají určité nejistoty ve stavové rovnici.
- Pro některé hvězdy jsou atmosféry nestabilní a dochází z nich ke ztrátě hmoty formou *hvězdného větru*. To se při modelování buď zcela zanedbává, nebo je použit jednoduchý parametrický popis ztráty hmoty hvězdným větrem $dM/dt = \text{konst.}$
- Problémem z hlediska modelování zůstávají i ta stadia vývoje, kdy dochází k dramatickým změnám na dynamické škále, které nelze korektně popsat stacionárními modely.

1.2 Model našeho Slunce

Ještě předtím, než se začneme teorii stavby a vývoje hvězd věnovat soustavně, může být užitečné ilustrovat míru její úspěšnosti na příkladu modelování našeho Slunce v jeho současném vývojovém stadiu.

Je dobré si uvědomit, že i současné počítání modelu Slunce představuje svého druhu magii. Obvykle se začíná s homogenním modelem, kontrahujícím k hlavní posloupnosti nulového věku, který je ještě ve stavu před započítáním slučování deuteria. Zkusmo se volí:

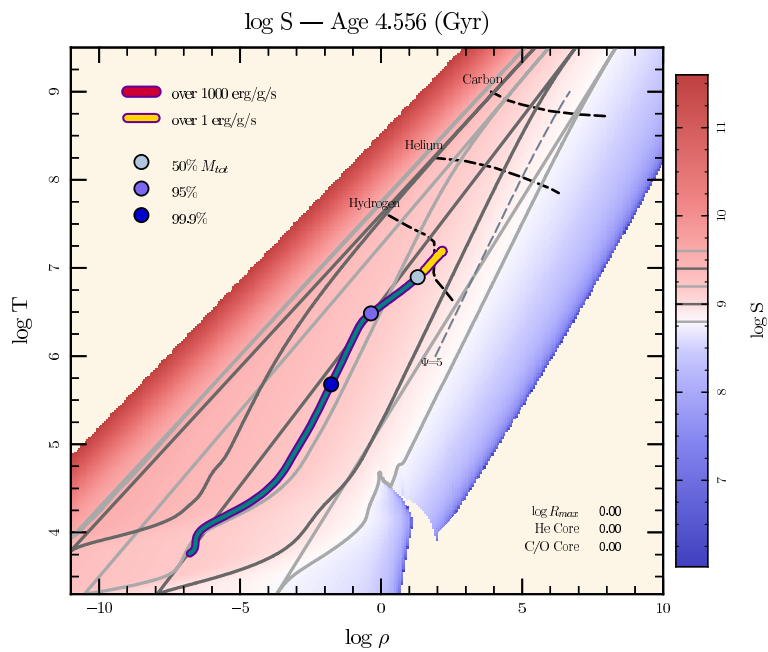
1. poměr $\alpha = l/H_P$ mezi střední volnou dráhou a tlakovou škálou;
2. počáteční hmotnostní procento vodíku X ;
3. počáteční hmotový poměr obsahu těžkých prvků vůči vodíku Z/X ,

Tabulka 1: Porovnání tří modelů Slunce, vypočítaných pro tři sady účinných průřezů (Angulo a spol. 1999, Adelberger a spol. 1998, Caughlan a Fowler 1988), kde Y_i , Z_i označují počáteční hodnoty hmotnostních podílů hélia a kovů, α parametr semiempirické teorie konvekce, ${}^7\text{Li}_{\text{si}}$ očištění abundance lithia na povrchu, na hlavní posloupnosti nulového věku (v jednotkách dex $\equiv \log(w_X/w_H) + 12$). Ostatní parametry odrážejí stav v současnosti: R_{CZ} je poloměr hranice konvektivní zóny, T_c , ρ_c , Y_c , Z_c teplota, hustota a abundance v centru, $\delta\nu_{02}$, $\delta\nu_{13}$ rozdíly frekvencí radiálních p-módů stupně $l = 0-2$ a $l = 1-3$, P_0 je charakteristický rozdíl mezi periodami g-módů Modelové hodnoty se navzájem se odlišují nejvýš o 2 %. Vpravo jsou pozorované hodnoty obsahu prvků ve sluneční atmosféře a měřené frekvence slunečních oscilací. Jsou téměř všechny v souladu se standardním modelem Slunce, až na obsah lithia ${}^7\text{Li}$. Podle Morel a spol. (1999).

	An99	Ad98	CF88	pozorované hodnoty
Y_i	0,2723	0,2726	0,2729	
Z_i	0,0197	0,0197	0,0196	
α	1,924	1,931	1,941	
${}^7\text{Li}_{\text{si}}/\text{dex}$	2,26	2,38	2,37	
${}^9\text{Be}_{\text{si}}/\text{dex}$	1,42	1,42	1,42	
Y_s	0,2436	0,2442	0,2447	0,232–0,249
Z_s	0,0181	0,0181	0,0181	
${}^7\text{Li}_s/\text{dex}$	2,18	2,30	2,29	$1,10 \pm 0,10 \leftarrow$ problém!
${}^9\text{Be}_s/\text{dex}$	1,35	1,35	1,353	$1,40 \pm 0,09$
$({}^3\text{He}/{}^4\text{He})_s \cdot 10^{-4}$	4,34	4,32	4,32	$4,40 \pm 0,4$
R_{CZ}/R_\odot	0,7138	0,7132	0,7124	$0,713 \pm 0,001$
$T_c/10^7 \text{ K}$	1,573	1,578	1,566	
$\rho_c/\text{g cm}^{-3}$	153,8	153,0	151,9	
Y_c	0,6418	0,6420	0,6409	
Z_c	0,0210	0,0210	0,0210	
$\delta\nu_{02}/\mu\text{Hz}$	9,21	9,18	9,16	9,002–9,014
$\delta\nu_{13}/\mu\text{Hz}$	16,10	16,06	16,03	15,884–15,711
P_0/min	35,13	35,23	35,42	

a to tak, aby výpočet pro vývojový model o hmotě Slunce v čase 4,56 miliardy let od hlavní posloupnosti nulového věku správně reprodukoval: (i) současný pozorovaný poloměr R_\odot ; (ii) jeho zářivý výkon L_\odot ; (iii) poměr Z/X ve fotosféře. Za hlavní posloupnost nulového věku se přijímá okamžik, kdy nukleární reakce přispívají více než 50 % k zářivému výkonu Slunce. Většina novějších modelů vede na poměr $\alpha \simeq 2$.

Lithiový problém. Morel a spol. (1999) publikovali podrobnou studii slunečních modelů počítaných pro tři různé kompilace účinných průřezů a energetické vydatnosti jaderných reakcí (tab. 1). Ukazuje se, že makroskopické veličiny jsou poměrně necitlivé k přetrvávajícím nejistotám v nukleárních reakcích, snad s výjimkou obsahu lithia ${}^7\text{Li}$, který modely předpovídají asi dvakrát vyšší, než jaký se pozoruje. Tyto modely uspokojivě předpovídají i základní vlastnosti slunečních oscilací.



Obrázek 1: Profil hustoty ρ a teploty T v nitru Slunce. Výpočet byl proveden numerickým integrátorem hvězdného nitra a vývoje, programem EZ2 (http://hilda.troja.mff.cuni.cz/~mira/EZ2/EZ2_form.php), což je jen mírně upravený program EZ (Evolve ZAMS) od Billa Paxtona (<http://theory.kitp.ucsb.edu/~paxton/EZ-intro.html>).

Neutrinový problém. Do nedávna ale přetrvávala neshoda v předpovědi toku neutrin ze Slunce. Pro tři existující experimenty se pozorovalo výrazně méně neutrin, než kolik předpovídají modely, konkrétně: 0,60 krát méně pro galiová měření, 0,30 krát méně pro chlorová měření, a 0,47 krát méně pro experiment Kamiokande, přičemž modelové předpovědi se vzájemně lišily o méně než 10 %.

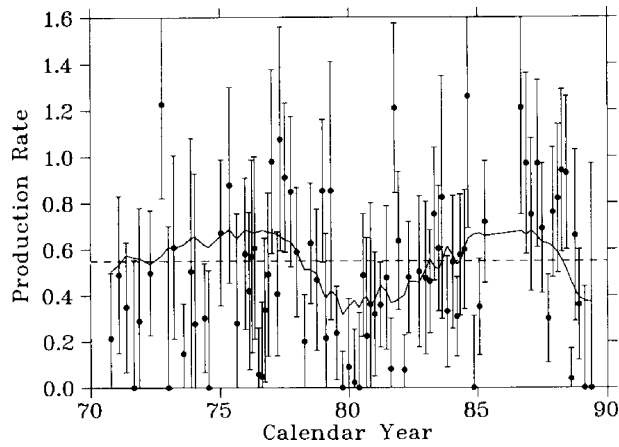
V roce 2001 došlo v celé věci k výraznému pokroku. Již roku 1969 publikovali Gribov a Pontecorvo (1969) domněnku, že elektronová neutrina ν_e vznikající při slučování vodíku v jádru Slunce se cestou k Zemi mohou měnit částečně v neutrina mionová ν_μ či τ -neutrina ν_τ , která se mnohem hůře detekují, a že tím by mohl rozpor teorie a pozorování vznikat. Ve spolupráci americko-japonské byl uveden do provozu nový detektor Super-Kamiokande v Japonsku a kanadsko-americko-britský tým publikoval první měření ze Sudbury Neutrino Observatory (SNO). SNO je laboratoř umístěná v aktivním dole na měď a nikl v Kanadě, která je v hloubce odpovídající 6 km vodního sloupce, takže je dobře chráněna proti účinkům kosmického záření. Vlastní detektor je sférická nádoba o průměru 12 m obsahující 1000 tun těžké vody, umístěná ve 30-m dutině naplněné velmi čistou normální vodou. Jedna z reakcí, při níž se elektronové neutrina při srážce s deuteronem mění na dva protony a urychlený elektron, je citlivá pouze na elektronová neutrina, zatímco srážky zaznamenané v detektoru Super-Kamiokande (používajícím čistou vodu) měří v nerozlišitelné směsi všechny typy neutrin. Bylo proto jasné, že pokud oba detektory naměří stejný tok neutrin, znamená to, že všechna neutrina přicházející ze Slunce jsou typu ν_e . Ve skutečnosti měření SNO získávaná od listopadu 1999 do ledna 2001 jasně prokázala, že detektor SNO detekuje méně neutrin než detektor Super-Kamiokande. Podrobnější vyhodnocení ukázalo, že alespoň neutrina s vyšší energií, vznikající během předposlední reakce proton-protonového řetězce, rozpadu boru na berylium jsou detekována ve shodě se současnými modely Slunce. Měřený tok neutrin byl určen na (Fukuda a spol. 1998)

$$F_\nu = (5,44 \pm 0,99) \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (16)$$

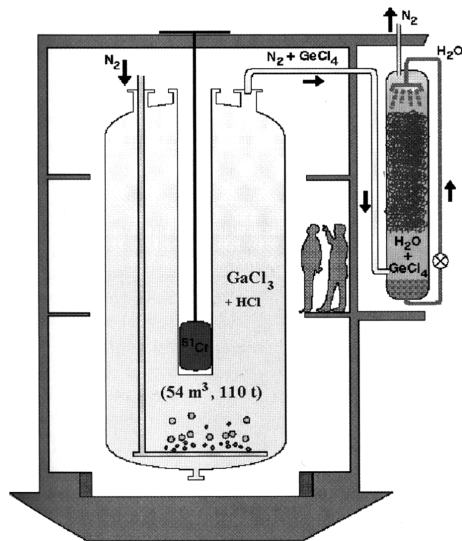
zatímco sluneční model předpovídá

$$F'_\nu = (5,05 \pm 0,20) \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (17)$$

Zdá se tedy, že přes šedesát let stará teorie stavby a vývoje hvězd do důchodu jít nemusí a že její testování naopak přineslo podnět pro rozvoj fyziky, neboť přeměna neutrin vede k závěru, že neutrina musejí mít nenulovou klidovou hmotnost.



Obrázek 2: Tok slunečních neutrin měřený galiovým detektorem, v jednotkách počet zachycení neutrina za 1 den. Převzato z Filippone a Vogel (1990).



Obrázek 3: Schéma galiového detektoru neutrin a jeho kalibrace radioaktivním zdrojem ^{51}Cr . Slabá interakce $\nu + {}^{71}\text{Ga} \leftrightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$ vyžaduje minimální hodnotu energie neutrina $E_\nu = 233 \text{ keV}$. Převzato ze Stix (2002).

2 Obecné zákonitosti a fyzikální vztahy

2.1 Základní pojmy

Hybnost. Hybnost (též impuls, anglicky momentum nebo linear momentum, rusky količestvo dviženija) je definována

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}, \quad (18)$$

kde \mathbf{v} je rychlost pohybu hmotného bodu o hmotě m . Hybnost lze stejně jako rychlost považovat za vektor. První Newtonův zákon setrvačnosti lze zapsat ve formě

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \quad (19)$$

Druhý Newtonův zákon síly stanoví, že časová změna hybnosti je rovna výslednici působících sil \mathbf{F} :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (20)$$

Teplota. V klasickém pojetí se vychází ze zjištění, že jsou-li teplejší a chladnější těleso (látka) v kontaktu, tepelný rozdíl mezi nimi rychle zmizí a ustaví se tepelná rovnováha. Dále je z pozorování zjištěno, že čím je látka teplejší, tím větší bývá její objem. Teplota T látky se proto může definovat jako míra objemu nějaké standardní látky a kalibrovat např. bodem tání ledu a varu vody při zvoleném konstantním tlaku.

Z hlediska kinetické teorie plynů je ovšem možné teplotu látky chápat jako veličinu přímo úměrnou střední kinetické energii částic

$$U = \frac{\alpha}{2} N k T, \quad (21)$$

kde α označuje počet energetických stupňů volnosti, N počet částic, k Boltzmannovu konstantu.

Tlak. Tlak P je síla, kterou částice plynu v daném místě působí na jednotku plochy. Tlak v daném místě působí ve všech směrech stejně.

Atomová hmotnost. Relativní hmotnosti atomů jednotlivých chemických prvků se nazývají *atomovými hmotnostmi* $A = m/m_{\text{u}}$. Za jednotku atomové hmotnosti m_{u} byla v minulosti přijímána $\frac{1}{16}$ hmotnosti atomu kyslíku. V současnosti ale platí jiná definice: jednotkou relativní atomové hmotnosti je $\frac{1}{12}$ klidové hmotnosti nuklidu uhlíku ^{12}C . Skutečná hmotnost jednotky atomové hmotnosti činí

$$m_{\text{u}} = (1,66053873 \pm 0,00000013) \cdot 10^{-24} \text{g}. \quad (22)$$

Atomová hmotnost atomu vodíku činí $A_{\text{H}} = (1,00782504679 \pm 0,00000000013)$ a obdobně se uvádějí hmotnosti atomů, nuklidů, molekul, elektronů, fotonů i jiných částic.

Látkové množství, gramatom, grammolekula. Látkové množství $N_{\text{mol}} = N/N_A$ vyjadřuje množství látky, respektive počet částic. Jeho jednotkou je mol, přičemž 1 mol látky obsahuje $N_A \cdot 1$ mol částic, kde

$$N_A = (6,02214179 \pm 0,00000030) \cdot 10^{23} \text{ částic} \cdot \text{mol}^{-1}. \quad (23)$$

Avogadrovo číslo (konstanta). Ve starší literatuře se často používá pojmů gramatom nebo grammolekula, což je takové množství chemického prvku, molekuly či částice, jehož hmotnost v gramech je číselně rovna atomové hmotnosti; 1 gramatom je tedy prostě roven 1 molu.

Molární hmotnost, molekulová hmotnost. Molární hmotnost $M_{\text{mol}} = m/N_{\text{mol}}$ je hmotnost 1 molu látky. Udává se v jednotkách kg/mol nebo g/mol. Ve starší literatuře se tato veličina nazývá molekulovou váhou (angl. molecular weight) a obvykle se označuje symbolem μ . Zde budeme mluvit o *molekulové hmotnosti*⁷ a budeme ji používat jako *bezrozměrnou veličinu*, $\mu = [M_{\text{mol}}]_{\text{g/mol}}$. Platí tedy, že molekulová hmotnost vodíku je

$$\mu_{\text{H}} = 1,00782504679 \pm 0,00000000013. \quad (24)$$

Skutečná hmotnost jednoho gramatomu látky o molekulové hmotnosti μ činí $\mu \cdot 1$ g. Platí také, že objem gramatomu je

$$V = \frac{\mu \cdot 1 \text{ g}}{\rho}. \quad (25)$$

Střední molekulová hmotnost. Mějme směs plynu o hmotnosti $m = 1$ kg, který obsahuje různé prvky, přičemž prvek E má hmotnostní podíl w_E . Střední molární hmotnost M_{mol} určíme jednoduše jako podíl hmotnosti a počtu molů, respektive sečteme počty částic jednotlivých prvků

$$M_{\text{mol}} = \frac{m}{N_{\text{mol}}} = \frac{m}{N/N_A} = \frac{m N_A}{\sum_E \frac{w_E m_u}{A_E}} = \frac{N_A m_u}{\sum_E \frac{w_E}{A_E}}. \quad (26)$$

Střední molekulová hmotnost je číselná hodnota téhož v g/mol, neboli

$$\mu_i = \frac{1}{\sum_E \frac{w_E}{A_E}}. \quad (27)$$

Tento výraz platí pro *neutrální* nebo čistě *iontový* plyn ve stavu úplné ionizace.

Je-li Z_E náboj elementu E , pak při úplné ionizaci vznikne z 1 atomu Z_E elektronů. Pro *elektronový plyn* bude tedy při úplné ionizaci

$$\mu_e = \frac{1}{\sum_E \frac{w_E}{A_E} Z_E} \quad (28)$$

⁷S tím, že se tento pojem může vztahovat jak na plyn složený z molekul, tak na plyn atomový či na plazma složené z iontů a volných elektronů.

a celkově pro směs iontů a volných elektronů

$$\mu = \frac{1}{\sum_E \frac{w_E}{A_E} (1 + Z_E)}. \quad (29)$$

V některých současných vývojových modelech hvězd je studován detailně vývoj jednotlivých chemických prvků či dokonce nuklidů. V tom případě musí být stejně detailně uvažována i střední molekulová hmotnost. Obvykle se ale uvažují jen nejpočetnější prvky. To je přípustné, protože při úplné ionizaci pro všechny těžší prvky s mnoha elektrony platí velmi přibližně, že

$$1 + Z_E \simeq Z_E \simeq 0,5A_E. \quad (30)$$

Označme relativní hmotnostní obsah vodíku w_H symbolem X , helia w_{He} symbolem Y a w všech těžších prvků symbolem Z , takže

$$Z = 1 - X - Y. \quad (31)$$

Budeme-li ještě (z důvodů, které se vyjasní později) uvažovat i relativní zastoupení dusíku X_N , lze podle (29) pro střední molekulovou hmotnost směsi iontů a volných elektronů přibližně psát

$$\begin{aligned} \mu^{-1} &= 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{8}{14}X_N + \frac{1}{2}(1 - X - Y - X_N) \\ &= 1,5X + 0,25Y + \frac{1}{14}X_N + 0,5. \end{aligned} \quad (32)$$

Analogicky podle vztahu (28) dostáváme molekulovou hmotnost elektronového plynu ve stavu úplné ionizace hvězdné látky

$$\begin{aligned} \mu_e^{-1} &= X + 0,5Y + 0,5X_N + 0,5(1 - X - Y - X_N) \\ &= 0,5(1 + X). \end{aligned} \quad (33)$$

Vidíme tedy, že molekulová hmotnost volných elektronů závisí při úplné ionizaci pouze na relativním hmotnostním obsahu vodíku.

Stejná aproximace vede i na přibližný výraz pro střední molekulovou hmotnost samotného iontového plynu ve stavu úplné ionizace

$$\mu_i^{-1} = X + 0,25Y + \frac{1}{14}X_N. \quad (34)$$

2.2 Stavová rovnice

Stavovou rovnicí se nazývá funkční závislost mezi stavovými veličinami popisujícími vlastnosti nějaké směsi plynu či plazmatu, tedy vztah $P(\rho, T)$ mezi tlakem, hustotou (či objemem) a teplotou.

Pro hvězdnou látku musíme ovšem uvážit nejen (i) tlak ideálního plynu, ale také (ii) tlak záření, (iii) tlak degenerovaného plynu a (iv) vliv částečné ionizace v podpovrchových vrstvách.

2.2.1 Ideální plyn

Ideálním plynem se nazývá soubor dokonale elastických, hladkých a sférických částic, splňujících následující tři podmínky:

1. Rozměry částic jsou mnohem menší než jejich střední volná dráha mezi srážkami, takže je lze považovat za hmotné body.
2. Trvání srážky je mnohem kratší než doba volného pohybu mezi srážkami.
3. Částice na sebe navzájem mimo srážky nepůsobí žádnými přitažlivými či odpuzivými silami, to znamená, že mimo srážky se pohybují konstantní rychlostí a po přímce, jejich energie je výlučně kinetická, nikoli potenciální.

Ideální plyn se používá jako dobrá aproximace reálného *řídkeho nebo horkého plynu*.

Protože tlak P v látce závisí pouze na jejím vnitřním stavu, nikoliv na tvaru, který zaujímá či na její celkové hmotě M , závisí tlak zřejmě na teplotě t a hustotě ρ či specifickém objemu $v = 1/\rho$, t.j. objemu, který zaujímá jednotková hmota. Je tedy

$$P = f(v, t). \quad (35)$$

Podle empiricky zjištěného *Boyleova–Mariottova zákona* je součin tlaku a specifického objemu plynu při konstantní teplotě rovněž konstantní, což znamená, že stavová rovnice musí mít tvar

$$Pv = h(t), \quad (36)$$

kde $h(t)$ je nějaká funkce teploty.

Podle *Gayova–Lussacova zákona* zvětší *všechny* plyny při zahřátí z 0°C na 1°C svůj objem o α a platí pro ně vztahy:

$$v(t) = v(0)(1 + \alpha t) \quad \text{při } P = \text{konst.}, \quad (37)$$

$$P(t) = P(0)(1 + \alpha t) \quad \text{při } v = \text{konst.}, \quad (38)$$

přičemž $v(0)$, $P(0)$ opět označují hodnoty veličin při 0°C a konstanta α má pro všechny plyny stejnou hodnotu (40). *Gayův–Lussacův zákon* platí pro reálné plyny pouze přibližně, ale platí přesně pro ideální plyn.

Již roku 1877 bylo dohodnuto, že *teplotní škála* bude zavedena jako lineární závislost na tlaku vodíku při konstantním objemu, přičemž se použije bod tání ledu (0°C) a bod varu vody (100°C) ke kalibraci. Platí tedy

$$P(t) = P(0)(1 + \alpha t) \quad \text{při } v = \text{konst.}, \quad (39)$$

kde $P(0)$ je tlak při teplotě 0°C a hodnota konstanty α je při zvolené kalibraci teplotní škály

$$\alpha = 273,16^{-1}. \quad (40)$$

Je výhodné zavést také škálu *absolutní teploty* T (s jednotkou Kelvin) následovně

$$T = t + 273,16. \quad (41)$$

Po dosazení do rovnic (37) a (38) totiž dostáváme

$$v(T) = v(0)\alpha T \quad \text{při } P = \text{konst.} \quad (42)$$

$$P(T) = P(0)\alpha T \quad \text{při } v = \text{konst.} \quad (43)$$

Nyní tedy můžeme přistoupit k nalezení stavové rovnice pro ideální plyn, tedy konkrétní funkční závislosti v rovnici (36). Předpokládejme, že stav plynu se změní z výchozích hodnot P_1 , v_1 a T_1 na nové hodnoty P_2 , v_2 a T_2 , a to ve dvou krocích: (i) nejprve plyn zahřejeme na teplotu T_2 při konstantním tlaku; (ii) isotermicky změníme jeho tlak na hodnotu P_2 . Podle vztahu (42) se objem plynu změní na hodnotu

$$v(T_2) = v_1 \frac{T_2}{T_1}. \quad (44)$$

Poté podle Boyleova-Marriotova zákona (36)

$$P_1 v(T_2) = P_2 v_2, \quad (45)$$

což lze s využitím vztahu (44) ještě upravit na

$$\frac{P_1 v_1}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{T_2} = c, \quad (46)$$

kde c je pro daný plyn konstanta.

Jestliže místo specifického objemu v budeme uvažovat objem V 1 gramatomu (1 molu), který pro všechny plyny obsahuje stejný počet částic, bude ve stavové rovnici místo konstanty c konstanta

$$\mathfrak{R} = (8,314472 \pm 0,000015) \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad (47)$$

stejná pro všechny ideální plyny, které se obvykle říká *universální plynová konstanta*. Stavová rovnice ideálního plynu pak nabude obvyklý tvar

$$P = \frac{\mathfrak{R}T}{V} = \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T. \quad (48)$$

Stavovou rovnici lze rovněž odvodit ze statistické fyziky pro klasické Maxwelllovo rozdělení částic ve tvaru

$$P = \frac{N_V}{V} kT, \quad (49)$$

kde N_V je počet částic v objemu V a

$$k = (1,3806505 \pm 0,0000024) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \quad (50)$$

Boltzmannova konstanta. Pokud zvolíme za objem V objem jednoho gramatomu, bude $N_V = N_A$ a podle (25) můžeme stavovou rovnici zapsat ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} N_A k T. \quad (51)$$

Mezi použitými konstantami platí zřejmě vztah

$$\mathfrak{R} = k N_A. \quad (52)$$

Někdy se lze setkat i se zápisem stavové rovnice ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \frac{\mu_H}{m_H} k T, \quad (53)$$

kde bylo Avogadrovo číslo eliminováno pomocí vztahu $N_A = \mu_H / m_H$. (Někteří autoři dokonce místo přesné molekulové hmotnosti vodíku berou $A_H \doteq 1$ a zapisují stavovou rovnici ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \frac{1}{m_H} k T, \quad (54)$$

jako např. Aller 1953, 1963.)

2.2.2 Tlak záření

Zajímáme-li se o stavovou rovnici hvězdné látky, můžeme uvažovat jednotlivě tlak iontů P_i , tlak volných elektronů P_e a tlak záření P_r . Podle *Daltonova zákona* bude totiž výsledný tlak aritmetickým součtem jednotlivých příspěvků, tedy

$$P = P_i + P_e + P_r. \quad (55)$$

Jak si ukážeme v dalším výkladu, lze s vysokou přesností považovat nitro hvězdy za absolutně černé těleso a pro tlak záření si odvodíme vztah

$$P_r = \frac{a}{3} T^4, \quad (56)$$

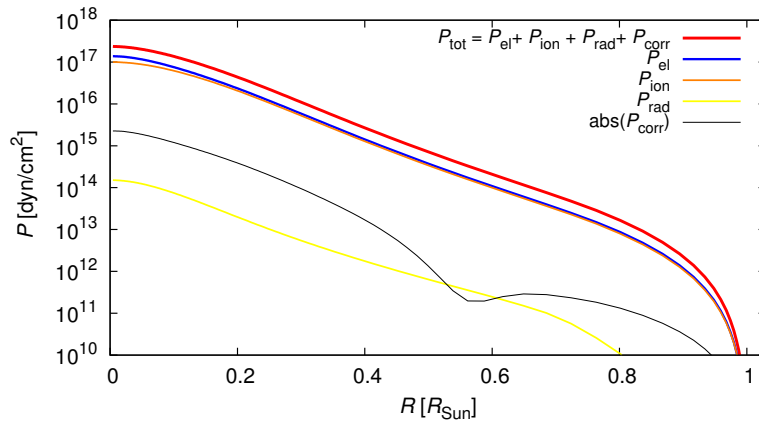
kde

$$a = 7,56577 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^{-3} \text{ K}^{-4} \quad (57)$$

je konstanta hustoty záření.

Bývá zvykem označovat poměr tlaku plynu P_g , kde

$$P_g = P_i + P_e \quad (58)$$



Obrázek 4: Tlak P v nitru Slunce, rozdělený na tlak elektronového plynu P_e , iontového plynu P_i a tlak záření P_r . Vynesena je také korekce tlaku $|P_{\text{corr}}|$ zohledňující odchylky od stavové rovnice ideálního plynu. Výpočet programem EZ.

k celkovému tlaku P symbolem β , takže lze dále psát

$$\beta P = P_g = P - P_r, \quad (59)$$

a podle výrazu pro tlak záření také

$$\beta = 1 - \frac{aT^4}{3P}. \quad (60)$$

Vzhledem k tomu, co jsme si řekli dříve o stavové rovnici ideálního plynu, víme, že v nedegenerovaných oblastech hvězdy můžeme tlak plynu popsat pomocí střední molekulové hmotnosti směsi iontů a elektronů, a stavová rovnice hvězdné látky bude mít tvar

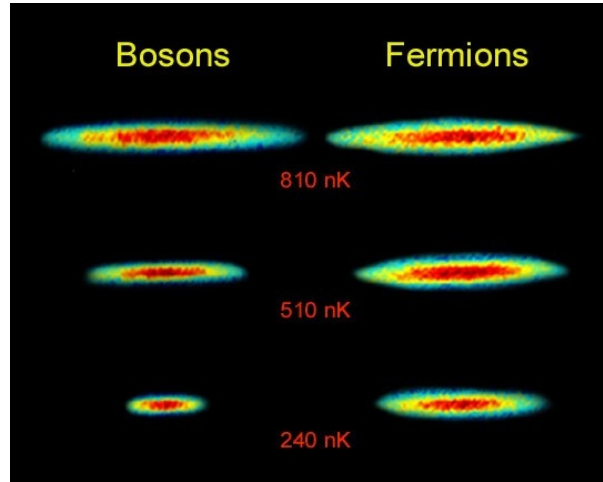
$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathcal{R}T + \frac{a}{3} T^4. \quad (61)$$

2.2.3 Elektronová degenerace

U méně hmotných hvězd je v centrálních částech tak vysoká koncentrace hmoty, že tam dochází ke stavu *degenerace*. Za této situace se u fermionů uplatňuje *Pauliho vylučovací princip*, který brání obsazení daného kvantového stavu (energetické hladiny) více než jedním fermionem (obr. 5). Při hustotách nad asi 10^9 kg m^{-3} , nabývá tato degenerace dokonce relativistický charakter. To nastává až v nitrech bílých trpaslíků.

Vzhledem k tomu, že podle klasického *Maxwellova rozdělení* je nejpravděpodobnější rychlost v_M částice dána vztahem

$$v_M = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (62)$$



Obrázek 5: Obláček bosonů (lithia-7) a fermionů (lithia-6) při nízkých teplotách řádu 10^{-7} K, kdy se již výrazně projevuje Pauliho vylučovací princip, který platí pro fermiony, ale nikoli pro bosony. Plyn lithia-6 proto zaujímá při dané teplotě větší objem, neboť v něm navíc působí degenerovaný tlak. Převzato z Truscott a spol. (2001).

kde m a T jsou hmotnost a teplota částice a k Boltzmannova konstanta, je zřejmé, že kinetické rychlosti částic jsou klesající funkcí jejich hmotnosti. Stupeň degenerace iontů je proto mnohem *menší* než pro elektrony. Ukazuje se, že alespoň v oblastech nerelativistické degenerace lze ionty považovat za nedegenerované, chovající se jako částice ideálního plynu. Iontová degenerace nastupuje až při hustotách nad 10^{12} kg m^{-3} .

V oblastech elektronové degenerace musíme uvažovat ionty a elektrony zvlášť. Můžeme ovšem předpokládat, že elektronová degenerace se uplatňuje pouze v situacích, kdy je plyn již plně ionizován, takže vzhledem k dříve řečenému můžeme pro atomovou hmotnost iontů μ_i a volných elektronů μ_e psát

$$\mu_i^{-1} = \sum_E \frac{w_E}{A_E}, \quad \mu_e^{-1} = \sum_E \frac{w_E}{A_E} Z_E. \quad (63)$$

Pro střední molekulovou hmotnost plazmatu tedy zřejmě platí

$$\mu^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_e^{-1}. \quad (64)$$

Pro počty iontů a elektronů v objemové jednotce můžeme tak psát

$$N_i = \rho \frac{N_A}{\mu_i}, \quad N_e = \rho \frac{N_A}{\mu_e}. \quad (65)$$

Jak již bylo řečeno, zůstávají ionty i za velmi extrémních podmínek prakticky nedegenerované, takže stavová rovnice iontového plynu zůstává ve tvaru

$$P_i = \frac{\rho}{\mu_i} N_A k T. \quad (66)$$

Pro degenerovaný elektronový plyn je ovšem třeba použít kvantovou statistiku, která pro nerelativistickou degeneraci vede na následující vztahy pro počet elektronů v objemové jednotce a pro elektronový tlak

$$N_e = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\psi) \quad (67)$$

a

$$P_e = \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} N_e kT \quad (68)$$

kde h je Planckova konstanta, m_e hmotnost elektronu, ψ označuje *parametr degenerace* (čím vyšší hodnota, tím vyšší stupeň degenerace) a

$$F_k(\psi) = \int_0^{\infty} \frac{u^k du}{e^{u-\psi} + 1} \quad (69)$$

jsou *Fermiho–Diracovy funkce*. S využitím vztahu (65) dostaneme

$$\rho = \frac{4\pi}{N_0 h^3} (2m_e k)^{\frac{3}{2}} \mu_e T^{\frac{3}{2}} F_{\frac{1}{2}}(\psi) \quad (70)$$

a

$$P_e = \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \frac{\rho}{\mu_e} \mathfrak{R}T. \quad (71)$$

To jsou však parametrické rovnice a počítat parametr $\psi(\rho, T)$ přímo z rovnice (70) by nebylo snadné. Naštěstí existuje několik velmi dobrých aproximací. Zde se přidržíme aproximačního vzorce z práce Larson a Demarque (1964), který pro $\psi < 30$ dává chybu menší než 0,02 %:

$$\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi) = F_{\frac{1}{2}}(\psi) \frac{(1 + 0,1938 F_{\frac{1}{2}}(\psi))^{\frac{5}{3}}}{1 + 0,12398 F_{\frac{1}{2}}(\psi)}. \quad (72)$$

Pro tlak plynu P_g můžeme pak psát s použitím vztahu (64)

$$\begin{aligned} P_g &= \beta P = P_i + P_e = \frac{\rho}{\mu_i} \mathfrak{R}T + \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \frac{\rho}{\mu_e} \mathfrak{R}T = \\ &= \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T \left(\frac{\mu}{\mu_i} + \frac{\mu}{\mu_e} \frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} \right) = \\ &= \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T \left[\mu \left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_e} \right) + \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T \left[1 + \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Označíme-li

$$\lambda(\rho, T) = 1 + \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{\frac{2}{3} F_{\frac{3}{2}}(\psi)}{F_{\frac{1}{2}}(\psi)} - 1 \right), \quad (74)$$

můžeme zapsat stavovou rovnici platnou pro oblasti úplné ionizace včetně oblastí nerelativistické degenerace ve tvaru

$$P = \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R} T \lambda(\rho, T) + \frac{a}{3} T^4. \quad (75)$$

Povšimněme si ještě, že parametr $\lambda(\rho, T)$ můžeme z hustoty a teploty vypočítat tak, že (i) z hustoty (70) vypočítáme $F_{\frac{1}{2}}(\psi)$ a (ii) z aproximace (72) obdržíme $F_{\frac{3}{2}}(\psi)$.

Úplná degenerace. Poznamenejme závěrem, že pro limitní stav úplné elektronové degenerace plyne z Fermiho–Diracova rozdělení stavová rovnice ve tvaru

$$P_e = K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (76)$$

kde

$$K_1 = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{m_e m_p^{\frac{5}{3}}}, \quad (77)$$

m_e je hmotnost elektronu, m_p hmotnost protonu a $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J s je Planckova konstanta.⁸ Elektronová degenerace nastává ve chvíli, kdy elektronový tlak počítaný podle vztahu (76) převýší tlak plynu počítaný z rovnice ideálního plynu (48).

Pro zvláště vysoké hustoty se uplatní relativistické Fermiho–Diracovo rozdělení a limitně platí stavová rovnice ve tvaru

$$P_e = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad (78)$$

kde

$$K_2 = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{hc}{8m_p^{\frac{4}{3}}}. \quad (79)$$

⁸Všimněme si, že při zde zavedené bezrozměrné molekulové hmotnosti rozměrová analýza vztahů (76) a (77) souhlasí: $(\text{J}^2 \text{s}^2 \text{kg}^{-1} \text{kg}^{-\frac{5}{3}})(\text{kg m}^{-3})^{\frac{5}{3}} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$ ($\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$).

2.2.4 Částečná ionizace v povrchových vrstvách

Zcela ionizovaná látka tvoří obvykle zhruba 95 % celkové hmotnosti hvězdy. Vrstvy v blízkosti povrchu hvězdy jsou však ve stavu neúplné ionizace, což je složitější situace.

S pomocí vztahů (64) a (65) můžeme pro molekulovou hmotnost psát

$$\mu = \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} = \frac{\mu_i}{1 + \frac{\mu_e}{\mu_i}} = \frac{\mu_i}{1 + \frac{N_e}{N_i}} = \frac{\mu_i}{1 + Q}, \quad (80)$$

kde veličina $Q = N_e/N_i$ je průměrný počet elektronů připadajících na jeden atom směsi, který ovšem musíme vypočítat. Označme x_j^r relativní počet atomů typu j v r -tém stupni ionizace, ν_j relativní počet atomů typu j , M_j počet elektronů atomu typu j a N počet druhů atomů ve směsi. Pro hledanou veličinu Q lze pak psát

$$Q = \sum_{j=1}^N \nu_j \sum_{r=0}^{M_j} r x_j^r. \quad (81)$$

Veličiny x_j^r a Q jsou kromě rovnice (81) navzájem spojeny ještě vztahy plynoucími přímo ze *Sahovy rovnice* (obr. 6) ve tvaru

$$\frac{x_j^{r+1} P_e}{x_j^r} = K_j^r, \quad (82)$$

kde

$$K_j^r = \frac{2(2\pi m_e)^{\frac{3}{2}} (kT)^{\frac{5}{2}} U_j^{r+1}(T)}{h^3 U_j^r(T)} e^{-\frac{\chi_j^r}{kT}}, \quad (83)$$

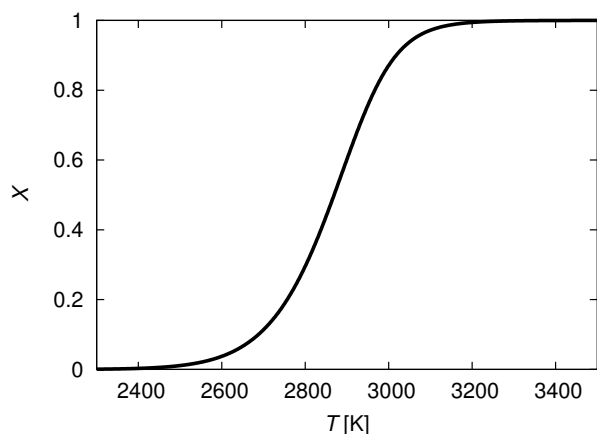
m_e označuje hmotnost elektronu, χ_j^r energii potřebnou ke zvýšení ionizace z r -tého na $(r + 1)$ -ní stupeň a $U_j^r(T)$ partiční funkci⁹ r -krát ionizovaného atomu typu j . Pro poměr tlaku plynu P_g k elektronovému tlaku P_e zřejmě platí

$$\frac{P_g}{P_e} = \frac{N_i + N_e}{N_e} = \frac{1}{Q} + 1 = \frac{1 + Q}{Q}, \quad (84)$$

takže vztahy mezi námi uvažovanými veličinami lze zapsat ve tvaru

$$\frac{x_j^{r+1} P_g}{x_j^r} \frac{Q}{1 + Q} = K_j^r, \quad (85)$$

⁹Kanonická partiční funkce $U \equiv \sum_i g_i \exp(-\frac{E_i}{kT})$, kde suma je přes všechny dovolené hladiny energie E_i , přičemž g_i jsou faktory degenerace.



Obrázek 6: Závislost ionizačního stupně X na teplotě T , vypočítaná se Sahovy rovnice pro vodíkový plyn ($E_i = -13,6$ eV) o koncentraci $N = 10^3$ částic/m³. Je patrné, že přechod z neutrálního do plně ionizovaného stavu nastává v poměrně úzkém rozpětí teplot.

To představuje $\sum_{j=1}^N (M_j - 1)$ rovnic. Počet neznámých x_j^r je zde ale větší, $\sum_{j=1}^N M_j$. Z definice veličin x_j^r ovšem plyne, že jsou svázány také podmínkou

$$\sum_{r=0}^{M_j} x_j^r = 1, \quad (86)$$

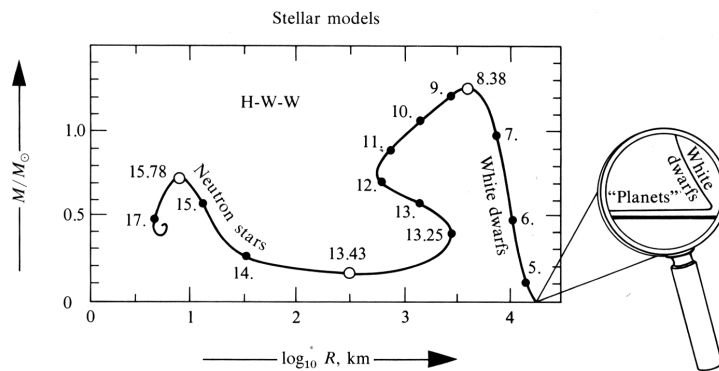
což představuje dodatečných N rovnic, které celou soustavu uzavírají.

Iterační řešení. Při konkrétní aplikaci je třeba se rozhodnout pro to, jaký soubor atomů bude detailně uvažován, a soustava rovnic (85) a (86) se řeší iteračně: (i) zvolíme nějakou počáteční hodnotu Q (s uvážením, že dominantní jsou vodík a helium, např. $Q = 2$); (ii) spočteme molekulovou hmotnost μ z rovnice (80); (iii) ze stavové rovnice

$$P_g = \frac{\rho}{\mu} \mathfrak{R}T \quad (87)$$

spočteme tlak plynu P_g ; (iv) řešením rovnic (85) a (86) získáme hodnoty všech uvažovaných veličin x_j^r ; (v) pomocí nich a rovnice (81) dostaneme zpřesněnou hodnotu Q (tj. počtu elektronů připadajících na jeden atom směsi). Celý postup opakujeme až do dosažení požadované přesnosti.

Složitější stavové rovnice. Závěrem dodejme, že při moderních výpočtech se používají ještě složitější stavové rovnice, než jaké jsme si zde popsali. Například Rogers, Swenson a Iglesias (1996) spočítali tlak a další stavové veličiny a jejich derivace jako funkce hustoty, tlaku a chemického složení pro celou síť možných kombinací se zahrnutím neúplné ionizace a dalších fyzikálních jevů souvisejících s odchylkami



Obrázek 7: Stavová rovnice husté látky, znázorněná jako poloměry a hmotnosti stabilních kulových hvězd. Křivka je parametrizovaná hodnotou tlaku $\log_{10}[p/c^2]_{\text{g}/\text{cm}^3}$. První vrchol odpovídá bílým trpaslíkům, které stabilizuje zejména gradient tlaku degenerovaného elektronového plynu, druhý charakterizuje neutronové hvězdy, tedy látku, u které je rozhodující tlak degenerovaného neutronového plynu. Převzato z Misner a spol. (1973).

od stavové rovnice ideálního plynu a dávají k dispozici i program pro interpolaci v jejich tabulkách. Smyslem je dosáhnout při výpočtech hvězdných modelů vysoké přesnosti, např. s ohledem na modely Slunce, bez nutnosti vlastní výpočty hvězdných modelů neúměrně prodloužit. Podobný postup se používá i pro koeficienty opacity hvězdné látky, jak o tom bude řeč později.

Kompaktní objekty. Pro přesné určení hmotnosti neutronových hvězd a černých děr se zase uvažují komplikovanější stavové rovnice husté hvězdné látky. Dobrý přehled o této problematice poskytuje např. článek Kaper a kol. (2006), ve kterém je probráno i srovnání teorie s pozorováními kompaktních objektů.

3 Základní rovnice stavby hvězd

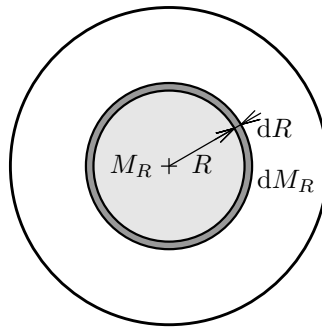
3.1 Rovnice zachování hmoty

Budiž M_R hmota obsažená v kouli o poloměru R a $\rho(R)$ hustota hvězdné látky ve vzdálenosti R od středu hvězdy. Hmotnost dM_R infinitezimální kulové vrstvy o vnitřním poloměru R a vnějším poloměru $R + dR$ (obr. 8) je

$$dM_R = \frac{4}{3}\pi [(R + dR)^3 - R^3] \rho \doteq 4\pi R^2 \rho dR, \quad (88)$$

kde jsme pochopitelně zanedbali vyšší mocniny diferenciálu dR . Odtud přímo plyne diferenciální rovnice zachování hmoty

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}. \quad (89)$$



Obrázek 8: Kulová vrstva o hmotnosti dM_R a tloušťce dR v nitru hvězdy.

3.2 Pohybová rovnice a její limitní případ: rovnice hydrostatické rovnováhy

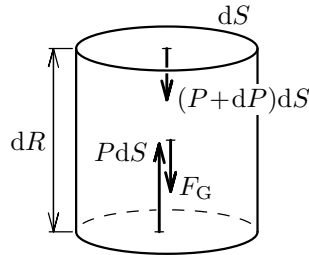
Na kulovou vrstvu v nitru hvězdy působí především síla gravitační a elektromagnetická, kterou modelujeme jako dvojici tlakových sil (obr. 9). Pohyb infinitezimálně tenké kulové vrstvy o hmotnosti dM_R a tloušťce dR a je pak popsán pohybovou rovnicí (dle 2. Newtonova zákona $ma = F$)

$$dM_R \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R dM_R}{R^2} + 4\pi R^2 P - 4\pi R^2 (P + dP), \quad (90)$$

kde síly na pravé straně jsou: (i) gravitace vnitřní koule o hmotnosti M_R a poloměru R — má záporné znaménko, neboť poloměr měříme od centra k povrchu, kdežto síla směřuje do centra, čili opačně (gravitace tlusté vnější kulové vrstvy je podle Newtonova teoremu nulová); (ii) tlaková síla na vnitřní plochu vrstvičky,

směřující ven; (iii) tlaková síla na vnější plochu, směřující opět dovnitř. Po jednoduché úpravě dostáváme *pohybovou rovnici* v obvyklém tvaru

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} - 4\pi R^2 \frac{dP}{dM_R}. \quad (91)$$



Obrázek 9: Infinitesimální váleček v nitru hvězdy, na který působí gravitační síla a dvojice tlakových sil.

Pro dynamicky stabilní hvězdy lze zanedbat člen na levé straně, popisující zrychlení, a uvažovat pouze *rovnici hydrostatické rovnováhy*, t.j. situaci, kdy změna tlaku od místa k místu právě vyrovnává gravitační sílu

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}. \quad (92)$$

Pozor! Je třeba vždy mít na paměti, že je to gradient tlaku, nikoliv tlak sám, co působí proti gravitační přitažlivosti. Chybná tvrzení na toto téma se občas objevují i u renomovaných autorů.

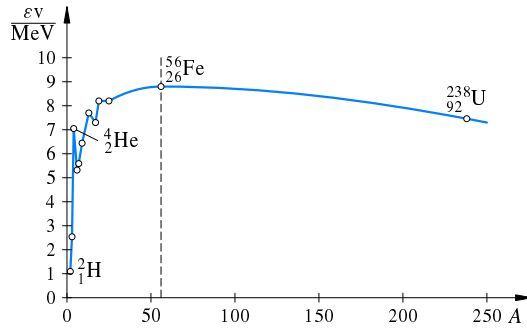
Existují samozřejmě i případy, kdy setrvačný člen $\frac{d^2 R}{dt^2}$ zanedbat nelze, například při rychlých pulzacích Cefeid, s periodou jen několik dní. Na druhou stranu si můžeme představit situaci v řídkém mezihvězdném oblaku, kdy $dP \doteq 0$, a protohvězda podle pohybové rovnice (91) nutně musí kolabovat.

3.3 Rovnice tepelné rovnováhy

Proberme nyní, jak a jakým způsobem hvězda získává a přeměňuje svou tepelnou energii. Zmínili jsme v úvodu, že koncem třicátých let 20. století se podařilo dokázat, že hlavním dlouhodobým zdrojem zářivé energie hvězd jsou syntetické jaderné reakce, tedy spojování dvou či více jader lehkých prvků na těžší, při kterém se uvolňuje velké množství energie ve formě záření, kinetické energie produktů a neutrin.

Energeticky zdaleka nejvýdatnější slučovací jadernou reakcí je přeměna vodíku na helium. To je způsobenou velkou vazebnou energií, kterou se vyznačuje helium a také další magická jádra jako uhlík $^{12}_6\text{C}$ nebo kyslík $^{16}_8\text{O}$ (obr. 10).

Známý jsou dva způsoby této přeměny: (i) proton–protonový řetězec a (ii) CNO cyklus, každý v několika variantách.



Obrázek 10: Vazebná energie E_v na jeden nukleon, pro jádra s různými atomovými čísly A .

3.3.1 Proton–protonový řetězec

Reakce první varianty proton–protonového řetězce (p-p I) lze zapsat následovně¹⁰

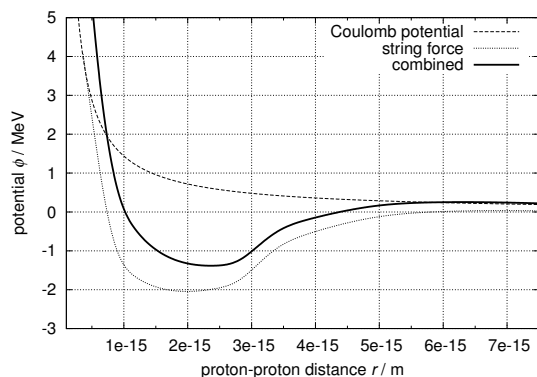
	uvolněná energie E	typ interakce	
$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$	1,18 MeV	slabá	(93)
$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$		anihilace	(94)
$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$	1,18 MeV		(95)
$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$			(96)
$D + p \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma$	5,49 MeV	silná	(97)
$D + p \rightarrow {}^3_2\text{He} + \gamma$	5,49 MeV		(98)
${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow \alpha + p + p$	12,86 MeV	silná ← pouze E_k !	(99)
$\sum E = 26,20 \text{ MeV}$			

kde $p \equiv {}^1_1\text{H}$ označuje proton, $D \equiv {}^2_1\text{H}$ deuterium, $\alpha \equiv {}^4_2\text{He}$ hélium, γ foton, e^+ pozitron, ν elektronové neutrino. Kdybychom reakce jaksi sečetli, obdržíme „ $4p + 2e^- \rightarrow \alpha + 6\gamma + 2\nu$ “, přičemž je zachován náboj ($2 = 2$) i baryonové číslo ($4 = 4$). **Pozor! Kromě 4 protonů se spotřebovávají i 2 elektrony**, jinak by v nitru Slunce neplatil zákon zachování náboje.

Celková energetická bilance je +26,74 MeV, ale z toho pouze 26,20 MeV je energie *využitelná* pro ohřev Slunce, neboť je ve formě kvant záření gama nebo *kinetické energie produktů*. (Viz poslední vydatnou reakci (99), kde se uvolňuje pouze E_k a žádná γ .) Energii 0,54 MeV odnášejí neutrino, která s okolním plazmatem interagují jen slabě ($\sigma_\nu \simeq 10^{-48} \text{ m}^2$) a prakticky všechna odletí z jádra rovnou do mezihvězdného prostoru.¹¹

¹⁰Můžeme se také setkat se zápisem $p(p, e^+\nu)D$, kde čárka znamená šipku, před levou závorkou je terč, za ní nálétávající projektil a vpravo příslušné produkty odletující z místa interakce nebo zůstávající v terči.

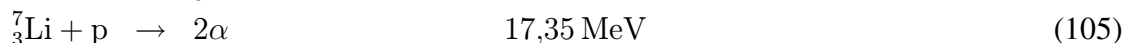
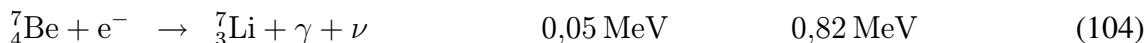
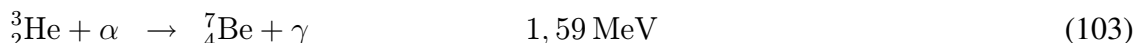
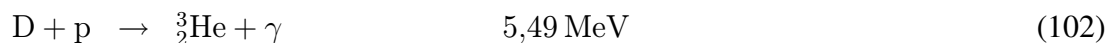
¹¹Výjimečná je situace při výbuchu supernovy, kdy je látka v nitru kolabující hvězdy velmi hustá a neutrino je produkováno obrovské množství, takže jejich interakce s látkou započítat musíme.



Obrázek 11: Potenciál coulombický, silné síly a jejich součet pro dva protony. V klasické mechanice je pohyb částice dovolen pouze v oblastech, kde je energie částice větší než potenciál, čili proton s energií 1 keV nalétávající zprava se od křivky potenciálu „odrazí“ a odletí zpět do nekonečna. V kvantové mechanice se však uplatňuje tunelový jev.

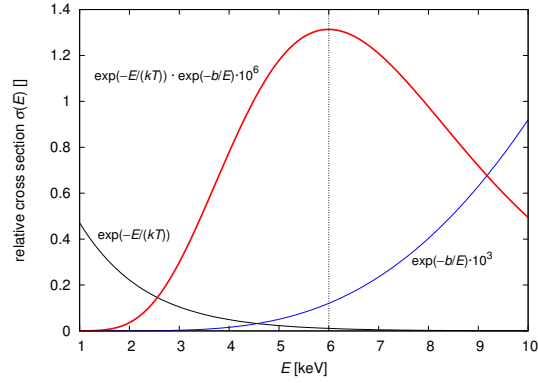
Všimněme si, že se zde uplatňují slabé i silné interakce. Zvláště slabé interakce probíhají velmi pomalu (trvají 10^{-8} s), mají malé účinné průřezy a jsou tedy málo pravděpodobné. (Daný proton v jádru Slunce interaguje s jiným protonem podle (93) typicky jednou za 10^{10} yr — naštěstí je tam protonů mnoho.) Kladně nabitá jádra musí překonat *coulombovskou bariéru*, tj. odpudivou elektromagnetickou sílu, neboť silná síla působí pouze na krátké vzdálenosti. Na obrázku 11 to vidíme jako vrchol potenciální energie, řádově 1 MeV, který nalétávající částice musí překonat. To však není snadné, neboť při teplotě $T \simeq 15 \cdot 10^6$ K mají protony kinetickou energii typicky řádu $E_k \simeq kT \simeq 1$ keV, tedy o tři řády menší. Zásadní roli zde sehrává kvantověmechanický *tunelový jev*, čili skutečnost, že vlnová funkce pro částice s nízkou energií má nenulovou amplitudu (a tedy i pravděpodobnost výskytu částice) i za zmiňovanou bariérou. Protože podle Maxwellova rozdělení rychlostí je částic s vysokou kinetickou energií málo, ale na druhou stranu právě tyto částice mají větší pravděpodobnost překonání bariéry, vykazuje závislost účinnosti reakcí na energii částic charakteristický *Gamowův vrchol* (obr. 12).

Druhá varianta p-p II nastává ve 31 % případů. Její počáteční reakce jsou stejné jako u p-p I



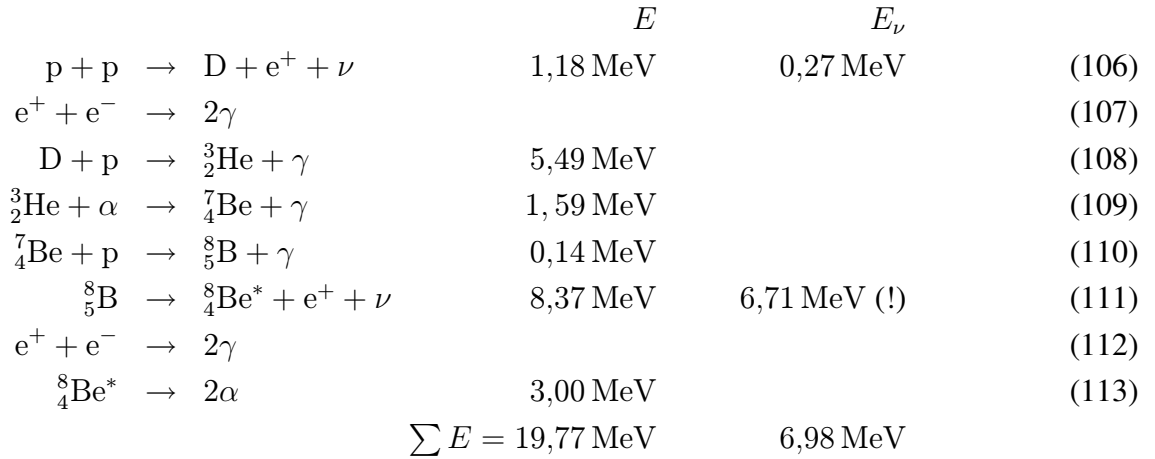
$$\sum E = 25,66 \text{ MeV} \quad 1,09 \text{ MeV}$$

Třetí varianta p-p III je vzácnější, neboť nastává s pravděpodobností jen 0,3 %. Je nicméně velmi důležitá,



Obrázek 12: Gamowův vrchol účinnosti termonukleárních reakcí, vznikající kombinací vlivu Maxwellova rozdělení rychlostí a pravděpodobnosti překonání coulombovské bariéry tunelovým jevem. Podle Carrol a Ostlie (2007).

protože se při ní produkuje vysokoenergetické neutrino (111), což se využívá při měření toku neutronů ze Slunce (hvězdička u berylia ${}^8_4\text{Be}^*$ označuje energeticky vyšší, excitovaný stav, vedoucí k rychlému rozpadu jádra)



Předpovězena je i čtvrtá varianta proton–protonového řetězce (p-p IV), ale ta je tak nepravděpodobná ($3 \cdot 10^{-7}$), že se s ní v rovnicích hvězdné stavby ani nepočítá.

Konkrétní průběh reakcí nás však vlastně nezajímá, nám jde především o *měrný výkon* ϵ_{pp} [$\text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}$], tj. množství energie, které se uvolní všemi variantami p-p řetězce v 1 g hvězdné látky za 1 s. Lze jej spočítat podle následujících vztahů; vypadají sice složitě, ale jde prostě o zadané nelineární funkce $\epsilon(\rho, T, X, Y, Z)$, které jsou výsledkem experimentální jaderné fyziky

$$\epsilon_{pp} = \epsilon_{pp1} + \epsilon_{pp2} + \epsilon_{pp3}, \quad (114)$$

$$\epsilon_{pp1} = (1 - \gamma) \epsilon, \quad (115)$$

$$\epsilon_{pp2} = \frac{1,96 \gamma}{1+W} \epsilon, \quad (116)$$

$$\epsilon_{pp3} = \frac{1,47 \gamma W}{1+W} \epsilon, \quad (117)$$

$$\epsilon = 2,06 \cdot 10^6 f_{1,1} g_{1,1} \rho T_6^{-\frac{2}{3}} X^2 e^{-33,804 T_6^{-\frac{1}{3}}}, \quad (118)$$

$$\gamma = \alpha \left[\left(1 + \frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right], \quad (119)$$

$$\alpha = 5,48 \cdot 10^{17} \left(\frac{Y}{4X} \right)^2 e^{-100 T_6^{-\frac{1}{3}}}, \quad (120)$$

$$W = 1,22 \cdot 10^{16} f_{7,1} g_{7,1} e^{-102,6 T_6^{-\frac{1}{3}}} \frac{X}{1+X} T_6^{-\frac{1}{6}}, \quad (121)$$

$$f_{1,1} = 1 + 0,25 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}, \quad (122)$$

$$f_{7,1} = 1 + \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}, \quad (123)$$

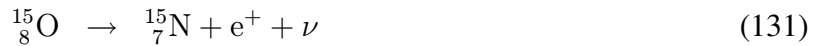
$$g_{1,1} = 1 + 0,012 T_6^{\frac{1}{3}} + 0,0078 T_6^{\frac{2}{3}} + 0,00065 T_6, \quad (124)$$

$$g_{7,1} = 1 + 0,004 T_6^{\frac{1}{3}}, \quad (125)$$

kde teplota $T_6 = 10^{-6}[T]_{\text{K}}$ a hustota ρ se udává v g/cm^3 . Na obrázku 13 je znázorněno, jak se energeticky uplatňují jednotlivé varianty p-p řetězce v závislosti na teplotě a hustotě.

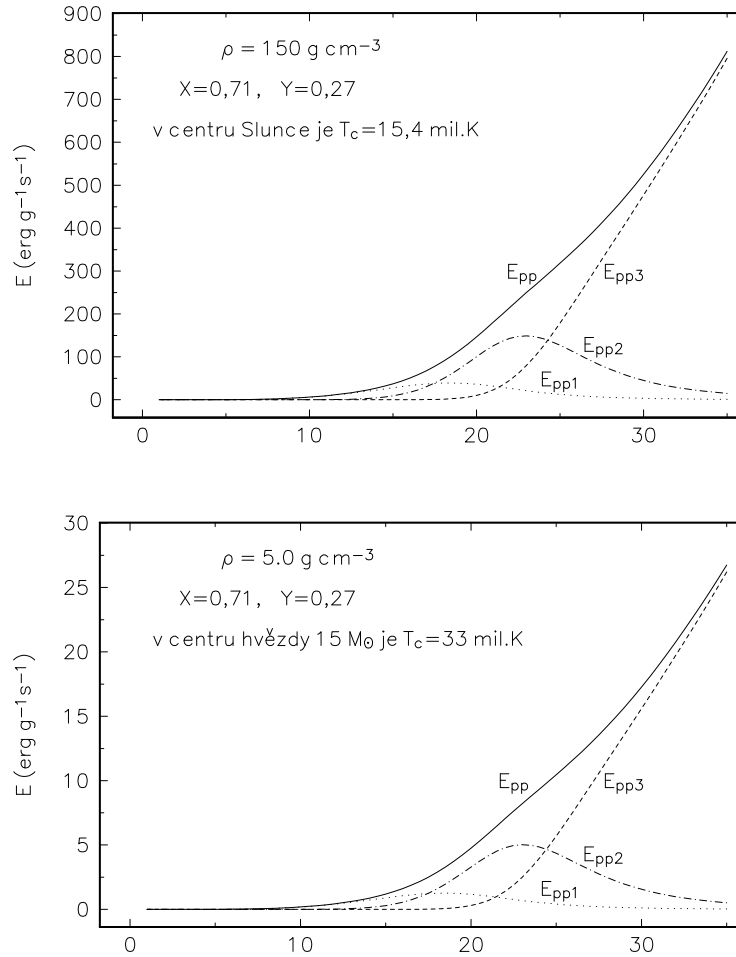
3.3.2 CNO cyklus

Jiný způsob jaderné přeměny vodíku na helium, který se významně uplatňuje pro vyšší teploty než p-p cykly, je *CNO cyklus*. Do něj v roli jakéhosi katalyzátoru vstupují nuklidy dusíku nebo uhlíku. Proto by tato reakce ve hvězdě složené pouze z vodíku a helia nemohla nastávat. Schematicky lze reakce CNO cyklu popsat takto:



Poté může reakce pokračovat dvojným způsobem. Buď vznikne přímo heliové jádro a uhlík, který vstoupil do reakce, se opět vyloučí, tedy





Obrázek 13: Energetická vydatnost jednotlivých variant p-p řetězce jaderné přeměny a jejich součtu v závislosti na teplotě a pro dvě různé hustoty, odpovídající nitru Slunce a nitru hvězdy o hmotnosti $15 M_\odot$ na začátku nukleárního vývoje.

nebo proběhne několik dalších reakcí a dojde k vyloučení nuklidu dusíku:



Měrný výkon (energii z 1 g látky za 1 s) této série reakcí lze spočítat ze vztahů

$$\epsilon_{\text{CNO}} = 7,94 \cdot 10^{27} f_{14,1} g_{14,1} \rho X_N T_6^{-\frac{2}{3}} e^{-152,313 T_6^{-\frac{1}{3}}}, \quad (139)$$

$$f_{14,1} = 1 + 1,75 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}, \quad (140)$$

$$g_{14,1} = 1 + 0,0027 T_6^{\frac{1}{3}} - 0,0037 T_6^{\frac{2}{3}} - 0,00007 T_6. \quad (141)$$

Průběh této syntézy závisí kriticky na reakci (130), která je „nejpomalejší“, t.j. nastává velmi nesnadno. Proto je ve vztahu (139) veličina X_N označující relativní obsah dusíku. Obvykle stačí přijmout empiricky závěr z modelů niter počítaných s detailním chemickým složením a brát jednoduše $X_N \doteq Z/3$. Horní panel obrázku 14 ukazuje závislost produkce energie CNO cyklem v závislosti na teplotě a porovnání s p-p cyklem pro hvězdu o hmotnosti $15 M_\odot$.

3.3.3 Přeměna hélia na uhlík a další reakce

Při teplotě vyšší než 10^8 K dochází v oblastech s vyšším obsahem helia k další významné slučovací reakci, nazývané 3α nebo *Salpeterova reakce*. Při ní se postupně tři heliová jádra přemění na jádro uhlíku



Příslušná produkce energie [$\text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}$] přeměny helia na uhlík je dána vztahy

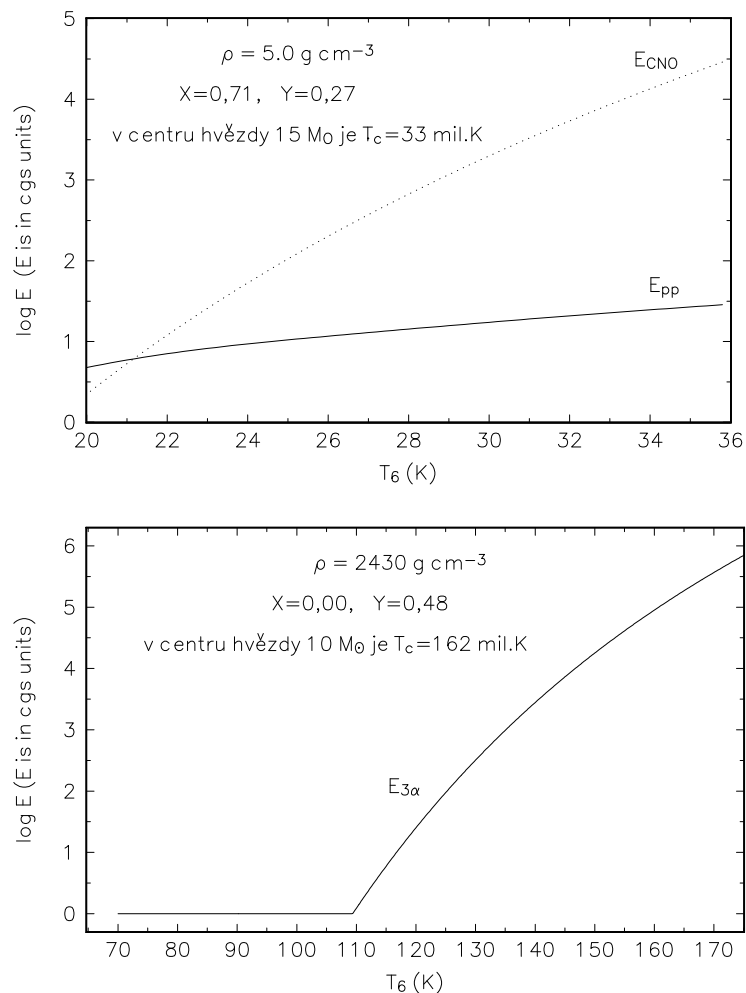
$$\epsilon_{3\alpha} = 3,46 \cdot 10^{17} \rho^2 Y^3 T_6^{-3} f_{3\alpha} e^{-4352 T_6^{-1}}, \quad (145)$$

$$f_{3\alpha} = 1 + 2,4 \rho^{\frac{1}{2}} T_6^{-\frac{3}{2}}. \quad (146)$$

Dolní panel obrázku 14 ukazuje závislost produkce energie 3α reakcí v závislosti na teplotě pro hvězdu o hmotnosti $10 M_\odot$ ve stádiu spalování helia.

Další heliová jádra se poté řetězovitě slučují na těžší prvky, například





Obrázek 14: *Horní panel* Energetická vydatnost CNO cyklu jaderné přeměny v závislosti na teplotě (udané v milionech K) a pro hustotu v nitru hvězdy o hmotnosti $15 M_{\odot}$ na začátku nukleárního vývoje. Kvůli přehlednosti je energetická vydatnost znázorněna v logaritmické škále. *Dolní panel:* Energetická vydatnost 3α reakce jaderné přeměny hélia na uhlík v závislosti na teplotě a pro hustotu v nitru hvězdy o hmotnosti $10 M_{\odot}$ ve stadiu spalování hélia v jádru. I zde byla použita logaritmická škála pro znázornění závislosti energetické vydatnosti na teplotě (udané v milionech K).

Při ještě vyšších teplotách nad $6 \cdot 10^8$ K dochází k řadě dalších, ale energeticky stále méně významných reakcí (např. přeměně uhlíku na hořčík) až dojde ke vzniku stabilních nuklidů skupiny železa.

3.3.4 Tepelná rovnováha a změny entropie

Kromě jaderných reakcí a časových změn ionizace v podpovrchových vrstvách nemá hvězda žádné další aktivní zdroje energie a lze ji považovat za izolovaný termodynamický systém. Označíme-li L_R výkon procházející povrchem koule o poloměru R od centra směrem k povrchu a budou-li dL_R a dM_R označovat změnu tohoto výkonu a přírůstek hmoty mezi koulemi o poloměrech R a $R + dR$, pak ve *stacionárním případě* (když se ionizace nijak nemění v čase) můžeme psát jednoduše

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}}, \quad (150)$$

kde $\epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T)$ měrný výkon jaderných reakcí v daném místě.

V obecnějším *nestacionárním* případě musíme uvážit i časové změny tepelné energie Q v 1 g hvězdné látky, tedy

$$dQ = TdS = \left(\epsilon_{\text{nuk}} - \frac{dL_R}{dM_R} \right) dt, \quad (151)$$

kde dS je změna entropie. Po úpravě

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}. \quad (152)$$

To je rovnice tepelné rovnováhy v základním tvaru. Při skutečném výpočtu je ovšem třeba specifikovat časové změny entropie konkrétně. Zahrnují totiž změny potenciální i vnitřní energie, včetně změn ionizace v podpovrchových vrstvách. Tento postup si zde alespoň naznačíme. Podle 1. věty termodynamické lze psát (s uvážením že objem 1 g látky $V = \frac{1}{\rho}$)

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad (153)$$

Veličina U označuje vnitřní energii, která je obecně funkcí stavových veličin ρ , T a střední molekulové hmotnosti μ , takže její změnu lze rozkládat do tvaru

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \mu} d\mu. \quad (154)$$

Je ovšem důležité si uvědomit, že diferenciál $d\mu$ v rovnici (154) představuje takto samostatně pouze změny způsobené změnami chemického složení (buď v důsledku nukleární přeměny elementů nebo vlivem konvekce zasahující hluboko do oblastí s gradientem chemického složení, který vznikl v důsledku nukleárních

změn během předchozího vývoje hvězdy). Nejde naopak o změny vyvolané ionizací ve vrstvách blíže k povrchu hvězdy. Ty jsou totiž — jak jsme viděli — funkcí teploty a nejsou proto nezávislé.

Je třeba si ještě uvést konkrétní výrazy pro vnitřní energii U 1 g hvězdné látky. Statistická fyzika a teorie záření dávají pro jednotlivé složky tyto výrazy:

$$U_i = \frac{3}{2}n_i kT, \quad (155)$$

$$U_e = \frac{3}{2}n_e kT \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}}, \quad (156)$$

$$U_r = \frac{aT^4}{\rho}, \quad (157)$$

kde n_i a n_e představují počet iontů a počet elektronů v 1 g hvězdné látky. Ty lze vyjádřit pomocí Avogadrova čísla a střední molekulové hmotnosti a pro celkovou vnitřní energii plazmatu pak psát

$$U_i + U_e = \frac{3}{2}N_A kT \left(\frac{1}{\mu_e} \frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\mu_i} \right) = \quad (158)$$

$$= \frac{3}{2}\mathfrak{R}T \left[\mu_i^{-1} + \mu_e^{-1} + \mu_e^{-1} \left(\frac{\frac{2}{3}F_{\frac{3}{2}}}{F_{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \right], \quad (159)$$

takže při použití vztahů (56) a (75) dostáváme

$$U_i + U_e = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T \lambda = \frac{3}{2} \frac{\beta P}{\rho}, \quad (160)$$

$$U_r = 3(1 - \beta) \frac{P}{\rho}, \quad (161)$$

$$U = U_i + U_e + U_r = \frac{3}{2} \frac{\beta P}{\rho} + 3(1 - \beta) \frac{P}{\rho} = \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} (2 - \beta). \quad (162)$$

V podpovrchových vrstvách je třeba navíc uvažovat i příspěvek ionizační energie. Označíme-li χ_j^r ionizační potenciál j -tého prvku pro r -tý stupeň ionizace, pak lze při stejné notaci jako jsme použili u stavové rovnice v podpovrchových vrstvách psát

$$U_{\text{ion}} = \frac{N_A}{\mu_i} \sum_{j=1}^N \nu_j \sum_{r=0}^{M_j} x_j^r \sum_{s=0}^{r-1} \chi_j^s. \quad (163)$$

3.4 Rovnice přenosu energie

Změna teploty od místa k místu je ve hvězdném nitru určována způsobem přenosu energie ve hvězdě. V principu existují tři způsoby přenosu energie:

1. vedením tepla (částicovou difusí);
2. zářením (zářivou difusí);
3. konvekcí.

První dva způsoby jsou mikroskopické, poslední je makroskopický. Tepelná vodivost hvězdného materiálu je ve většině případů zanedbatelná, roli hraje pouze v podmínkách extrémních hustot (v bílých trpaslících, neutronových hvězdách), kde se uplatňuje elektronová degenerace. Formálně lze ovšem záření a vedení popisovat velmi podobně.

3.4.1 Rovnice zářivého přenosu energie

Příčin difuze je mnoho, od absorpce na negativních iontech vodíku¹², absorpce (a emise) na jiných atomech, až po rozptyl na volných elektronech. Míra neprůhlednosti hvězdného materiálu, *opacita* $\kappa_\nu(\rho, T, X, Y, Z)$ hvězdné látky, je velmi složitou funkcí hustoty ρ , teploty T , chemického složení a také vlnové délky, resp. frekvence ν . Numericky koeficient opacit udává *relativní úbytek zářivé energie na jednotkové vzdálenosti při jednotkové hustotě dané látky*. Jednotkou opacit je tedy $[\kappa] = \frac{1}{\text{cm}} \frac{1}{\text{g cm}^{-3}} = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$.

Výpočet opacitního koeficientu představuje samostatný a náročný úkol. Pro hvězdná nitra, kde se zvažuje jen celková energetická bilance, se používají koeficienty opacit $\kappa(\rho, T, X, Y, Z)$, středované přes všechny vlnové délky. Tyto koeficienty bývají v samostatných studiích obvykle tabelovány a při výpočtech modelů hvězdných nitier se v takových tabulkách *numericky interpoluje*. Po řadu let byly používány tabulky Coxovy (Cox a spol. 1965), ale od poloviny devadesátých let jsou k dispozici tabulky nové, které m.j. umožnily nalézt příčinu pulsační nestability hvězd typu β Cep (Rogers a Iglesias 1992, obr. 15, 16).

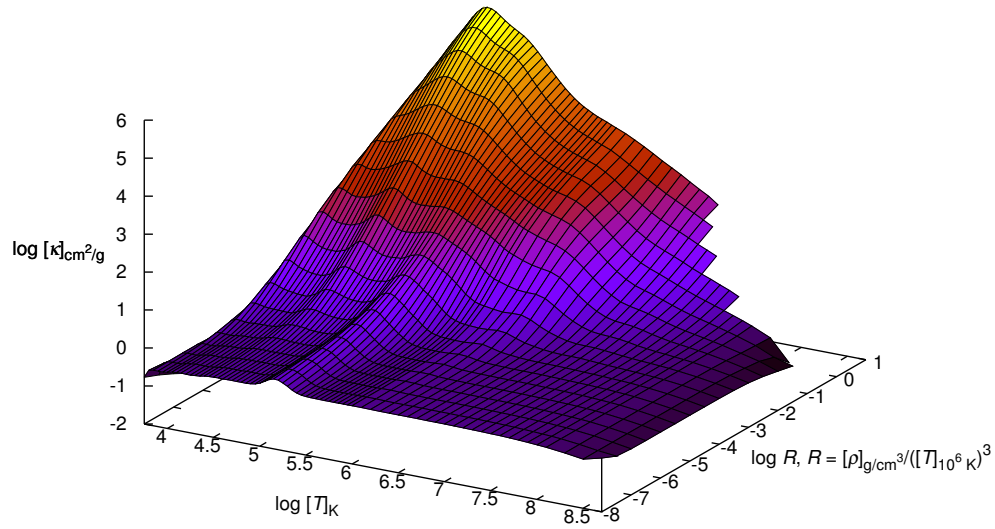
Rovnici zářivého přenosu energie odvodíme v následujících krocích:

1. napíšeme rovnici přenosu záření pro intenzitu I ;
2. zavedeme integrální veličiny hustotu u , tok H a tlak P_r ;
3. zintegrujeme rovnici přenosu přes prostorový úhel ω ;
4. vynásobíme ji $\cos \theta$ a zintegrujeme znovu;
5. rozvineme skoro izotropní intenzitu v řadu;
6. elegantně se zbavíme emise j pomocí Kirchhoffova zákona.

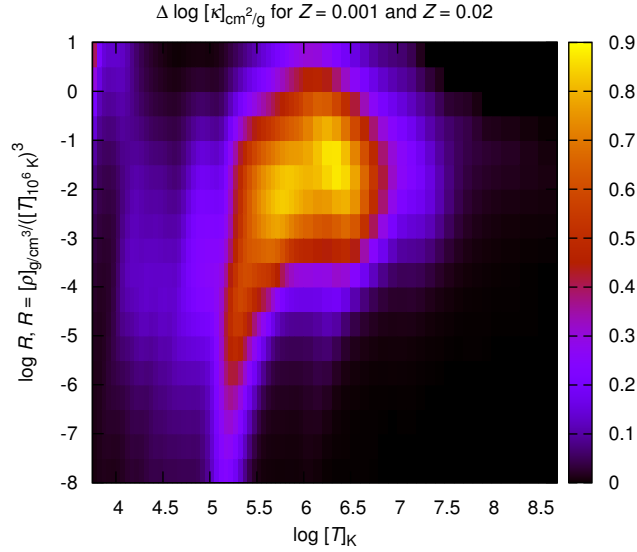
Připomeňme definici intenzity (integrované přes celý rozsah vlnových délek)

$$dE = I(x, y, z, \vartheta, \varphi, t) dt ds \cos \vartheta d\omega, \quad (164)$$

¹²Negativní iont vodíku zvaný též hydrid vodíku H^- je málo stabilní částice sestávající z 1 protonu a dvou elektronů.

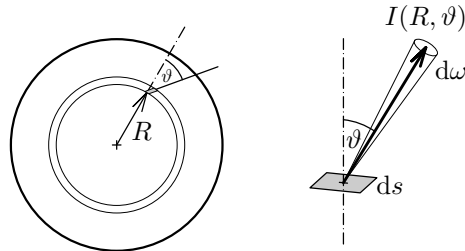


Obrázek 15: Hodnoty opacitního koeficientu κ v závislosti na teplotě T a parametru R , pro látku s $X = 0,70$, $Y = 0,28$, $Z = 0,02$. Podle Rogers a Iglesias (1996).



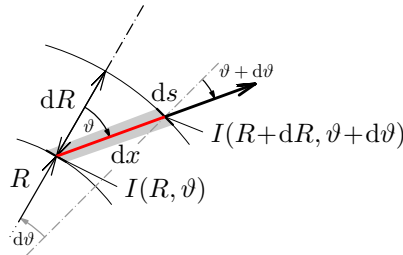
Obrázek 16: Rozdíly opacitních koeficientů $\Delta \log \kappa$ pro různé hodnoty metalicity $Z = 0,02$ a $0,001$. Je patrné, že v rozmezí teplot 10^5 až 10^7 K se opacita liší skoro o řád. Podle Rogers a Iglesias (1996).

jakožto energie procházející za jednotku času dt jednotkovou plochou ds (pod úhlem θ) do jednotkového prostorového úhlu $d\omega$. V našem případě bude intenzita pouze funkcí $I(R, \vartheta)$, kde R je vzdálenost od centra hvězdy a směr ϑ měříme od spojnice s centrem (obr. 17). Jinak předpokládáme osovou symetrii, tudíž zde nevystupuje úhel φ .



Obrázek 17: Definice intenzity $I(R, \vartheta)$ v nitru sféricky symetrické hvězdy.

Rovnice přenosu záření ve sférické symetrii. Uvažujme o energetické bilanci infinitesimálního komolého válečku, který je „vměstnán“ mezi dvě kulové slupky o poloměrech R a $R+dR$ a který s radiusvektorem svírá úhel ϑ , má výšku dx a plochu podstavy ds (obr. 18).



Obrázek 18: Infinitesimální váleček v nitru hvězdy, s vyznačenými veličinami dx , ds , dR , ϑ , $d\vartheta$.

Podle zákona zachování energie musí platit

$$\underbrace{I(R+dR, \vartheta+d\vartheta) dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{záření z válečku vystupující}} = \underbrace{I(R, \vartheta) dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{vstupující}} + \underbrace{j \rho dx dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{emise}} - \underbrace{\kappa \rho I(R, \vartheta) dx dt ds \cos \vartheta d\omega}_{\text{absorpce}}, \quad (165)$$

kde j označuje koeficient emise a κ koeficient opacity. Použijeme-li rozvoj intenzity

$$I(R+dR, \vartheta+d\vartheta) = I(R, \vartheta) + \frac{\partial I}{\partial R} dR + \frac{\partial I}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad (166)$$

a geometrické vztahy

$$dR = dx \cos \vartheta, \quad d\vartheta = -\frac{dx \sin \vartheta}{R}, \quad (167)$$

lze rovnici přenosu záření zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial I}{\partial R} \cos \vartheta - \frac{1}{R} \sin \vartheta \frac{\partial I}{\partial \vartheta} + \kappa \rho I - j\rho = 0. \quad (168)$$

Integrální veličiny. V této chvíli je užitečné zavést některé integrální veličiny. První je *hustota zářivé energie* u . Množství zářivé energie dE procházející za čas dt ploškou ds ze směru svírajícího s kolmicí na plošku úhel ϑ bude zřejmě $dE = I dt ds \cos \vartheta d\omega$. Protože toto záření se pohybuje rychlostí světla c , naplní za čas dt objem $dV = c dt ds \cos \vartheta$. Hustota záření přicházejícího z daného směru bude tedy

$$\frac{dE}{dV} = \frac{1}{c} I d\omega \quad (169)$$

a integrací přes celý prostorový úhel dostaneme pak celkovou hustotu záření

$$u = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I d\omega. \quad (170)$$

Uvědomme si také, že integrálem přes prostorový úhel ω rozumíme dvojitou integraci přes úhlové souřadnice φ, ϑ

$$\int_{\omega=0}^{4\pi} d\omega \equiv \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} d\vartheta d\varphi \sin \vartheta, \quad (171)$$

a takto budeme integrál prakticky počítat.

Další užitečnou veličinou je *tok záření* H , t.j. množství zářivé energie procházející za jednotku času jednotkovou plochou *ze všech směrů*. Je zřejmě

$$H = \int_0^{4\pi} I \cos \vartheta d\omega. \quad (172)$$

Třetí integrální veličinou je *tlak záření* P_r . Uvažujme hybnost záření přicházejícího z určitého směru, dp . Je-li celková hmotnost tohoto záření dm , lze pro jeho hybnost psát $dp = c dm$. S použitím Einsteinovy rovnice

$$dE = c^2 dm \quad (173)$$

je tedy výraz pro příspěvek hybnosti záření

$$dp = c dm = \frac{dE}{c}, \quad (174)$$

takže síla působící na plošku ds od uvažovaného příspěvku záření je podle druhého Newtonova zákona a s využitím vztahu (164)

$$\Delta f = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{I}{c} \cos \vartheta ds d\omega. \quad (175)$$

Složka síly působící kolmo na uvažovanou plošku bude ovšem $\Delta F = \Delta f \cos \vartheta$. Složky působící tečně nás nezajímají, neboť jejich součet je při axiálně symetrické intenzitě nulový. Tlak je výsledná síla působící na jednotkovou plochu, čili

$$P_r = \frac{1}{ds} \int_0^{4\pi} \Delta F = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} I \cos^2 \vartheta d\omega. \quad (176)$$

1. integrál rovnice přenosu. Nyní se můžeme vrátit k rovnici přenosu (168) a integrovat ji přes celý prostorový úhel

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial R} \overbrace{I \cos \vartheta d\omega}^H - \frac{1}{R} \int_{\omega} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\omega}^{\text{„problém“}} + \kappa \rho \overbrace{\int_{\omega} I d\omega}^{uc} - j\rho \overbrace{\int_{\omega} d\omega}^{4\pi} = 0. \quad (177)$$

Vidíme, že snadno zavedeme některé integrální veličiny, ale problematický je druhý integrál, protože neznáme konkrétní tvar $I(\vartheta)$ a pak je těžko derivovat a integrovat. Pomůžeme si však integrováním per partes¹³

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\omega &= \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta}}^{f'} \overbrace{\sin \vartheta \sin \vartheta}^{g = \sin^2 \vartheta} d\vartheta d\varphi = \\ &= \int_{\varphi} \underbrace{[I \sin^2 \vartheta]_0^{\pi}}_{=0} d\varphi - \underbrace{\int_{\varphi} \int_{\vartheta} I 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi}_{2H} = -2H \end{aligned} \quad (178)$$

a 1. integrál pak můžeme upravit do konečného tvaru

$$\frac{dH}{dR} + \frac{2H}{R} + \kappa \rho cu - 4\pi j\rho = 0. \quad (179)$$

2. integrál rovnice přenosu. Analogicky můžeme integrovat rovnici přenosu (168) násobenou faktorem $\cos \vartheta$

$$\int_{\omega} \frac{\partial}{\partial R} \overbrace{I \cos^2 \vartheta d\omega}^{P_r c} - \frac{1}{R} \int_{\omega} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega}^{\text{„problém“}} + \kappa \rho \overbrace{\int_{\omega} I \cos \vartheta d\omega}^H - j\rho \overbrace{\int_{\omega} \cos \vartheta d\omega}^{=0} = 0. \quad (180)$$

¹³ $\int f'g = [fg] - \int fg'$

Nejprve ověříme nulovost posledního členu

$$\int_{\omega} \cos \vartheta d\omega = \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{\cos \vartheta \sin \vartheta}^{\frac{1}{2} \sin 2\vartheta} d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi} \overbrace{\left[-\frac{1}{4} \cos 2\vartheta \right]_0^{\pi}}^{=0} d\varphi = 0. \quad (181)$$

Druhý člen opět integrujeme metodou per partes

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{\partial I}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta d\omega &= \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{\frac{\partial I}{\partial \vartheta}}^{f'} \overbrace{\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta}^{g = \sin^2 \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi} \overbrace{\left[I \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \right]_0^{\pi}}^{=0} d\varphi - \\ &- \int_{\varphi} \int_{\vartheta} I (2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta + \sin^2 \vartheta \cdot (-\sin \vartheta)) d\vartheta d\varphi = \\ &= -2 \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{I \cos^2 \vartheta \sin \vartheta}^{cP_r} d\vartheta d\varphi + \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \overbrace{(1 - \cos^2 \vartheta)}^{cu} \overbrace{\sin \vartheta}^{cP_r} d\vartheta d\varphi = \\ &= -2cP_r + cu - cP_r = -3cP_r + cu. \end{aligned} \quad (182)$$

Dostáváme tak 2. integrál

$$\frac{dP_r}{dR} + \frac{1}{R}(3P_r - u) + \frac{\rho\kappa}{c}H = 0. \quad (183)$$

Rozvoj skoro izotropní intenzity. K řešení je třeba ještě třetí vztah. Konkrétní tvar funkce $I(\vartheta)$ sice neznáme, ale protože pole záření uvnitř hvězdy je velmi blízké isotropnímu, můžeme intenzitu rozvinout v řadu

$$I(\vartheta) = I_0 + I_1 \cos \vartheta + I_2 \cos^2 \vartheta + \dots, \quad (184)$$

kde I_0, I_1, I_2 již na ϑ nezávisí. Lze dokázat (viz Schwarzschild 1958), že již člen I_2 je o 20 řádů menší než I_0 , takže jej lze pro všechny praktické účely zcela zanedbat. Dosadíme-li proto do definic integrálních veličin (170), (172) a (176) výraz $I = I_0 + I_1 \cos \vartheta$, obdržíme velmi jednoduché výrazy pro hustotu, tok a tlak záření

$$u = \frac{1}{c} \int_{\omega} I_0 d\omega + \frac{1}{c} \int_{\omega} I_1 \cos \vartheta d\omega = \frac{4\pi}{c} I_0 + \frac{1}{c} I_1 \int_0^{2\pi} \overbrace{\int_0^{\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}^{=0} d\varphi = \frac{4\pi}{c} I_0. \quad (185)$$

$$(186)$$

$$H = \overbrace{\int_{\omega} I_0 \cos \vartheta d\omega}^{=0} + \int_{\omega} I_1 \cos^2 \vartheta d\omega = I_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = I_1 2\pi \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} I_1, \quad (187)$$

$$(188)$$

$$P_r = \frac{1}{c} \overbrace{\int I_0 \cos^2 \vartheta d\omega}^{\text{stejně jako u } H} + \frac{1}{c} \overbrace{\int I_1 \cos^3 \vartheta d\omega}^{=0} = \frac{4\pi}{3c} I_0. \quad (189)$$

Z toho mimochodem plyne, že při skoro izotropní intenzitě je

$$P_r = \frac{1}{3} u. \quad (190)$$

Kirchhoffův zákon. Protože v nitru existuje *lokální termodynamická rovnováha*, lze pro vyjádření emisního koeficientu využít Kirchhoffův zákon a psát

$$j = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \kappa + \frac{\epsilon}{4\pi}, \quad (191)$$

kde $\epsilon = \epsilon_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}$ představuje součet nukleární, vnitřní i gravitační energie uvolňované za jednotku času v jednotce hmoty *do všech směrů*, zatímco emisní a absorpční koeficienty jsou vztaženy k jednotkovému prostorovému úhlu.

Pro celkový tok energie povrchem koule obsahující hmotu M_R zřejmě platí

$$L_R = 4\pi R^2 H \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_R}{dR} = 8\pi R H + 4\pi R^2 \frac{dH}{dR} \quad (192)$$

a tedy

$$\frac{dH}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{dL_R}{dR} - \frac{2H}{R} = \rho \frac{dL_R}{dM_R} - \frac{2H}{R} = \rho \epsilon - \frac{2H}{R}. \quad (193)$$

1. integrál (179) lze tedy s použitím rovnice (152) přepsat do tvaru

$$\rho \epsilon - \frac{2H}{R} + \frac{2H}{R} + c\kappa \rho u - 4\rho \sigma T^4 \kappa - \rho \epsilon = 0, \quad (194)$$

což po algebraické úpravě vede na vztah pro hustotu záření (při LTE)

$$u = \frac{4\sigma}{c} T^4 = aT^4. \quad (195)$$

Dosazením do rovnice (190) pak dostáváme i výraz pro tlak záření

$$P_r = \frac{1}{3} aT^4, \quad (196)$$

který jsme již (bez odvození) použili v oddílu věnovaném stavové rovnici hvězdné látky — viz rovnice (56).

Dosadíme-li ve 2. integrálu (183) za P_r , u a H , dostaneme

$$\frac{1}{3}a4T^3\frac{dT}{dR} + \frac{1}{R}\left(\frac{1}{3}aT^4 - aT^4\right) + \frac{\rho\kappa}{4\pi cR^2}L_R = 0, \quad (197)$$

neboli

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{3\rho\kappa L_R}{16\pi acR^2T^3}, \quad (198)$$

což lze ještě s využitím rovnice kontinuity (89) upravit na tvar

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{3\kappa L_R}{64ac\pi^2T^3R^4}. \quad (199)$$

To je rovnice zářivé rovnováhy.

Rosselandova střední opacita. Závěrem tohoto oddílu si ještě naznačíme, jak se počítá koeficient zářivé difuze, vhodným způsobem středovaný přes všechny frekvence elektromagnetického záření, neboli Rosselandova střední opacita κ . Z 2. integrálu (183) a vztahu $P_r = \frac{1}{3}u$ plyne vztah mezi tokem a hustotou záření

$$H = -\frac{c}{3\rho}\frac{1}{\kappa}\frac{du}{dR}, \quad (200)$$

přičemž celý postup, který jsme k odvození použili, by bylo možno provést i pro monochromatické veličiny intenzity, hustoty a toku záření, a proto můžeme analogicky psát

$$H_\nu = -\frac{c}{3\rho}\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}. \quad (201)$$

Vzhledem k tomu, že v nitrech hvězd je velmi přesně splněna podmínka lokální termodynamické rovnováhy, lze monochromatickou hustotu záření velmi dobře aproximovat *Planckovou funkcí* a psát

$$u_\nu \doteq \frac{4\pi}{c}B_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (202)$$

Celkový, integrální tok záření lze z (201) získat integrací přes všechny frekvence, což formálně zapíšeme jako

$$H = \int_0^\infty H_\nu = -\frac{c}{3\rho}\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}d\nu = -\frac{c}{3\rho}\overbrace{\int_0^\infty \frac{du}{dR}d\nu}^{\text{rozšíření}} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{du_\nu}{dR}d\nu. \quad (203)$$

Chceme-li, aby tato rovnice odpovídala rovnici (200) pro integrální tok záření, pak zřejmě musí pro integrální koeficient opacity platit

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{du_{\nu}}{dR} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{du_{\nu}}{dR} d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{du_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dR} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{du_{\nu}}{dT} \frac{dT}{dR} d\nu} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu}} \frac{dB_{\nu}(T)}{dT} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{dB_{\nu}(T)}{dT} d\nu}, \quad (204)$$

čili Rosselandovu střední opacitu získáme středováním, kde využíváme Planckovy funkce, respektive jejich derivace.

Odhad střední volné dráhy a toku. Podívejme se ještě jednou, co nám opacitní koeficient udává. Budeme-li uvažovat samostatně zářivé pohlcování energie, platí tedy, že prochází-li záření o intenzitě I v daném směru infinitesimálním válečkem hvězdné látky o jednotkové podstavě a výšce dx , bude z něj pohlceno záření dI dané vztahem

$$dI = -I\kappa\rho dx, \quad (205)$$

To znamená, že za střední volnou dráhu fotonů ve hvězdné látce můžeme označit takovou vzdálenost $l_f = dx$, během které dojde k pohlcení veškerého záření, tzn. kdy bude $|dI| = I$. Podle rovnice (205) z toho zřejmě plyne

$$l_f = \frac{1}{\kappa\rho}. \quad (206)$$

Pro model hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$ na začátku nukleárního vývoje udává Harmanec (1970) centrální teplotu 25,29 milionů K a centrální hustotu $22,59 \text{ g cm}^{-3}$. Z tabulek Rogerse a Iglesiase (1992) lze odhadnout pro tuto oblast hodnotu opacity asi $0,5 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, takže pro střední volnou dráhu fotonů dostáváme z rovnice (206) odhad $l_f = 0,89 \text{ mm}$.

Pro tentýž model můžeme rovněž odhadnout gradient teploty. V blízkosti středu hvězdy je

$$\frac{dT}{dR} = -3,99 \cdot 10^{-5} \text{ K cm}^{-1}, \quad (207)$$

zatímco na hranici sféry obsahující 97 % celkové hmotnosti hvězdy je to $-9,16 \cdot 10^{-5} \text{ K cm}^{-1}$. Z rovnic (195) a (200) plyne pro celkový tok jednotkou plochy v místě s poloměrem R

$$H = -\frac{16}{3\rho\kappa} \sigma T^3 \frac{dT}{dR}. \quad (208)$$

Tento tok si můžeme porovnat s tokem absolutně černého tělesa *do poloprostoru* ve stejném místě, který je dán vztahem

$$\pi B = \sigma T^4. \quad (209)$$

Pokud by platila termodynamická rovnováha dokonale, byl by ovšem celkový tok plochou v daném místě nulový. Velikost toku H je proto mírou nerovnováhy a zářivého přenosu energie ve hvězdě.

Uvažujme pro příklad sféru obsahující 0,001 celkové hmotnosti uvažované hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$. Ta má podle modelu poloměr $4,365 \cdot 10^9$ cm. Pro odpovídající hodnoty teploty a jejího gradientu, hustoty a opacity pak dostáváme

$$H = 1,71 \cdot 10^{14} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}, \quad (210)$$

zatímco tok černého tělesa jednotkovou plochou do poloprostoru by byl o jedenáct řádů větší

$$\pi B = 2,26 \cdot 10^{25} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (211)$$

Poznámka o difuzním formalismu. Závěrem ještě poznamenejme, že díky velmi malé střední volné dráze lze na zářivý přenos energie pohlížet jako na *difuzi*. Z fyziky víme, že pro difuzní tok částic f_p mezi místy s různou částicovou hustotou ρ_n platí vztah

$$f_p = -D \nabla \rho_n, \quad (212)$$

kde difuzní koeficient D souvisí se střední rychlostí částic v a jejich střední volnou dráhou l_p vztahem

$$D = \frac{1}{3} v l_p. \quad (213)$$

Pro záření lze ovšem za „částicovou hustotu“ považovat hustotu energie záření danou vztahem (195) a za střední rychlost rychlost světla ve vakuu, přičemž střední volná dráha je dána rovnicí (206). Gradient se v jednorozměrném pojetí redukuje na derivaci podle R a rovnice pro zářivou difuzi tak nabude tvar

$$H = -\frac{16}{3\rho\kappa} \sigma T^3 \frac{dT}{dR}, \quad (214)$$

což je opět rovnice zářivého přenosu energie, identická s (198), kterou jsme odvodili integrováním rovnice přenosu záření.

3.4.2 Rovnice konvektivního přenosu energie

Podmínka pro konvekci. Zkoumejme nyní, kdy je zářivá rovnováha nestabilní, a kdy se změní v rovnováhu konvektivní. Předpokládejme, že v nějaké bublině je hustota ρ_b , kdežto okolní plyn má hustotu ρ_o (obr. 19). Podle Archimédova zákona na bublinu působí *vztlaková síla*, a proti ní gravitace

$$F = F_{vz} + F_g = \rho_o V g - \rho_b V g = (\rho_o - \rho_b) V g, \quad (215)$$

kde V označuje objem studované bubliny a g tíhové zrychlení v daném místě (ve vzdálenosti R od centra hvězdy). Pokud je na počátku, *náhodnou fluktuací*, hustota bubliny menší ($\rho_b < \rho_o$), vychází $F > 0$

a bublina začne stoupat vzhůru. Po přemístění o dR se změní hodnoty stavových veličin v bublině (na ρ'_b , T'_b , P'_b) i v okolí (na ρ'_o , T'_o , P'_o). Mohou nastat dva případy: (i)

$$\rho'_b \geq \rho'_o, \quad (216)$$

kdy se jakákoliv konvekce potlačí a bublina případně klesne zpět; (ii)

$$\rho'_b < \rho'_o, \quad (217)$$

při kterém bude stoupání bude dále pokračovat, čili jde o základní *podmínku pro konvekci*.

Uvědomme si, že tlak v bublině je *neustále vyrovnaný* s okolním tlakem

$$P_b = P_o, \quad P'_b = P'_o. \quad (218)$$

Podle stavové rovnice ideálního plynu (48) pak platí (při $\mu = \text{konst.}$)

$$\rho'_b T'_b = \rho'_o T'_o \quad (219)$$

a podmínku pro konvekci (217) můžeme napsat v teplotách jako

$$T'_b > T'_o. \quad (220)$$

Provedeme-li Taylorovy rozvoje teplotních závislostí

$$T'_b = T_b + \frac{dT_b}{dR} dR, \quad (221)$$

$$T'_o = T_o + \frac{dT_o}{dR} dR, \quad (222)$$

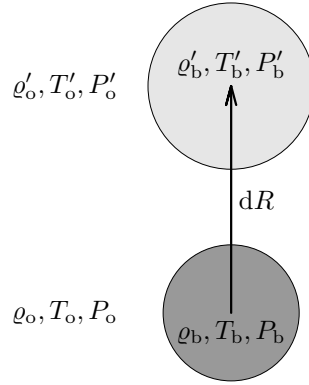
a předpokládáme-li, že počáteční fluktuace byla zcela nepatrná ($T_b \doteq T_o$), obdržíme konvektivní podmínku pro gradienty teploty

$$\frac{dT_b}{dR} > \frac{dT_o}{dR}. \quad (223)$$

Protože přemístění bubliny obvykle probíhá rychle, bez výměny tepla s okolím, lze termodynamický děj v bublině pokládat za *adiabatický* (a gradient teploty na levé straně za adiabatický gradient). Neboť v okolním prostředí doposud panovala zářivá rovnováha, příslušný gradient na pravé straně ztotožníme s radiačním gradientem (198) a můžeme nakonec psát podmínku pro konvekci

$$\left(\frac{dT}{dR} \right)_{\text{ad}} > \left(\frac{dT}{dR} \right)_{\text{rad}}. \quad (224)$$

Nezapomeňme, že $T(R)$ bývá klesající funkce, takže gradienty jsou vlastně záporné.



Obrázek 19: Stavové veličiny ρ , T , P v bublině a v okolním plynu, při přemístění o dR .

Odvození adiabatického gradientu teploty. Pokusme se vyjádřit adiabatický gradient z 1. věty termodynamické, pomocí stavových veličin

$$TdS = dU + PdV = dU - \frac{P}{\rho^2}d\rho. \quad (225)$$

Diferenciály v rovnici (225) vyjádříme pomocí tlaku P a teploty T

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T dP, \quad (226)$$

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T dP, \quad (227)$$

kde jsme při rozkladu změn vnitřní energie dU , podle vztahu (154), předpokládali $d\mu = 0$. (Kato (1966) beztak ukázal, že podmínka konvektivní rovnováhy odvozená bez ohledu na změny střední molekulové hmotnosti částic je *silnější* než podmínka odvozená obecně. Toto zanedbání se ovšem nečiní v rovnici tepelné rovnováhy (152).) Po dosazení

$$dS = \frac{1}{T} \left[\overbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P}^{\frac{\partial S}{\partial T}} \right] dT + \frac{1}{T} \left[\overbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T}^{\frac{\partial S}{\partial P}} \right] dP. \quad (228)$$

Využijeme faktu, že entropie má úplný diferenciál, a napíšeme podmínku záměnnosti druhých derivací

$$\frac{\partial^2 S}{\partial P \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial P}, \quad (229)$$

neboli¹⁴

$$\frac{\partial}{\partial P} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \right] \right\}, \quad (230)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \left[\frac{\partial U}{\partial T \partial P} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P + \frac{2P}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial P} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T \partial P} \right] = \\ & = -\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \right] + \frac{1}{T} \left[\frac{\partial U}{\partial P \partial T} + \frac{2P}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T \partial P} \right], \end{aligned} \quad (231)$$

což lze ještě za předpokladu záměnnosti druhých derivací vnitřní energie a hustoty upravit na tvar

$$\frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial P} \right)_T - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T. \quad (232)$$

Tuto podmínku dosadíme do 228 a označíme přitom

$$\delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_P = \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P. \quad (233)$$

Rovnice (228) tak přejde do tvaru

$$dQ = TdS = \overbrace{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \frac{P\delta}{\rho T} \right]}^{\left(\frac{\partial Q}{\partial P} \right)_P} dT - \frac{\delta}{\rho} dP. \quad (234)$$

Využijeme také definice specifického tepla c_P , jakožto snadno představitelné veličiny, protože podle rovnice (234) je

$$c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_P + \frac{P\delta}{\rho T}. \quad (235)$$

Konečně dostáváme¹⁵

$$TdS = c_P dT - \frac{\delta}{\rho} dP. \quad (236)$$

¹⁴ P a T jsou zde *nezávislé* proměnné, tudíž $\frac{\partial P}{\partial T} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial P} = 0$.

¹⁵Někteří autoři tento vztah používají i na pravé straně rovnice tepelné rovnováhy. S ohledem na zanedbání členů s $d\mu$ se tím ale dopouštějí chyby, která může hrát roli zejména u modelů s hlubokými podpoверхovými konvektivními zónami.

Pro praktický výpočet je třeba použít pro veličiny c_P a δ konkrétní výrazy závisující, m.j. na použité stavové rovnici. Zde se omezíme na obecnou formulaci a nebudeme c_P , δ specifikovat. Pro *adiabatický děj* ($dS = 0$) přejde (236) na

$$c_P dT = \frac{\delta}{\rho} dP, \quad (237)$$

a po dělení dM_R

$$\left(\frac{dT}{dR} \right)_{\text{ad}} = \frac{\delta}{c_P \rho} \frac{dP}{dR}. \quad (238)$$

Nakonec dosadíme za $\frac{dP}{dR}$ z rovnice hydrostatické rovnováhy (92) a z rovnice kontinuity (89)

$$\left(\frac{dT}{dR} \right)_{\text{ad}} = -\frac{\delta}{c_P} \frac{GM_R}{R^2}. \quad (239)$$

To je rovnice konvektivní rovnováhy.

Jednotný zápis zářivé a konvektivní rovnováhy. Zavedeme-li symbol

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dR} \frac{dR}{dP}, \quad (240)$$

lze podmínku pro konvekci (224) zapsat jednoduše jako

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla_{\text{rad}}, \quad (241)$$

kde konkrétní výrazy pro (kladné) gradienty jsou

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3\kappa P L_R}{16\pi a c G M_R T^4}, \quad (242)$$

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\delta P}{c_P \rho T}. \quad (243)$$

Výhodou tohoto zápisu je, že rovnice zářivé a konvektivní rovnováhy lze zapsat najednou jako

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{G T M_R}{4\pi P R^4} \nabla, \quad (244)$$

kde

$$\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{ad}}), \quad (245)$$

čili použije se vždy ten menší z gradientů.¹⁶

Shrňme na závěr, kdy a kde obvykle nastává konvekce?

¹⁶Přenos energie konvekcí je mnohem účinnější než přenos zářením, proto v konvektivních zónách počítáme pouze s konvekcí, i když v nich zároveň probíhá přenos zářením.

1. když je opacita κ vysoká, pak je totiž ∇_{rad} velké. Záření nemůže neprůhledným materiálem pronikat a přirozeně tak vzniká velký teplotní spád. To se stává ve vnějších vrstvách chladnějších hvězd, např. tak vzniká konvektivní zóna Slunce;
2. pokud dochází k ionizaci, protože pak je tepelná kapacita c_P velká¹⁷ a ∇_{ad} malé;
3. je-li strmá závislost produkce energie $\epsilon(T)$ na teplotě, jako tomu je u CNO cyklu, bývá velký gradient ∇_{rad} . Proto u masivnějších hvězd existují konvektivní jádra.

Podpovrchové vrstvy. Ze současné teorie konvekce plyne, že asi v 95 až 98 % hmoty hvězdy je konvekce adiabatická, ale v podpovrchových vrstvách to neplatí. Zde se používá *semiempirická teorie konvekce*, ve které vystupuje parametr α , charakterizující poměr mezi střední volnou dráhou konvektivního elementu a tlakovou škálou,

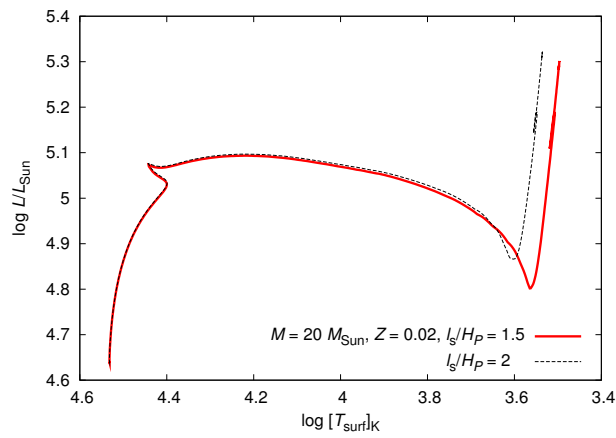
$$\alpha = \frac{l}{H_P} = \left(-\frac{d \ln P}{dR} \right)^{-1} = -\frac{P}{dP/dR}. \quad (246)$$

Obvykle se tato hodnota empiricky volí, typicky $\alpha = 1$ až 2. Jak vidíme na obr. 20, může změna parametru vývoj hvězdy značně ovlivnit. Podle teorie, popsané např. v Carrol a Ostlie (2007), vychází pro tok tepla

$$H_{\text{conv}} = \rho c_P \left(\frac{k}{\mu} \right)^2 \left(\frac{T}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} \left(\delta \frac{dT}{dR} \right)^{\frac{3}{2}} \alpha^2, \quad (247)$$

kde g označuje tíhové zrychlení, β poměr tlaku plynu k celkovému tlaku.

¹⁷Dodávka tepla Q se spotřebovává na ionizaci a teplota T se zvýší jen nepatrně, čili $c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P$ vychází velké.



Obrázek 20: Vliv volby parametru $\alpha = l/H_P$ semiempirické teorie konvekce v podpovrchových vrstvách na vývoj hvězdy $20 M_{\odot}$ v H–R diagramu. U lehčích hvězd ($M \simeq 1 M_{\odot}$) ovlivňuje volba parametru ovlivňuje i polohu hvězdy na hlavní posloupnosti nulového věku, neboť již při kolapsu byla hvězda konvektivní. Výpočet programem EZ.

4 Matematická struktura rovnic hvězdného nitra

Z matematického hlediska jsou rovnice stavby hvězd (89), (91), (152), (244) *soustavou čtyř nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic* pro čtyři *neznámé funkce* $R(M_R, t)$, $P(M_R, t)$, $L_R(M_R, t)$, $T(M_R, t)$ *dvou nezávislých proměnných*: (i) zobecněné geometrické souřadnice M_R a (ii) času t . Soustavu uzavírá ještě (nediferenciální) stavová rovnice (75) pro výpočet $\rho(M_R, t)$. Kromě toho v rovnicích vystupují *závislé parametry* charakterizující chemické složení $X(M_R, t)$, $Y(M_R, t)$, $Z(M_R, t)$. Funkce popisující nukleární přeměny $\epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T, X, Y, Z)$ a opacitu $\kappa(\rho, T, X, Y, Z)$ jsou sice složité, ale zadané.

Při řešení rovnic používáme určitá zjednodušení a podle nich rozlišujeme tři typy modelů:

1. *stacionární model*, který je nejjednodušší a neobsahuje žádnou závislost na čase (všechny časové derivace jsou nulové), m.j. předpokládáme hydrostatickou rovnováhu. Rovnice pak mají tvar

$$\frac{dR}{dM_R} = \frac{1}{4\pi R^2 \rho}, \quad (248)$$

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4}, \quad (249)$$

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}}(\rho, T, X, Y, Z), \quad (250)$$

$$\frac{dT}{dM_R} = -\frac{GTM_R}{4\pi PR^4} \nabla, \quad (251)$$

kde gradient $\nabla = \min(\nabla_{\text{rad}}, \nabla_{\text{ad}})$ je dán výrazy (242), (243). Neznámými jsou zde čtyři funkce $R(M_R)$, $P(M_R)$, $L_R(M_R)$, $T(M_R)$ jedné proměnné. Model umožňuje vypočítat pouze strukturu nitra (v jednom časovém okamžiku).

2. *vývojový model*, který čas t explicitně obsahuje, jednak v rovnici tepelné rovnováhy

$$\frac{dL_R}{dM_R} = \epsilon_{\text{nuk}} - T \frac{dS}{dt}, \quad (252)$$

která zahrnuje časové změny vnitřní a potenciální energie, a jednak v rovnicích pro *změny chemického složení*. Omezíme-li se na nukleární přeměny vodíku a helia, lze např. pro časovou změnu obsahu helia psát

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \sum_i \alpha_i \epsilon_i, \quad (253)$$

kde koeficienty α_i zjevně označují převrácenou hodnotu množství energie vzniklé úplnou nukleární přeměnou 1 g látky v té které reakci (koeficient pro nukleární spalování helia bude mít přirozeně v daném případě opačné znaménko, než reakce spalování vodíku na helium), a ϵ_i jsou energetické vydatnosti jednotlivých reakcí. Pro každé místo ve hvězdě proto můžeme psát

$$Y(M_R, t + dt) = Y(M_R, t) + \frac{\partial Y}{\partial t} dt. \quad (254)$$

V oblastech *konvektivních zón* je ještě třeba takto získané veličiny *homogenizovat* s ohledem na účinné promíchávání. V každé konvektivní zóně bude obsah helia Y_K homogenní a bude dán vztahem

$$Y_K(t + dt) = \frac{\int_K Y(M_R, t + dt) dM_R}{\int_K dM_R}. \quad (255)$$

Protože v oblastech spalování vodíku musí všude zůstat konstantní součet relativního množství vodíku a helia a též obsah uhlíku

$$X + Y = \text{konst.}, \quad X_C = \text{konst.}, \quad (256)$$

a protože v oblastech spalování helia platí

$$X = 0, \quad Y + X_C = \text{konst.}, \quad (257)$$

lze pomocí změn relativního obsahu helia Y všude snadno spočítat i změny ostatních elementů.

Pokud nás zajímá detailní chemický vývoj jednotlivých isotopů, je přirozeně možné rozepsat zvlášť jednotlivé části jaderných reakcí a sledovat změny všech isotopů pomocí většího počtu analogických rovnic.

Vývojový model vlastně umožňuje spočítat *sekvenci stacionárních modelů*, mezi kterými lze použít relativně velký časový krok Δt , při kterém změníme chemické složení. **Změny chemického složení jsou „motorem“ hvězdného vývoje!** Stále však používáme podmínku hydrostatické rovnováhy, čili veškeré změny struktury musí být velmi pozvolné.

3. *dynamický model* je nejsložitější, používá se v něm pohybová rovnice

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} - 4\pi R^2 \frac{dP}{dM_R}, \quad (258)$$

protože zrychlení (setrvačný člen) nelze zanedbat. Tím se ovšem rovnice stavby stávají soustavou parciálních diferenciálních rovnic 2. řádu. Nezbytný malý časový krok problém komplikuje i po numerické stránce.

Takový model musíme použít, pokud dochází k rychlým změnám struktury. Jako kritérium může sloužit *dynamická škála*

$$\tau_{\text{dyn}} \simeq \sqrt{\frac{R_*^3}{GM_*}} \simeq \sqrt{\frac{1}{G\bar{\rho}}}, \quad (259)$$

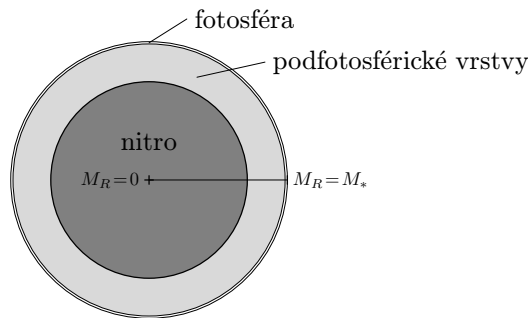
vlastně řádový odhad doby volného pádu hvězdy.¹⁸ Je-li ve vývojovém modelu optimální časový krok $\Delta t < \tau_{\text{dyn}}$, jsme nuceni jej opustit a počítat dynamicky.

¹⁸Pro pohyb povrchu hvězdy lze použít III. Keplerův zákon $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$, přičemž velkou poloosu a ztotožníme s $\frac{R}{2}$ a polovinu oběžné doby $T/2$ s τ_{dyn} .

5 Počáteční a okrajové podmínky

Abychom diferenciální rovnice vůbec mohli řešit, musíme specifikovat nějaké počáteční a okrajové podmínky. V našem případě se jedná o rovnice 1. řádu, čili zadáváme hodnoty některých studovaných veličin (R, P, L, T) ¹⁹ v čase $t = 0$ nebo hodnoty na hranicích hvězdy (např. v centru, na povrchu), které pak budou platit ve všech časech (obr. 21).

V modelech se vyskytují též *volné parametry*, např. celková hmotnost hvězdy M_* , počáteční chemické složení X, Y, Z , parametr konvekce α , v sofistikovanějších modelech volíme účinnost hvězdného větru η_{wind} apod. I pro ně musíme samozřejmě vymyslet vhodné hodnoty.



Obrázek 21: Znázornění okrajových podmínek v centru a na povrchu; hvězda je rozdělena na fotosféru, podfotosférické vrstvy a nitro.

Počáteční podmínky ($t = 0$). Ačkoliv nám příroda při poznávání dějů a jejich příčin obvykle hází klacky pod nohy, v případě hvězdných modelů byla milosrdná v tom smyslu, že protohvězda po svém vzniku v molekulárním mračnu projde při smršťování stádiem, kdy je prakticky *celá ve stavu konvektivní rovnováhy*. To znamená, že jedna počáteční podmínka je nečekaně jednoduchá: na počátku nukleárního vývoje je hvězda *chemicky homogenní*:

$$X(M_R, t = 0) = \text{konst.}, \quad (260)$$

$$Y(M_R, t = 0) = \text{konst.}, \quad (261)$$

$$Z(M_R, t = 0) = \text{konst.} \quad (262)$$

Jako výchozí můžeme přijmout chemické složení *pozorované v atmosféře* normálních hvězd. Atmosféra totiž bývá zcela oddělená od jádra, kde probíhají nukleární přeměny, a to zónou zářivé rovnováhy, ve které nedochází k žádnému promíchávání. Často studovaná chemická složení uvádí tab. 2.

¹⁹Kdyby se jednalo o rovnice 2. řádu, museli bychom zadat také 1. derivace.

Tabulka 2: Typická chemická složení různých hvězdných populací.

X	Y	Z	populace
0,60	0,35	0,044	mladé hvězdy v Galaxii
0,70	0,28	0,02	Slunce
0,68	0,30	0,02	populace I (hvězdy 3. generace)
0,75	0,25	0,001	populace II (2. generace)
0,76	0,24	$\leq 0,0001$	populace III (1. generace po Velkém třesku)
		0,004	Malé Magellanovo mračno

Okrajové podmínky v centru ($M_R = 0$). V centru je zřejmě

$$L_R = 0, \quad (263)$$

$$R = 0, \quad (264)$$

což plyne ze základní fyziky a geometrie. Tyto okrajové podmínky však vedou k *singularitě* základních rovnic. V blízkosti centra hvězdy proto použijeme lineární aproximaci, v zásadě rozvoj se zanedbáním členů vyšších řádů. Diferenciální rovnici zachování hmoty (89) tedy zintegrujeme za předpokladu $\rho_c \doteq \text{konst.}$

$$\int_0^{M_R} dM_R = \int_0^R 4\pi R^2 \rho_c dR, \quad (265)$$

$$M_R = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c, \quad (266)$$

takže dostaneme obyčejnou rovnici

$$R = \left(\frac{3M_R}{4\pi\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (267)$$

Rovnice tepelné rovnováhy (152) přejde zřejmě do tvaru

$$L_R = \left(\epsilon_{\text{nukc}} - T_c \frac{dS_c}{dt} \right) M_R. \quad (268)$$

Pro tlak máme z rovnice hydrostatické rovnováhy (92)

$$\int_{P_c}^P dP = \int_0^{M_R} -\frac{GM_R}{4\pi R^4} dM_R, \quad (269)$$

$$\begin{aligned} P - P_c &= \int_0^{M_R} -\frac{GM_R}{4\pi} \left(\frac{4\pi\rho_c}{3M_R} \right)^{\frac{4}{3}} dM_R = \\ &= -\frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}}, \end{aligned} \quad (270)$$

a analogicky

$$T - T_c = -\frac{G}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \rho_c^{\frac{4}{3}} M_R^{\frac{2}{3}} T_c \nabla_c P_c^{-1}. \quad (271)$$

Okrajové podmínky na povrchu ($M_R = M_*$). Konstrukce okrajových podmínek na povrchu hvězdy je poněkud složitější, protože by bylo příliš hrubé předpokládat na povrchu hvězdy nulový tlak a teplotu ($P(M_*, t) = 0, T(M_*, t) = 0$). Obvykle se místo toho počítá zjednodušený model povrchových částí hvězdy, přičemž se uvažují dvě různé vrstvy:

1. *fotosféra*, tj. tenká poloprůhledná vrstva, ze které uniká záření do mezihvězdného prostoru;
2. *podfotosférické vrstvy*, ve kterých je materiál ještě ve stavu neúplné ionizace a kde nelze konvekci považovat za adiabatickou. Podfotosférické vrstvy obsahují obvykle pouze 2 až 5 % hmoty hvězdy, ale často více než polovinu jejího celkového objemu.

Fotosféra. Ve fotosféře, jejíž celková hmotnost i rozměry jsou již zanedbatelné, se obvykle jako nezávisle proměnná volí *optická hloubka* τ , která se zavádí pomocí vztahu

$$d\tau = \kappa \rho dx, \quad (272)$$

kde x označuje geometrickou hloubku uvažovaného místa ve fotosféře, měřenou od „vnějšího okraje“ fotosféry směrem do středu hvězdy. Pro průběh teploty s optickou hloubkou lze použít aproximační vztah, založený na některém zcela jednoduchém nebo poněkud složitějším modelu atmosféry. Pro nejjednodušší model lze psát

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{\text{eff}}^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (273)$$

Všimněme si, že z uvedeného vztahu vyplývá, že teplota v optické hloubce $\tau = 2/3$ se právě rovná efektivní teplotě hvězdy. Složitější a přesnější vztahy pro průběh teploty s optickou hloubkou lze nalézt např. v pracích Böhm-Vitense (1958) či Ando a Osaki (1975).

Pro změnu tlaku plynu lze psát

$$dP_g = g \rho dx = \frac{g}{\kappa} d\tau, \quad (274)$$

kde $g = GM_* R_*^{-2}$ je gravitační zrychlení na povrchu hvězdy. Podle Unsölda (1955) je třeba tíhové zrychlení korigovat s ohledem na tlak záření podle vztahu

$$g_{\text{eff}} = g - \sigma \kappa c^{-1} T_{\text{eff}}^4, \quad (275)$$

takže průběh tlaku plynu ve fotosféře můžeme počítat podle rovnice

$$\frac{dP_g}{d\tau} = \frac{g_{\text{eff}}}{\kappa}. \quad (276)$$

Je zřejmé, že výraz pro *efektivní tíhové zrychlení* g_{eff} je založen na vztahu (273) pro nejjednodušší atmosféru. Podle (190) a (195) platí totiž

$$dP_r = \frac{4}{3}aT^3 dT = \frac{16\sigma}{3c}T^3 dT. \quad (277)$$

Diferencováním vztahu (273) dostáváme

$$4T^3 dT = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4 d\tau, \quad (278)$$

takže

$$dP_r = \sigma c^{-1}T_{\text{eff}}^4 d\tau. \quad (279)$$

Odtud je již výraz (275) pro efektivní tíhové zrychlení nasnadě. Je dobře si uvědomit, že pokud pro průběh teploty s optickou hloubkou použijeme nějaký dokonalejší model atmosféry, je nutné modifikovat i výraz (275) pro korekci tíhového zrychlení o tlak záření.

S využitím interpolace v tabulkách opacitních koeficientů $\kappa(\rho, T)$ je možno rovnici (273) a rovnici (276), či její dokonalejší tvar, řešit numericky od optické hloubky $\tau = 0$ až do dolní hranice fotosféry, t.j. pro $\tau = \frac{2}{3}$. (Někteří autoři doporučují ukončit řešení až u $\tau = 2$.) Pro $\tau = 0$ se obvykle volí nějaká velmi malá, ale nenulová hustota, např. $\rho = 10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$. Na dolní hranici fotosféry bude

$$T = T(\tau = \frac{2}{3}), \quad (280)$$

$$P = P(\tau = \frac{2}{3}) = P_g(\tau = \frac{2}{3}) + \frac{a}{3}T^4(\tau = \frac{2}{3}). \quad (281)$$

Z definice efektivní teploty ještě plyne

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 = \pi a c R_*^2 T_{\text{eff}}^4, \quad (282)$$

takže

$$R_* = T_{\text{eff}}^{-2} \left(\frac{L_*}{\pi a c} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (283)$$

Podfotosférické vrstvy. Výpočet pro podfotosférické vrstvy se obvykle zjednodušuje předpokladem, že se zářivý tok L_R v těchto oblastech s malou hmotou a mimo zónu nukleární přeměny prakticky nemění a rovnice tepelné rovnováhy se ze soustavy rovnic vypouští. Z výpočetních důvodů se ukazuje výhodné

volit v těchto oblastech za *nezávisle proměnnou tlak* P , neboť hmota se mění velmi málo. Přejít k jiné nezávislé proměnné je jednoduchý, jde jen o násobení rovnic stavby

$$L_R = L_*, \quad (284)$$

$$\frac{dM_R}{dP} = -\frac{4\pi R^4}{GM_R}, \quad (285)$$

$$\frac{dR}{dP} = \frac{dR}{dM_R} \frac{dM_R}{dP} = -\frac{R^2}{\rho GM_R}, \quad (286)$$

$$\frac{dT}{dP} = \frac{dT}{dM_R} \frac{dM_R}{dP} = \frac{T}{P} \nabla. \quad (287)$$

Změny *ionizace* se „skrývají“ ve stavové rovnici, respektive ve střední molekulové hmotnosti μ a parametru Q (80). Stavovou rovnici musíme k výše uvedeným diferenciálním rovnicím přidat, abychom byli schopni vypočítat $\rho(T, P)$. Rovnice se obvykle numericky integrují (např. metodou Runge-Kutta), od spodku fotosféry až do $M_R/M_* = 0,97$, kde již můžeme předpokládat, že je hvězdný materiál zcela ionizován.

6 Henyeova numerická metoda integrace vnitřních částí hvězdy

V současnosti se k numerickému řešení rovnic vnitřní stavby hvězd nejčastěji užívá metoda kompletní linearizace rovnic, kterou poprvé navrhli Henyey a spol. (1959) a která se později začala používat i k výpočtu modelů atmosfér.

6.1 Metoda úplné linearizace

Metoda úplné linearizace sestává z následujících kroků:

1. diskretizace rovnic;
2. doplnění okrajových podmínek v centru;
3. konstrukce vnějších okrajových podmínek, sestávající z: (a) odhadu zářivého výkonu L_* a efektivní teploty T_{eff} ; (b) výpočtu tří modelů fotosféry a podpovrchových vrstev; (c) nalezení koeficientů bilineárních forem $R_1(P_1, T_1)$, $L_1(P_1, T_1)$;
4. linearizace rovnic;
5. iteračního výpočtu stacionárního modelu;
6. časového kroku v případě vývojového modelu.

Diskretizace. Prvním krokem je přechod od diferenciálních rovnic k *diferenčním*, čili diskretizace problému. Celé nitro hvězdy (tj. oblast, kde je látka ve stavu úplné ionizace) rozdělíme na dostatečný počet koncentrických slupek a očíslováme je směrem od povrchu do centra indexem $j = 1 \dots N$ (obr. 22), volíme např. $N = 200$. Zadáme tak vlastně diskrétní hodnoty M_j , původně spojitě nezávislé proměnné M_R .

Derivace spojitých funkcí R, P, L_R, T na levých stranách rovnic nahradíme rozdíly proměnných R_j, P_j, L_j, T_j mezi sousedními slupkami j a $j+1$. Místo výrazů na pravých stranách rovnic píšeme jejich aritmetické průměry mezi j -tou a $(j+1)$ -ní slupkou.²⁰ Například pro rovnici hydrostatické rovnováhy máme (po převedení všech členů vlevo)

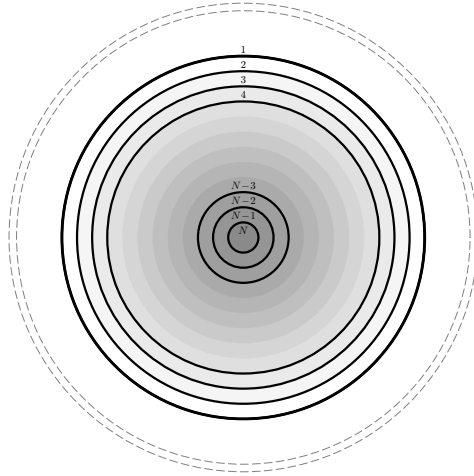
$$\frac{dP}{dM_R} + \frac{GM_R}{4\pi R^4} \simeq \frac{P_j - P_{j+1}}{M_j - M_{j+1}} + \frac{1}{2} \left(\frac{GM_j}{4\pi R_j^4} + \frac{GM_{j+1}}{4\pi R_{j+1}^4} \right) = 0. \quad (288)$$

Pro každou dvojici slupek máme k dispozici čtyři rovnice stavby, čili můžeme sestavit celou soustavu rovnic, kterou si abstraktně označíme

$$G_{ij} = 0, \quad (289)$$

kde $i = 1 \dots 4$ a $j = 1 \dots N - 1$. Jedná se o $4(N-1)$ rovnic pro $4N$ neznámých R_j, P_j, L_j, T_j . Je zřejmé, že budeme muset ještě nějaké rovnice doplnit.

²⁰Nebo lze do pravých stran dosadit průměrné hodnoty veličin $\frac{1}{2}(R_j + R_{j+1})$, atd.



Obrázek 22: Diskretizace nitra hvězdy na N koncentrických slupek. Čárkovaně jsou naznačené ještě podfotosférické vrstvy a fotosféra.

Okrajové podmínky v centru. Přepis okrajových podmínek (263) a (264) je zcela jednoduchý

$$L_N = 0, \quad (290)$$

$$R_N = 0. \quad (291)$$

Počet rovnic tak stoupne na $4N - 2$.

Vnější okrajové podmínky. Okrajové podmínky na povrchu jsou však komplikovanější, protože nelze předepsat určitou hodnotu R_1 , P_1 , L_1 nebo T_1 , to bychom chybně omezili řešení! Nejprve podle zadané hmotnosti hvězdy M_* odhadneme tři dvojice hodnot zářivého výkonu a efektivní teploty

$$L_*, T_{\text{eff}}^{(1,2,3)}, \quad (292)$$

v okolí očekávané polohy hvězdy na HR diagramu. Pak spočteme *tři modely fotosféry* (od $\tau = 0$ do $\tau \simeq 2/3$) a *podfotosférických vrstev* (od $P_{\text{fotosféry}}$ do $M_R/M_* \simeq 0,97$) a získáme tak trojí hodnoty

$$\begin{aligned} R_1, P_1, L_1, T_1^{(1)}, \\ R_1, P_1, L_1, T_1^{(2)}, \\ R_1, P_1, L_1, T_1^{(3)}, \end{aligned} \quad (293)$$

ze kterých metodou nejmenších čtverců vypočítáme koeficienty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ bilineárních forem

$$R_1 = \alpha_1 P_1 + \beta_1 T_1 + \gamma_1, \quad (294)$$

$$L_1 = \alpha_2 P_1 + \beta_2 T_1 + \gamma_2. \quad (295)$$

Ty použijeme jako okrajové podmínky. Všimněme si, jak jsme to udělali chytrě — předepsali jsme pouze přibližné funkční závislosti $R_1 = f_1(P_1, T_1)$, $L_1 = f_2(P_1, T_1)$, nikoli konkrétní hodnoty veličin! Máme tedy konečně $4N$ rovnic pro $4N$ neznámých, ale nemáme vyhráno. Soustava je totiž *silně nelineární* a nelze pro její řešení použít nějakou jednoduchou metodu.

Linearizace. Celou soustavu rovnic můžeme řešit tak, že hodnoty proměnných R_j, P_j, L_j, T_j prostě odhadneme (pak ovšem rovnice (289) nebudou platit), v rovnicích (289) provedeme záměnu za „odhady plus malé opravy“

$$\begin{aligned} R_j &\rightarrow R_j + \Delta R_j, \\ P_j &\rightarrow P_j + \Delta P_j, \\ L_j &\rightarrow L_j + \Delta L_j, \\ T_j &\rightarrow T_j + \Delta T_j, \end{aligned} \quad (296)$$

a celou soustavu linearizujeme²¹

$$G_{ij} + dG_{ij} = 0, \quad (297)$$

kde

$$\begin{aligned} dG_{ij} = & \frac{\partial G_{ij}}{\partial R_j} \Delta R_j + \frac{\partial G_{ij}}{\partial P_j} \Delta P_j + \frac{\partial G_{ij}}{\partial L_j} \Delta L_j + \frac{\partial G_{ij}}{\partial T_j} \Delta T_j + \\ & + \frac{\partial G_{ij}}{\partial R_{j+1}} \Delta R_{j+1} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial P_{j+1}} \Delta P_{j+1} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial L_{j+1}} \Delta L_{j+1} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial T_{j+1}} \Delta T_{j+1}. \end{aligned} \quad (298)$$

Parciální derivace snadno spočteme z původních rovnic, například

$$\frac{\partial G_{23}}{\partial R_3} = \frac{\partial}{\partial R_3} \left[\frac{P_3 - P_4}{M_3 - M_4} + \frac{1}{2} \left(\frac{GM_3}{4\pi R_3^4} + \frac{GM_4}{4\pi R_4^4} \right) \right] = -\frac{GM_3}{2\pi R_3^5}. \quad (299)$$

Iterace. Soustavu (297) $4N$ lineárních rovnic o $4N$ neznámých $\Delta R_j, \Delta P_j, \Delta L_j, \Delta T_j$ vyřešíme snadno (např. Gaussovou eliminační metodou nebo lépe metodou optimalizovanou pro řešení pásových matic). Získané opravy původních odhadů použijeme pro zpřesnění

$$\begin{aligned} R_j^{(2)} &= R_j^{(1)} + \Delta R_j^{(1)}, \\ P_j^{(2)} &= P_j^{(1)} + \Delta P_j^{(1)}, \\ L_j^{(2)} &= L_j^{(1)} + \Delta L_j^{(1)}, \\ T_j^{(2)} &= T_j^{(1)} + \Delta T_j^{(1)}, \end{aligned} \quad (300)$$

²¹Nestačí ovšem pouze linearizovat jednotlivé proměnné např. $(R_j + \Delta R_j)^2 \doteq R_j^2 + 2R_j \Delta R_j$, protože se v rovnicích vyskytují jejich součiny a podíly.

a soustavu (297) řešíme znovu pro $\Delta R_j^{(2)}, \Delta P_j^{(2)}, \Delta L_j^{(2)}, \Delta T_j^{(2)}$. Iterace opakujeme, dokud není dosaženo požadované přesnosti (tzn. $\Delta R_j, \Delta P_j, \Delta L_j, \Delta T_j$ jsou malé). Pokud by z našeho modelu vyplynuly hodnoty L_*, T_{eff} mimo rozsah našich původních odhadů (292), musíme se pochopitelně vrátit k bodu 3.

Časový krok. Pokud počítáme vývoj hvězdy, tj. časovou posloupnost stacionárních modelů, zvolíme ještě časový krok Δt mezi dvěma modely a ve všech slupkách spočteme nové chemické složení podle vztahu

$$Y_j(t + \Delta t) = Y_j(t) + \sum_i \alpha_i \epsilon_i(\rho_j, T_j, X_j, Y_j, Z_j) \Delta t, \quad (301)$$

přičemž v konvektivních zónách poté provedeme středování podle vztahu (255).

6.2 Meze linearizace

Je poučné učinit si představu o tom, jak zdárně lze linearizaci diferenciálních vztahů vést do extrému. Vezměme si pro příklad rovnici hydrostatické rovnováhy ve tvaru

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R \rho}{R^2}. \quad (302)$$

Jestliže budeme derivaci na levé straně nahrazovat diferencí mezi centrem a povrchem (rozdělíme hvězdu na pouhé dvě slupky), dostáváme

$$\frac{P_c - 0}{0 - R_*} = -\left(\frac{GM_R}{R^2}\right)_{\text{střední}} \rho_{\text{střední}} = -\frac{1}{2} \frac{GM_*}{R_*^2} \frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3}, \quad (303)$$

s přihlédnutím k tomu, že pro gravitační zrychlení v centru platí

$$g_c = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{GM_R}{R^2} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} GR \rho_c = 0. \quad (304)$$

Po úpravě dostáváme následující odhad centrálního tlaku ve hvězdě

$$P_c = \frac{3GM_*^2}{8\pi R_*^4}. \quad (305)$$

Dosadíme-li pozorované hodnoty M_* a R_* pro Slunce, dostáváme tlak asi $1,34 \cdot 10^{15}$ [CGS], zatímco z přesného modelu Slunce vychází hodnota $2,269 \cdot 10^{17}$ [CGS]. To je dosti velký rozdíl. V tabulce 3 je srovnání modelu a odhadu pro několik hmotností hvězdy. Je ale zajímavé, že vztah mezi logaritmem tlaku spočteným a odhadnutým je skoro dokonale lineární. Vidíme, že odhad vede *k poklesu centrálního tlaku s rostoucí hmotností hvězdy*, ve shodě s tím, co dávají reálné modely. Sportovně řečeno: jakýsi odhad toho, že tlak v nitru je hodně vysoký, pomocí i tak hrubé linearizace dostáváme, a dokonce můžeme správně kvalitativně odhadnout, jak se mění v závislosti na hmotnosti hvězdy.

Tabulka 3: Srovnání spočteného centrálního tlaku s odhadem

Hmota hvězdy (M_{\odot})	$\log P_c$ (model) [CGS]	$\log P_c$ (odhad) [CGS]
1 (nyní)	17,356	15,128
7	16,609	14,709
25	16,275	14,518

7 Vývoj osamocené hvězdy

Podle současných představ vznikají hvězdy *gravitačním kolapsem* z náhodného zhuštění chladné mezihvězdné látky v obřích molekulových mračnecích. Tyto procesy jsou dnes předmětem intenzivního výzkumu, a to i v souvislosti s rozvojem pozorovacích technik, které přímá pozorování chladné hmoty dovolují. Je zřejmé, že se jedná o obecně nesférický problém a složitější fyziku, než jakou jsme při odvozování rovnic stavby hvězd předpokládali.

Přibližná podmínka pro hmotnost M mračna, aby se samovolně smršťovalo, je

$$M > M_J \simeq \text{konst.} \left(\frac{kT}{G\mu m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}}. \quad (306)$$

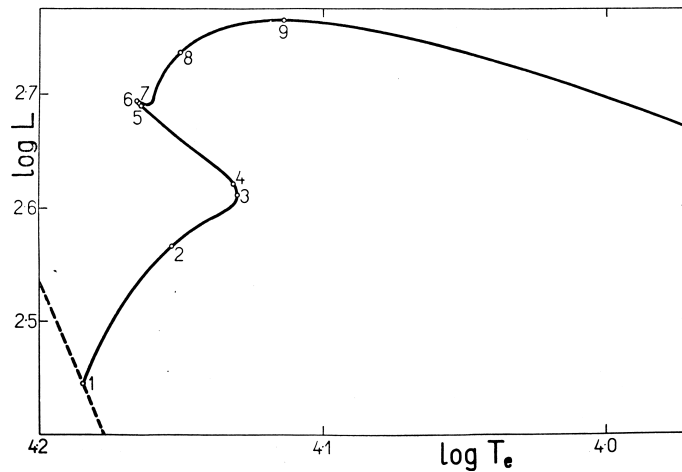
Nazýváme jej *Jeansovo kritérium*. Vznikající protohvězdy procházejí stadiem, kdy se v celém tělese ustaví konvektivní rovnováha, takže se chemické složení hvězdy homogenizuje. S rostoucí hustotou roste i opacita a teplota v nitru, až se v nitru zažehnou první nukleární reakce, nejprve energeticky málo významná *slučování lithia, berylia a bóru*, ale nakonec primární slučování vodíku na helium. Uvolňovaná jaderná energie je zčásti vyzářena, zčásti je pohlcena; to vede k růstu centrální teploty, hustoty a tlaku. Protože nukleární produkce energie je funkcí vysoké mocniny teploty a je přímo úměrná hustotě, vede rozdíl podmínek od místa k místu i k ustavení potřebného *gradientu* tlaku a k dosažení stavu hydrostatické rovnováhy.

Okamžik ustavení hydrostatické rovnováhy bývá obvykle ztotožňován s polohou hvězdy v HR diagramu na *hlavní posloupnosti nulového věku*. Poloha hvězdy je jednoznačně dána její hmotností M_* a počátečním chemickým složením X, Y, Z .

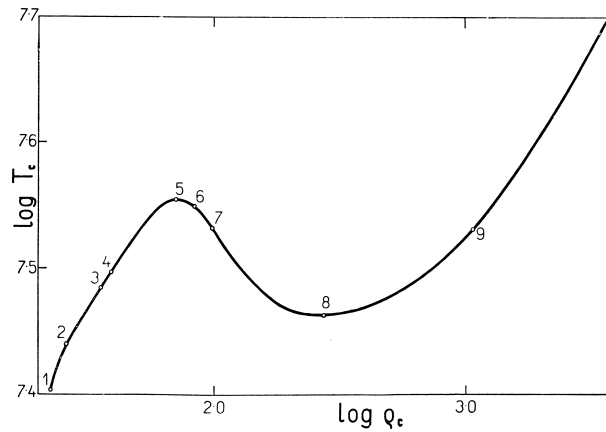
7.1 Ilustrativní příklad: vývoj hvězdy o hmotnosti $4 M_\odot$

Popišme si jako ilustrativní příklad vývoj hvězdy s hmotností $M_* = 4 M_\odot$ a s počátečním chemickým složením odpovídajícím mladým hvězdám v Galaxii, $X = 0,602$ a $Z = 0,044$ (z toho $X_N = 0,014$):

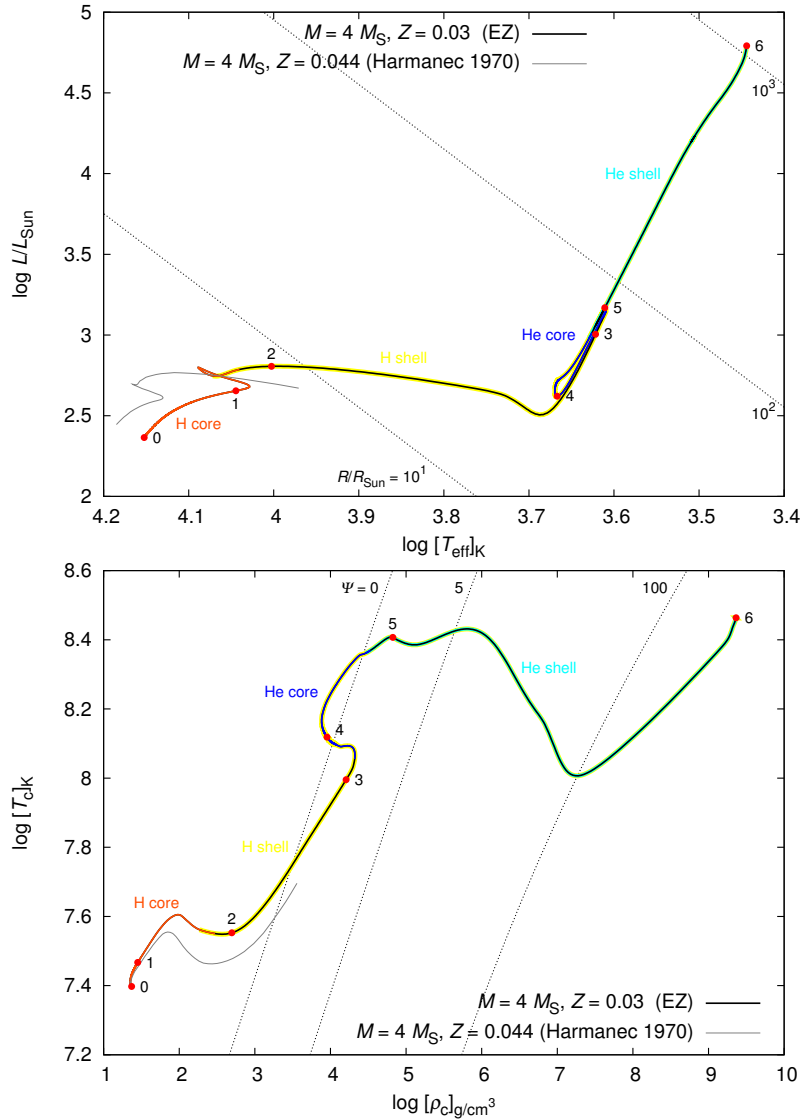
0. čas $t = 0$, bod 1 na obr. 23, 24, dosažení hydrostatické rovnováhy, CNO cyklus, konvektivní zóna v centru: U této hvězdy hraje již rozhodující roli CNO cyklus jaderné přeměny. V centru hvězdy a jeho okolí se již při dosažení hydrostatické rovnováhy vytvoří *konvektivní zóna*, která zahrnuje 18 % celkové hmotnosti hvězdy.
- 1a. pokles $X_c \rightarrow$ pokles $\kappa \rightarrow$ pokles $\nabla_{\text{rad}} \rightarrow$ zmenšování konvektivní zóny: Primární příčinou vývoje hvězdy je jaderné slučování vodíku. Díky němu postupně v centrálních částech ubývá vodíku a přibývá helia. Na produkci nukleární energie to má dlouho jen malý vliv díky účinnému promíchávání v konvektivní zóně, které do centra hvězdy přináší stále nový materiál bohatý na vodík. Úbytek vodíku má však za následek pokles opacity, která pro dané hustoty a teploty klesá s klesajícím obsahem vodíku. Pokles opacity znamená přirozeně podle rovnice (242) i pokles ∇_{rad} a v důsledku toho se tedy postupně *zmenšuje* hmotnost konvektivního jádra. Zmenšující se konvektivní jádro za sebou tak nechává v jisté oblasti hvězdy zónu plynule se měnícího chemického složení, s klesajícím obsahem vodíku směrem k centru.



Obrázek 23: H–R diagram pro vývoj *osamocené* hvězdy s hmotností $4 M_{\odot}$. Hlavní posloupnost nulového stáří (ZAMS) je vyznačena čárkovaně. Model začíná v bodě 1 (v okamžiku $t = 0$); počáteční chemické složení je $X = 0,602$, $Z = 0,044$, $X_{\text{CN}} = 0,014$. Bod 2 ($t = 63$ Myr): začíná růst centrální tlak. 3) $t = 84,4$ Myr: konec poklesu efektivní teploty, hvězda opouští hlavní posloupnost. 4) $t = 86,1$ Myr: první maximum poloměru, hvězda začíná kontrahovat. 5) $t = 88,5$ Myr: rychlý konec termonukleárních reakcí v jádru z důvodu vyčerpání vodíku. 6) $t = 88,59$ Myr: vytvoření obálky, ve které hoří vodík, opětovně roste poloměr hvězdy. 7) $t = 88,62$ Myr: rychlý pokles obsahu vodíku v centru vede ke zmizení vnitřní konvektivní zóny. 8) $t = 90,5$ Myr: vodík je v centru hvězdy zcela vyčerpán, jádro se zmenšuje a zahřívá, zatímco obálka se rozpíná a ochlazuje. 9) $t = 93,5$ Myr: hvězda dosahuje maximální luminozitu. Vývoj hvězdy by pokračoval dále zapálením héliových reakcí, ale výpočet končí v tomto bodě. Převzato z Harmanec (1970).

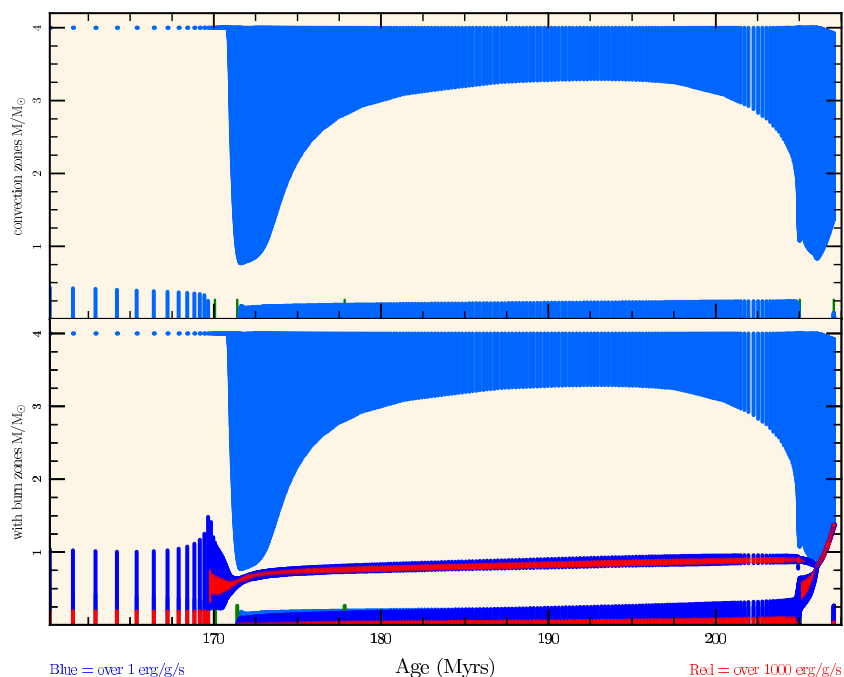


Obrázek 24: Závislost centrální hustoty ρ_c a centrální teploty T_c pro vývoj hvězdy s hmotností $4 M_{\odot}$. Označení bodů je stejné jako na obr. 23. Převzato z Harmanec (1970).



Obrázek 25: Horní panel: Hertzsprungův–Russellův diagram zachycující vývoj hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$, s chemickým složením $X = 0,67$, $Z = 0,03$ (tyto hodnoty se mírně liší od obr. 23; vývoj tak probíhá na jiné časové škále, ale kvalitativně je velmi podobný). Bod 0 ($t = 0$) značí dosažení hlavní posloupnosti nulového stáří; bod 1 ($t = 159,8$ Myr) opuštění hlavní posloupnosti; bod 2 ($t = 170,1$ Myr) spotřebování vodíku v jádru ($X_{\text{c}} = 0$), pokles T_{eff} ; bod 3 ($t = 171,4$ Myr) zažehnutí hélia; bod 4 ($t = 177,8$ Myr) postupné spotřebovávání hélia, růst L_{*} ; bod 5 ($t = 205,0$ Myr) $Y_{\text{c}} \doteq 0$, pokles centrální teploty T_{c} ; bod 6 ($t = 207,1$ Myr) konec modelu — časový krok $\Delta t < \tau_{\text{dyn}}$ dle (259). Barevně jsou odlišeny fáze nukleárních přeměn: (i) hoření vodíku v jádru, (ii) hoření vodíku ve slupce, (iii) hoření hélia v jádru, (iv) hoření hélia ve slupce. Tečkované linie odpovídají konstantním poloměřům ($\log L/L_{\odot} = 2 \log R/R_{\odot} + 4 \log T_{\text{eff}}/T_{\odot}$). Dolní panel: odpovídající diagram centrální hustota ρ_{c} , centrální teplota T_{c} . Tečkované linie vyznačují stupeň degenerace Ψ . Výpočet programem EZ.

- 1b. *pokles $X_c \rightarrow$ růst $\mu \rightarrow$ pokles p i $\nabla p \rightarrow$ zmenšení jádra \rightarrow zvýšení $T \rightarrow$ zvýšení ϵ* : Jiným důsledkem nukleárních přeměn v nitru hvězdy je postupný růst střední molekulové hmotnosti částic v konvektivní zóně, což vzhledem ke stavové rovnici (75) vede k mírnému poklesu tlaku s časem. Klesá i gradient tlaku, vnitřní části hvězdy se smršťují a zahřívají, což ovšem zvětšuje výkon nukleární produkce a ve svých důsledcích i růst střední hmotnosti částic.
2. *$t = 63 \text{ Myr}$, bod 2, růst T převáží růst $\mu \rightarrow p_c$ roste*: Po 63 milionech let převýší růst teploty růst střední hmotnosti částic a centrální tlak se počne zvyšovat. Po celou tuto dobu v důsledku růstu produkce energie roste i celkový zářivý výkon na povrchu hvězdy.
3. *růst $\epsilon \rightarrow$ růst $L \rightarrow$ expanze vnějších vrstev \rightarrow pokles T_{eff}* : Vysvětlit důvody vývoje ostatních povrchových charakteristik je nesnadné, protože se zde kombinuje několik vlivů. Výpočet ukazuje, že rostoucí tok zářivé energie z centra hvězdy způsobuje po dlouhou dobu i pozvolnou expanzi vnějších vrstev, spojenou s poklesem teploty v nich. Klesá i efektivní teplota hvězdy.
4. *$t = 84 \text{ Myr}$, $X_c \doteq 0,04 \rightarrow$ růst T_{eff}* : Až po více než 84 milionech let se tento pokles teploty zastaví a teplota začíná znovu růst. „Krátce“ poté (v čase 86,1 milionů let) dosáhne poloměr hvězdy lokálního maxima a začíná klesat. To ovšem jen urychlí růst teploty. Prvotní příčina těchto změn spočívá opět v nitru hvězdy. V té době klesl již relativní hmotnostní obsah vodíku v konvektivní zóně pod $X_c = 0,04$, což se ukazuje jako kritická hodnota. Přitom spotřeba vodíku díky růstu teploty i hustoty stále roste.
5. *$X_c = 0,0015 \rightarrow$ pokles $\epsilon \rightarrow$ pokles $T_c \rightarrow$ smršťování hvězdy \rightarrow růst ρ, T nad He jádrem \rightarrow zapálení H ve slupce \rightarrow expanze vnějších vrstev*: V čase 88,5 milionů let klesne obsah vodíku v jádru na hodnotu $X_c = 0,0015$, což již vede k poklesu výkonu nukleární produkce a v důsledku toho pak i k poklesu centrální teploty. Pokles produkce je tak prudký, že celá hvězda se začíná smršťovat. To ale vede k růstu hustoty a teploty v oblastech pozměněného chemického složení, které po sobě zanechala k centru ustupující konvektivní zóna. V důsledku toho vznikne nad již téměř heliovým jádrem druhé energetické maximum nukleární přeměny vodíku na helium, *vodíková slupka*. Intensita tohoto zdroje zpočátku velmi rychle roste, takže do vrstev blíže k povrchu přichází více zářivé energie, než kolik se stačí vyzářit, a vnější části hvězdy začínají velmi rychle expandovat ($t = 88,589 \text{ Myr}$, bod 6). Následkem toho dochází k novému poklesu teploty a zpočátku i zářivého výkonu hvězdy.
6. *$t = 88,618 \text{ Myr}$, bod 7, zánik konvektivní zóny, ustavení zářivé rovnováhy*: S poklesem energetické produkce v centru se zmenšuje L_R a tedy i ∇_{rad} , takže po velmi krátké době zanikne centrální konvektivní zóna. Celá oblast se rychle přizpůsobí stavu zářivé rovnováhy a nastává krátké období relativní stability, ve kterém se do značné míry zastaví expanze hvězdy i smršťování jádra. (Gravitační energie uvolňovaná v jádru je v té době zhruba o řád menší, než v období zániku konvektivní zóny.)
7. *$t = 90,5 \text{ Myr}$, bod 8, $X_c = 0 \rightarrow$ smrštění jádra (uvolnění E_G) \rightarrow růst $\rho_c, T_c \rightarrow$ destabilizace slupky \rightarrow růst ϵ tamtéž \rightarrow expanze obálky, pokles T_{eff}* : Jaderné reakce v centru brzo spotřebují i zbývající zásobu vodíku, takže dochází k novému prudkému smršťování jádra spojenému s růstem tlaku, hustoty,



Obrázek 26: Změny vnitřní struktury hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$, po opuštění hlavní posloupnosti (do té doby je struktura téměř neměnná, pouze se zmenšuje jaderná konvektivní zóna). Dolní panel: zóny nukleárních přeměn, kde je měrný výkon $\epsilon > 1000 \text{ erg/s/g}$ (červeně) nebo $\epsilon > 1 \text{ erg/s/g}$ (modře). Horní panel: konvektivní zóny (světle modře). V čase 171 Myr je patrný zánik konvektivní zóny v centru a poté vznik zóny povrchové, která zasahuje až do oblasti, kde probíhaly nukleární přeměny. Po zažehnutí heliových reakcí v centru (v čase 172 Myr) se vytváří druhá vnitřní konvektivní zóna. Výpočet programem EZ.

uvolňování gravitační energie a tedy i růstu centrální teploty. Růst teploty a hustoty naruší i relativně stabilizovanou vodíkovou slupku, ve které nastává nový rychlý růst produkce nukleární energie. To vede k nové expanzi a ochlazení obalu hvězdy. Pokles teploty je rychlejší než pokles hustoty, opacitní koeficient roste, a po určitém čase vede i k postupnému poklesu zářivého výkonu hvězdy ($t = 93,5 \text{ Myr}$, bod 9).

8. *zužování slupky a posouvání k povrchu (kde je menší ρ, T) \rightarrow pokles $\epsilon \rightarrow$ pokles L_* :* Vodíková slupka se neustále zužuje a posouvá směrem k povrchu. Souvisí to s úbytkem vodíku směrem k centru a poklesem teploty a hustoty směrem k povrchu. Produkce energie ve slupce proto zvolna klesá a snižuje se tím pádem i zářivý výkon celé hvězdy.
9. *pokles T v podfotosférických vrstvách \rightarrow pokles ionizace \rightarrow zvýšení $\kappa \rightarrow$ vznik podpovrchové konvektivní zóny, nad zónou pokles κ :* Pokračující pokles teploty vyvolá pokles ionizace v podfotosférických vrstvách, což vede ke vzniku *vnější konvektivní zóny*. V tenké vrstvě nad touto konvektivní zónou navíc poklesne opacita, čímž je přenos energie směrem k povrchu usnadněn.

10. *rozšiřování konvektivní zóny k centru* → růst L_* , *podpovrchové vrstvy rozhodující*: Konvektivní zóna která se postupně rozšiřuje směrem k centru hvězdy. Je třeba si připomenout, že zatímco v oblastech se zářivým přenosem energie dochází k expanzi zčásti na úkor pohlcovaného záření, v oblastech konvekce probíhá expanze prakticky adiabaticky, tedy pouze na úkor vnitřní energie. Výsledkem je, že zářivý výkon hvězdy znovu roste a tento růst probíhá tak rychle, jak rychle se dolní hranice konvektivní zóny přibližuje k okraji hořící vodíkové slupky.

Tato nová změna struktury hvězdy vede k růstu teploty a tedy i produkce energie ve vodíkové slupce. To je pozoruhodná situace — poprvé za celý vývoj od hlavní posloupnosti nulového věku jsou pro chování celé hvězdy určující procesy probíhající v jejích *podpovrchových vrstvách*.

11. $T_c \simeq 10^8 \text{ K}$ → *slučování He na C* → *zastavení smršťování jádra* → *snížení ϵ ve slupce (přeměna H na He stále nejvydatnější)* → *po zažehnutí 2. zdroje L_* klesne*: Zářivý výkon hvězdy roste do té doby, než teplota v blízkosti centra hvězdy dosáhne hodnoty 10^8 K . Poté započne v centru hvězdy jaderné slučování helia na uhlík. V centru se opakuje podobná situace jako při zapálení vodíku během kontrakce hvězdy k hlavní posloupnosti nulového věku. Smršťování jádra se zastaví a v jádru se ustaví stabilní stav, postupně se ovšem vytvoří konvektivní zóna, která při svém zvětšování vede k diskontinuitě chemického složení na vnějším okraji zóny. Hlavním důsledkem však je, že zastavením kontrakce jádra se zhorší podmínky pro slučování vodíku na helium ve vodíkové slupce, která je i nadále *nejvydatnějším energetickým zdrojem hvězdy*. Ač se to zdá poněkud kuriózní, zářivý výkon hvězdy po zažehnutí dalšího zdroje nukleární energie proto začíná *klesat* a její poloměr se zmenšuje.
12. *stabilní hoření He na C (méně vydatné), trvající 10 až 20 % pobytu na hlavní posloupnosti*: Vzhledem k nižší energetické vydatnosti slučování helia na uhlík (menšímu rozdílu vazebných energií), trvá relativně stabilní období hoření helia v jádru hvězdy mnohem kratší dobu, než fáze pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti.
13. *hoření He ve slupce, smršťování C jádra* → *růst T_c* → *růst ϵ_{He}* → *expanze slupky H* → *pokles ϵ_{H}* → *smršťování hvězdy* → *pokles L_* (dvojitá vazba)*: Po vyčerpání helia v jádru dojde opět analogicky k hoření helia v *heliové slupce*. Nyní však dochází již ke *dvojitě vazbě*: jak se nyní uhlíkové jádro smršťuje a zahřívá, dostává se heliová slupka do oblastí s vyšší teplotou a hustotou a zvýšený tok energie z ní vede k expanzi a ochlazení oblasti hoření vodíku ve slupce a tedy ke smršťování hvězdy a poklesu jejího zářivého výkonu.
14. *ztráta hmoty hvězdným větrem*: V těchto fázích vstupuje do hry další faktor, který námi uvažované modely dobře nepopisují: únik hmoty ve formě hvězdného větru. (V některých výpočtech se únik hmoty bere v potaz formou parametrického popisu na základě empirických údajů.)
15. *další reakce s menší vydatností, pulzace obalu, pohyb podél AGB, odvržení obalu*: Hvězda v důsledku dalších nukleárních reakcí s menší a menší energetickou vydatností stále zrychluje svůj vývoj, což vede k tomu, že je nakonec třeba další vývoj již uvažovat *dynamicky*, s použitím pohybové rovnice místo rovnice hydrostatické rovnováhy. Dochází k pulsacím obalu hvězdy, v HR diagramu se

hvězda pohybuje po velice složité trajektorii v blízkosti *asymptotické větve obrů* (AGB). Může dojít i k odvržení celého vnějšího obalu hvězdy.

16. *jádro Fe (Co, Ni) → elektronová degenerace → zastavení smršťování*: Výsledným produktem jaderných reakcí je jádro složené z prvků skupiny železa, jejichž atomová struktura je velmi stabilní. Jeho další smršťování nakonec zastaví *elektronová degenerace* centrálních částí hvězdy.
17. *postupné spotřebování paliva ve slupkách → smrštění hvězdy → pomalé chladnutí*: Pokud nedojde k odvržení obalu v důsledku dynamických nestabilit, spotřebuje se po zastavení kontrakce jádra v důsledku elektronové degenerace zbytek nukleárního paliva v hořících slupkách a celá hvězda se začne smršťovat a skončí jako více či méně kompaktní objekt v blízkosti hlavní posloupnosti čistě heliových hvězd.

Pozdní stádia vývoje (15.–16.) vyžadují mnohem složitější modely a jsou v současnosti předmětem intenzivního výzkumu.

7.2 Odlišnosti hvězdného vývoje v závislosti na hmotnosti hvězdy

Počáteční hmotnost hvězdy je pro celý její vývoj zcela určující. Již z toho, co dosud víme, je zřejmé, že hvězdy s vyšší hmotností budou díky větší vlastní gravitaci schopny dosahovat při počáteční kontrakci *vyšších centrálních teplot* (a zároveň nižších hustot). Vzhledem ke strmé závislosti energetické výtěžnosti jaderných reakcí na teplotě lze proto očekávat, že **nukleární vývoj i ostatní fáze vývoje hvězdy se budou s rostoucí hmotností zkracovat**. To výpočty skutečně potvrzují. Popišme si nyní podrobněji, jak se liší vývoj hvězd v závislosti na jejich počáteční hmotnosti (viz také tab. 4, obr. 28, 29, 30).

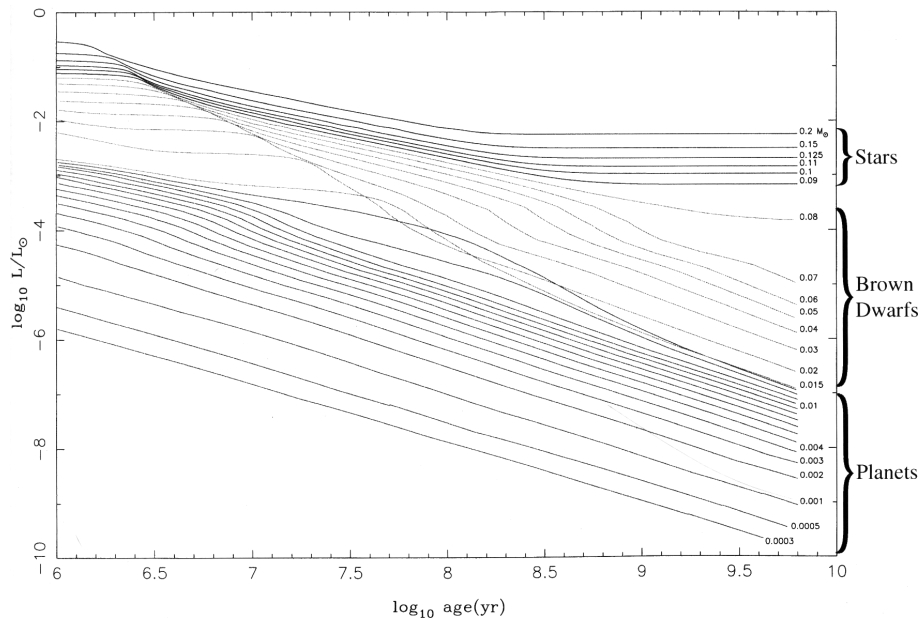
Je-li hmotnost protohvězdy menší než asi $0,075 M_{\odot}$, nestačí její vlastní přitažlivost k tomu, aby v jejím jádru došlo k rádnému zapálení vodíkové syntézy. Hroucení jádra proto pokračuje, hvězda chabě září na úkor změn potenciální energie a nakonec je smršťování jádra zastaveno jeho narůstající elektronovou degenerací. Hvězdám v tomto stavu se začalo říkat *hnědí trpaslíci* a několik desítek jich je již pozorováno. Od obřích planet se hnědí trpaslíci odlišují tím, že v nich dočasně probíhalo slučování deuteria nebo lithia, které zvyšovalo luminozitu v prvních miliónech let (obr. 27).²²

U hvězd, jejichž hmotnost nepřevyšuje hmotnost Slunce, probíhá jaderné slučování vodíku na helium téměř výlučně formou proton-protonového cyklu, jehož energetická závislost na teplotě je méně strmá. V důsledku toho v takových hvězdách zaujímá oblast nukleárního slučování relativně větší objem než u hvězd hmotnějších. Kromě toho se u nich vůbec *nevytvoří* centrální konvektivní zóna (obr. 31) a nedochází k žádnému výraznému přechodu mezi hořením vodíku v jádru a ve vodíkové slupce. Dlouhé období klidného vývoje tak zahrnuje i dobu hoření vodíku ve slupce. (Z tohoto pohledu lze říci, že si lidstvo pro svou existenci nevybralo tak špatnou centrální hvězdu.)

²²I největší planeta sluneční soustavy, Jupiter o hmotnosti $0,001 M_{\odot}$, vysílá do okolí asi dvakrát více zářivé energie než přijímá od Slunce — vysvětlujeme si to jako stále probíhající kontrakci a uvolňování gravitační potenciální energie. Mimochodem se pro modelování atmosféry a spektra Jupitera používají stejné metody jako u hnědých trpaslíků.

Tabulka 4: Vývoj osamocené hvězdy v závislosti na její počáteční hmotnosti

Hmotnost (M_{\odot})	Stadium hoření vodíku	Stadium hoření helia	Konečné stadium vývoje
$< 0,075$	ne	ne	hnědý trpaslík
$0,075-0,5$	ano p-p řetězec	ne elektronová degenerace	dynamické oscilace + hvězdný vítr
$0,5-1,0$	ano: žádné konvektivní jádro	ano	↓ bílý trpaslík
$1,0-2,0$	ano: postupně rostoucí konvektivní zóna	ano	
$2,0-10,0$	ano: roste podíl CNO cyklu	ano	supernova → neutronová hvězda
$10,0-50,0$	ano: CNO dominuje, semikonvekce,	ano	
> 50	konvektivní přestřelování	ano	černá díra?



Obrázek 27: Luminozity v závislosti na čase pro tělesa různých hmotností: planety ($M < 0,01 M_{\odot}$), hnědé trpaslíky ($M = 0,015$ až $0,07 M_{\odot}$) a trpasličí hvězdy ($M = 0,08$ až $0,2 M_{\odot}$). Planety září pouze díky gravitační kontrakci (odražené světlo zde nepočítáme), v nitru hnědých trpaslíků dochází zpočátku pouze k hoření deuteria nebo lithia, ve hvězdách se později zažehne i vodík. Převzato z de Pater a Lissauer (2001).

Pro hvězdy, jejichž hmotnost je menší než asi $0,5 M_{\odot}$, navíc elektronová degenerace zastaví kontrakci jejich jádra po vyhoření vodíku dřív, než je dosažena teplota potřebná ke slučování helia na uhlík.

U hvězd s hmotností mezi 1 a $2 M_{\odot}$ dochází k jinému zajímavému jevu: během jejich stabilního vývoje po zapálení vodíku v jádru se jejich centrální konvektivní zóna postupně zvětšuje v závislosti na tom, jak se spolu se zvolna rostoucí centrální teplotou stále více na produkci energie podílí i CNO cyklus.

Pro hvězdy s hmotností mezi $0,5$ a asi $10 M_{\odot}$ můžeme předpokládat, že v pozdějších fázích vývoje ztratí díky dynamickým oscilacím a vlivem hvězdného větru své vnější vrstvy a poté, co se v jejich jádru uplatní elektronová degenerace, končí jako *bílí trpaslíci*, horké a velmi husté hvězdy, „skrblicí“ svou zářivou energií a velmi zvolna chladnoucí.

Konečně u hvězd s hmotností větší než asi $10 M_{\odot}$ dochází během hoření vodíku v jádru k rozšiřování konvektivní zóny v důsledku značného tlaku záření. Protože v uvažovaném rozsahu teplot a hustot je opacitní koeficient určován především rozptylem na volných elektronech, pro který platí přibližný vztah

$$\kappa \doteq 0,19 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} (1 + X), \quad (307)$$

roste opacita s rostoucím obsahem vodíku a vrstvy nad konvektivní zónou se tak stávají vůči konvekci nestabilní. Vytváří se *semikonvektivní zóna*, tj. oblast, ve které dochází pouze k částečnému promíchávání chemických elementů tak, aby v každém místě byla splněna podmínka $\nabla_{\text{rad}} = \nabla_{\text{ad}}$. V literatuře se rovněž vedou spory o tom, zda nedochází k jevu nazývanému *konvektivní přestřelování* (angl. convective overshooting). Jde o to, že pokud je materiál vztlakem nadlehčován a unášen konvekcí vzhůru, může kinetická energie velkých konvektivních elementů způsobit to, že se část materiálu dostane i do míst, kde již podmínka konvektivní rovnováhy splněna není. Tím by se velikost oblasti, ve které dochází k promíchávání materiálu, poněkud zvětšila (viz obr. 32).

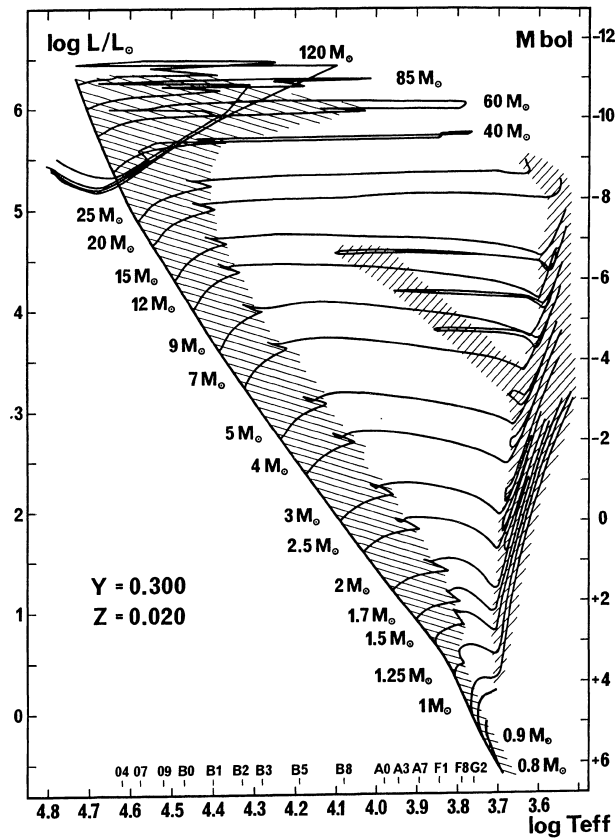
Jak ukázal teoreticky již Chandrasekhar (1938), pokud hmotnost *jádra* složeného z prvků skupiny železa (nikoli celé hvězdy) překročí $1,4 M_{\odot}$, stačí již jeho vlastní přitažlivost k tomu, aby překonala gradient tlaku vzniklý elektronovou degenerací, dochází k dezintegraci atomových jader při interakci



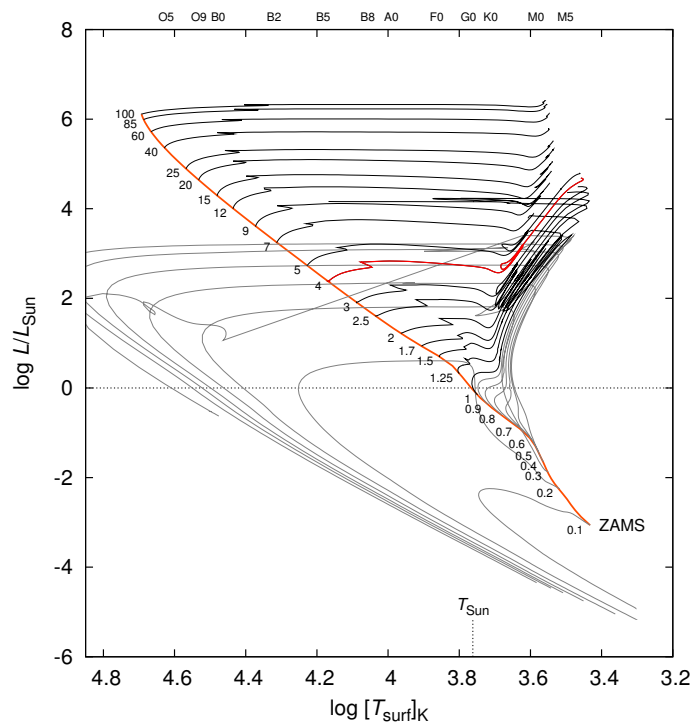
a vzniká neutronové jádro. Kolaps jádra je provázen prudkým uvolněním obrovského množství gravitační potenciální energie, kterou z velké části odnesou neutrina. Náraz obalu na tvrdou *neutronovou hvězdu* a vzniknuvší rázová vlna odmrští celý obal hvězdy rychlostmi, které překonávají rychlost únikovou. Radioaktivní prvky, které vznikly při nukleosyntéze za rázovou vlnou, pak dávají vzniknout opožděnému záření *supernovy*.

V Galaxii extrémně vzácné hvězdy s počáteční hmotností nad asi $50 M_{\odot}$ by mohly v závěrečných fázích vývoje dosáhnout v jádru tak velké přitažlivosti, že by došlo k uplatnění relativistických efektů a vzniku *černé díry*. Je třeba ovšem upozornit na to, že např. modelové výpočty ženevské skupiny (např. Schaller a spol. 1992), ve kterých se bere v potaz i únik hmoty ve formě *hvězdného větru*, ukazují, že např. hvězda s počáteční hmotností $60 M_{\odot}$ ztratí již během fáze hoření vodíku v jádru plných $12 M_{\odot}$.

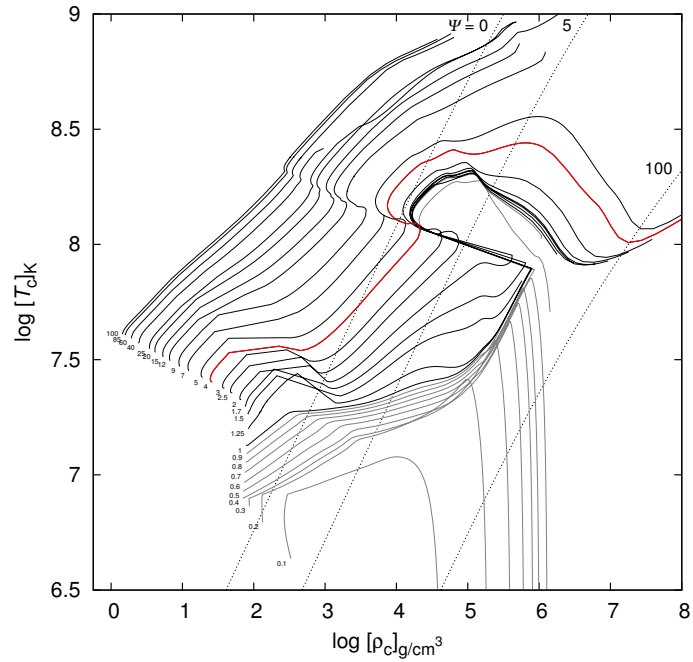
Vliv počátečního obsahu helia a těžších prvků. Je zřejmé, že vývoj hvězdy je také funkcí počátečního chemického složení, tedy hodnot X, Y, Z . Na obrázku 33 vidíme HR diagram pro nižší hodnotu metalicity



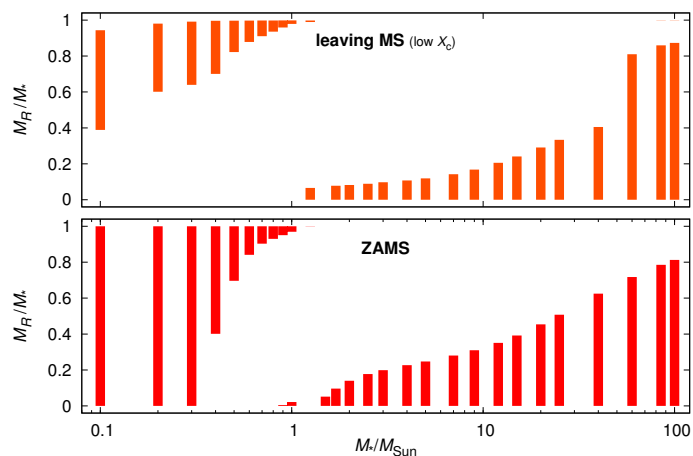
Obrázek 28: Hertzsprungův–Russellův diagram pro hvězdy $0,8$ až $120 M_{\odot}$, s obsahem hélia $Y = 0,3$ a metalitou $Z = 0,02$. Šrafované jsou vyznačené oblasti pomalého nukleárního vývoje. Převzato z Schaller a spol. (1992).



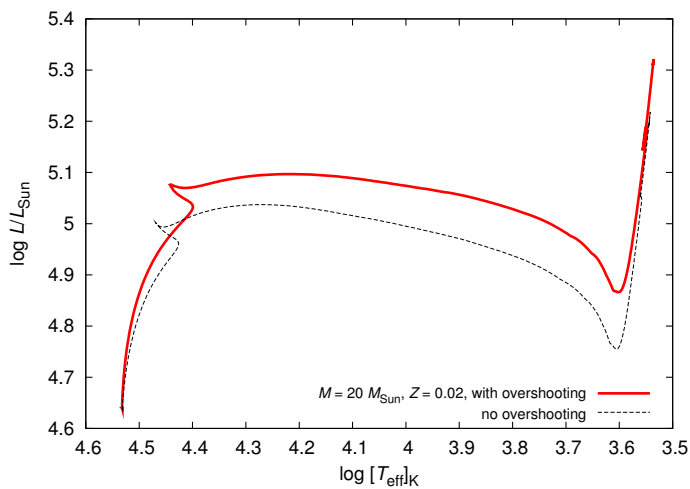
Obrázek 29: Vývoj hvězd s počátečními hmotnostmi od $0,1$ do $100 M_{\odot}$ a abundancemi $Y = 0,28$, $Z = 0,02$ na Hertzsprungově–Russellově diagramu. Červeně je vyznačena hvězda $4 M_{\odot}$. Hvězdy lehčí než Slunce se vyvíjejí pomalu, jejich životní doby na hlavní posloupnosti přesahují stáří vesmíru; nejlehčí hvězda s $0,1 M_{\odot}$ ji opustí a ochladne až za 4 miliardy let. Výpočet programem EZ.



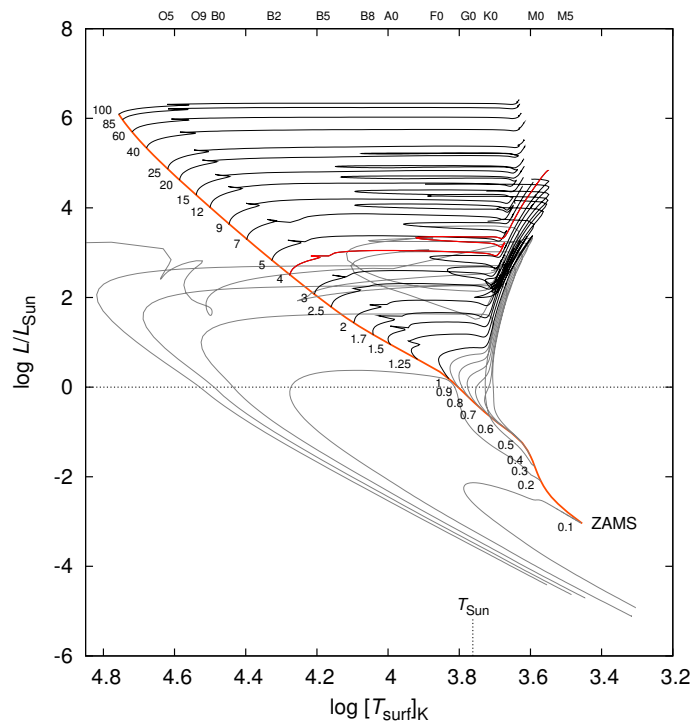
Obrázek 30: Vývoj centrálních hustot ρ_c a teplot T_c pro hvězdy $M = 0,1$ až $100 M_\odot$ a $Y = 0,28$, $Z = 0,02$. Pro hvězdy hmotnější než $2 M_\odot$ je zřetelné, že T_c je rostoucí, kdežto ρ_c klesající funkcí hmotnosti M . U hvězd středních hmotností vidíme po spotřebování vodíku v jádře nejprve růst centrální hustoty, způsobený smrštěním jádra, a po zapálení hélia její náhlý pokles, způsobený rozepnutím. U hmotnějších hvězd je přechod mezi hořením vodíku a hélia pozvolný. Tečkované linie označují stupeň degenerace Ψ látky. Výpočet programem EZ.



Obrázek 31: Konvektivní zóny v nitrech hvězd různých hmotností ($M = 0,1$ až $100 M_{\odot}$, s $Y = 0,28$, $Z = 0,02$). Pro danou počáteční hmotnost hvězdy M_* je barevně vyznačena oblast konvektivní zóny v proměnné M_R , škálované hodnotou M_* . Dolní panel: situace na hlavní posloupnosti nulového věku. Horní panel: při opuštění hlavní posloupnosti (když je X_c malé). Výpočet programem EZ.



Obrázek 32: Vliv konvektivního přestřelování na vývoj hvězdy s $M = 20 M_{\odot}$ v H–R diagramu. Parametr přestřelování byl zvolen `overshoot_param = 0.12`. Výpočet programem EZ.



Obrázek 33: Vývojový H–R diagram jako na obr. 29, ale pro nižší hodnotu metalicity $Z = 0,001$.

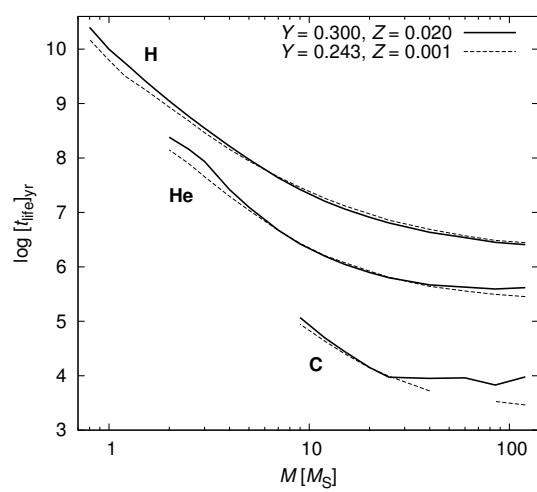
$Z = 0,001$ (a také obsahu hélia). Nejnápadnějšími rozdíly jsou:

1. různá poloha *hlavní posloupnosti nulového věku* (patrně proto, že Z hraje roli již při gravitačním kolapsu a také účinnost CNO cyklu klesá se Z , čili se v nitru ustaví jiná hydrostatická rovnováha);
2. u hvězd s hmotností $M = 1$ až $15 M_{\odot}$ se častěji objevuje pokles T_{eff} („klička“ na HR diagramu) v pozdních fázích vývoje.

Závislost doby hoření vodíku, případně helia, na hmotnosti a metalitě znázorňuje obrázek 34. Pro *lehké* hvězdy platí, že menší Z vede k menší střední molekulové hmotnosti μ , většímu P_c, T_c, ρ_c (dle stavové rovnice), rychlejšímu průběhu reakcí a *kratší* době života.

U *těžkých* hvězd je tomu jinak: menší Z sice stále znamená větší μ , ale zároveň je méně účinný CNO cyklus, dX_c/dt pak vychází přibližně stejně pro obě metalicity a rozhoduje především větší počáteční obsah vodíku X , což vede na *delší* dobu života.²³

²³Rozdíly nejsou způsobené hvězdným větrem, který je sice podstatně účinnější při $Z = 0,02$, ale přesto má lehčí hvězda (s větším úbytkem M) kratší životní dobu.



Obrázek 34: Doby hoření vodíku, hélia a uhlíku v závislosti na hmotnosti, pro hvězdy s různým počátečním chemickým složením. Podle Schaller a spol. (1992).

8 Srovnání předpovědí teorie hvězdného vývoje s pozorováním

Zkoumejme nyní otázku, nakolik se zjednodušená teorie stavby a vývoje hvězd, založená na jednorozměrných modelech, shoduje s tím, co je o stavbě a vývoji hvězd známo z jejich pozorování.

8.1 Jak získávat pozorovací data?

Je zřejmé, že všechny makroskopické veličiny, jež charakterizují hvězdy, a které můžeme ze Země pozorovat, se v důsledku hvězdného vývoje v naprosté většině vývojových fází mění příliš pomalu, než abychom je mohli během lidského života pozorovat. Kvantitativní pozorovací údaje o jasnostech či teplotách hvězd existují (až na několik čestných výjimek) pouze za období posledních asi 100 až 150 let. Nezbyvá proto, než se při srovnávání teorie s pozorováním uchýlit ke statistice a k jiným nepřímým metodám srovnávání a k hledání důkazů diferencovaného vývoje v důsledku různé počáteční hmotnosti hvězd.

Uvažme nejprve, jaké měřitelné veličiny můžeme pro podobné porovnávání použít.

8.1.1 Zářivý výkon hvězdy

Velké množství hvězd bylo proměřeno v Johnsonově UBV systému či ve Strömngrenově $uvby$. Hvězdné velikosti měřené ve žluté barvě Strömngrenova systému y jsou přímo navázány na Johnsonovy hvězdné velikosti ve žlutém filtru V jeho systému. I z dalších praktických důvodů se při srovnávání dat z různých zdrojů jeví hvězdná velikost měřená ve žluté barvě jako nejvhodnější: rozložení energie hvězd se v oblasti žluté barvy kolem 550 nm mění jen zvolna s vlnovou délkou a také extinkční koeficient naší atmosféry je při pozorování ve žluté barvě nižší, než v barvě modré či fialové. (Za dobrých pozorovacích podmínek zřídka na kterékoliv pozemské observatoři přesahuje hodnotu 0,3–0,4; v dobrých podmínkách bývá pouze asi 0,15.) Ze všech těchto důvodů jsou měření ve žluté barvě zatížena nejmenšími chybami a také se nejsnáze převádějí na standardní systém.

Chceme-li ovšem měření jasnosti ve žluté barvě srovnávat s bolometrickým zářivým výkonem modelu L_* , musíme provést několik kroků. Nejprve musíme měřenou *zdánlivou* hvězdnou velikost V přepočítat na velikost *absolutní* M_V , jakou by hvězda měla ve vzdálenosti 10 pc od nás. (1 pc = $3,085678 \cdot 10^{16}$ m je vzdálenost, ze které je vidět střední poloměr zemské dráhy okolo Slunce, astronomická jednotka, pod úhlem $1''$.) Protože tok záření v prázdném prostoru ubývá se čtvercem vzdálenosti d , je zřejmě podle Pogsonovy rovnice

$$M_V - V = -2,5 \log \frac{L_*/(10 \text{ pc})^2}{L_*/d^2} = 5 - 5 \log[d]_{\text{pc}}. \quad (309)$$

Vlivem mezihvězdné hmoty dochází však na velkých vzdálenostech k pohlcování světla hvězdy, což se obvykle popisuje absorpčním koeficientem ve žluté barvě A_V . Po proměření řady hvězd, u nichž bylo možno získat určitou představu o jejich vzdálenosti od nás, bylo zjištěno, že absorpci ve žluté barvě lze dobře popsat pomocí vztahu

$$A_V \doteq 3,2 E(B - V), \quad (310)$$

kde veličina $E(B - V)$ označuje zčervenání barevného indexu $(B - V)$. To se dá z měření v Johnsonově či Strömgenově systému obvykle dobře určit. Zčervenání lze také určit podle velikosti charakteristického zavlňení v průběhu spojitého spektra v dalekém ultrafialovém oboru kolem 250 nm, jehož velikost je úměrná velikosti zčervenání $E(B - V)$.

Zdánlivá hvězdná velikost ve žluté barvě, opravená o mezihvězdnou absorpci, se obvykle označuje indexem nula a je tedy

$$V_0 = V - A_V . \quad (311)$$

Pro absolutní hvězdnou velikost ve žluté barvě, zvanou obvykle velikost *visuální*, tak dostáváme jednoduchý pracovní vztah

$$M_V = V_0 + 5 - 5 \log[d]_{\text{pc}} = V_0 + 5 + 5 \log[\pi]_{\text{arcsec}} . \quad (312)$$

Vztah (312) můžeme přirozeně použít jen tehdy, známe-li vzdálenost hvězdy od nás. Pro hvězdy do vzdáleností asi 100 pc bylo možno vzdálenosti již od dob astronomického využití fotografických emulzí určovat trigonometrickou metodou. V nedávné době se díky mimořádně úspěšné družici Evropské kosmické agentury *Hipparcos*, která měřila velmi přesné paralaxy a též jasnosti hvězd v období let 1989–1994, podařilo tuto hranici prakticky o jeden řád zvětšit. Kromě toho lze měření jasnosti této družice pořizovaná ve velmi širokopásmovém filtru a označovaná jako H_p , v mnoha případech velmi přesně převést na Johnsonovu hvězdnou velikost ve žluté barvě pomocí vztahu, který publikoval Harmanec (1998).

Jinou možností, i když podstatně méně přesnou, je odhadnout zářivý výkon (a vzdálenost) podle vzhledu spektra hvězdy. Tato metoda *spektroskopické paralaxy* byla navržena Adamsem a Kohlschütterem (1914).

Rozdíl mezi bolometrickou a visuální absolutní hvězdnou velikostí se nazývá *bolometrická korekce BC*. Bolometrické korekce byly empiricky určeny na základě měření úhlových průměrů hvězd pomocí intenzitního interferometru, měření jejich rozložení energie a s použitím modelů atmosfér pro odhad příspěvku z krátkovlnné části spektra. Souhrnně jsou jako funkce efektivní teploty tabelovány v práci Code a spol. (1976) nebo v závislosti na spektrálním typu hvězd v práci Popper (1980). Jejich přičtením k absolutní visuální velikosti ze vztahu (312) dostáváme potřebnou absolutní velikost bolometrickou

$$M_{\text{bol}} = M_V + BC . \quad (313)$$

Tuto bolometrickou hvězdnou velikost můžeme již přímo porovnat s bolometrickou hvězdnou velikostí spočtenou ze zářivého toku hvězdy, udaného v jednotkách zářivého toku Slunce, který bývá obvykle v pracech s modely hvězdných niter tabelován:

$$M_{\text{bol}} - M_{\text{bol}\odot} = -2,5 \log \frac{L_*}{L_\odot} . \quad (314)$$

Protože novější studie ukazují, že zářivý výkon Slunce se poněkud mění během jedenáctiletého slunečního cyklu, a protože hodnota sama závisí na současné přesnosti našich měření, vyskytují se v literatuře pro zářivý výkon Slunce mírně odlišné údaje. To je ovšem nepřijemnost, která do našich srovnání vnáší zbytečnou

nepřesnost navíc. Proto Mezinárodní astronomická unie přijala na svém 23. valném shromáždění r. 1997 resoluci, která stanoví, že nadále již nebude bolometrický zářivý výkon hvězd kalibrován zářivým výkonem Slunce, ale že jeho nulový bod bude pevně stanoven, konkrétně

$$L_0 = 3,055 \cdot 10^{28} \text{ W} \quad \text{pro} \quad (315)$$

$$M_{\text{bol}} = 0,^{\text{m}}00. \quad (316)$$

To jinými slovy znamená, že bolometrická hvězdná velikost není již definována pouze relativně, ale absolutně. Snadno zjistíme, že pro zářivý výkon ve wattech plyne z právě uvedené definice vztah

$$M_{\text{bol}} = -2,5 \log[L]_{\text{W}} + 71,^{\text{m}}2125. \quad (317)$$

Je snadné si ověřit, že to dobře odpovídá často přijímaným následujícím středním hodnotám pro Slunce

$$M_{\text{bol}_{\odot}} = +4,^{\text{m}}75, \quad (318)$$

$$L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}. \quad (319)$$

8.1.2 Efektivní teplota hvězdy

Efektivní teplotu hvězdy lze odhadnout přímo z jejího spektrálního typu. Existují různé škály efektivních teplot od různých autorů, jako dobrou lze doporučit např. škálu publikovanou v práci Popper (1980). Ideální ovšem je použít k určení efektivní teploty spočtené detailní modely hvězdných atmosfér a srovnávat pozorované a spočtené profily řady spektrálních čar, až nalezneme model, jehož spočtené čáry nejlépe popisují spektrum pozorované.

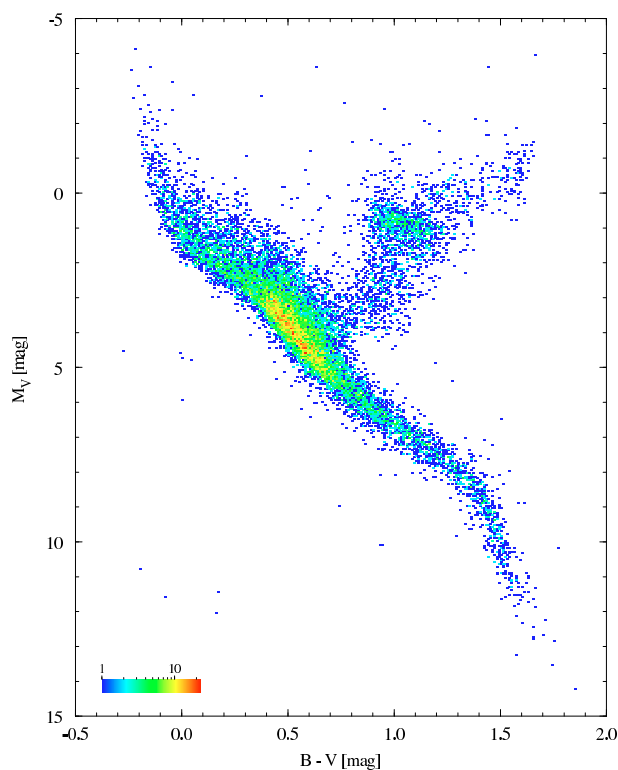
8.1.3 Hmotnosti a poloměry hvězd

Pro řadu *oddělených* zákrytových dvojhvězd, jejichž vývoj nebyl dosud ovlivněn přímou interakcí mezi složkami, se podařilo ze spektroskopie a fotometrie určit všechny jejich základní vlastnosti: hmotnosti M , poloměry R , efektivní teploty T_{eff} a zářivé výkony L obou složek.

Poloměry hvězd lze rovněž získat z kombinace *interferometrických pozorování*, ze kterých získáme úhlové rozměry, a ze spolehlivě určené vzdálenosti. Tu lze pro bližší hvězdy získávat přímým trigonometrickým měřením, jak už o tom byla řeč výše, nebo lze studovat hvězdy z hvězdokup s dobře určenou vzdáleností.

8.1.4 Diagram V versus $(B - V)$ pro hvězdokupy

Protože i hvězdokupy, patřící do naší Galaxie, jsou od nás vzdáleny nejméně desítky parseků, můžeme vzhledem k jejich daleko menším vlastním rozměrům předpokládat, že všechny jejich členy vidíme prakticky ve stejné vzdálenosti od nás. Toto poznání se stalo základem pro jeden z nejlepších testů teorie hvězdného vývoje. Pro danou hvězdokupu totiž stačí provést měření jasnosti jejich členů v nějakém standardním fotometrickém systému a poté zkonstruovat diagram barevný index versus zdánlivá vizuální hvězdná velikost.



Obrázek 35: Hertzsprungův–Russelův diagram ($B - V, M_V$), zkonstruovaný na základě měření družice Hipparcos. Hipparcos změřil přesné paralaxy a UBV fotometrii pro přibližně 17000 hvězd. Barevná škála znázorňuje počet hvězd v jedné buňce. Převzato z http://www.rssd.esa.int/index.php?project=HIPPARCOS&page=HR_dia.

Takový diagram je v zásadě jen jiným provedením HR diagramu. Příkladně pro Johnsonův UBV systém existuje velmi dobrá kalibrace mezi indexem ($B - V$) a mezi spektrálním typem či efektivní teplotou hvězdy. Protože všechny hvězdy kupy jsou zhruba stejně daleko, popisují zdánlivé jasnosti hvězd zcela správně jejich *vzájemné* jasnosti.

8.2 Vysvětlení hlavních rysů Hertzsprungova–Russellova diagramu

Zcela zásadním úspěchem teorie hvězdného vývoje je to, že dokáže velmi dobře vysvětlit nerovnoměrné rozložení hvězd v HR diagramu (obr. 35) Konkrétně *hlavní posloupnost* v HR diagramu se ukázala být identická s množinou bodů ($\log T_{\text{eff}}, M_{\text{bol}}$), které definují modely hvězd o různých počátečních hmotnostech pro fáze klidného slučování vodíku na helium v jejich jádrech. Teorie předpovídá, že tyto fáze vývoje trvají nejdéle, a proto máme statisticky největší šanci právě v nich hvězdy pozorovat. Navíc se velmi uspokojivě shodují předpovězená a pozorovaná poloha hlavní posloupnosti.

8.3 Projevy vývoje ve hvězdokupách

Historicky prvním velkým úspěchem teorie hvězdného vývoje byl souhlas předpovědi s pozorováními několika hvězdokup, který publikoval Sandage (1957). Jak jsme podrobně probrali, vyvíjejí se hvězdy tím rychleji, čím je jejich počáteční hmotnost větší. Mimo to můžeme pokládat za velice pravděpodobné, že všechny hvězdy dané hvězdokupy vznikly současně, a také ze stejného materiálu. Každá hvězdokupa je tedy jako celek nějak stará a dá se čekat, že čím je starší, tím méně hmotné hvězdy k ní patřící stačily již spotřebovat ve svých jádrech zásobu vodíku a opustit hlavní posloupnost. Sandage poskládal v HR diagramu pozorování hvězd z 11 hvězdokup se známými absolutními vizuálními hvězdnými velikostmi a ukázalo se, že v dolní části hlavní posloupnosti se pozorování ze všech hvězdokup dobře shodovala, zatímco v horní části se jednotlivé hvězdokupy lišily podle svého stáří (obr. 36).

Toto zásadní zjištění je dnes používáno již ne k důkazu správnosti teorie hvězdného vývoje, ale naopak k určování stáří hvězdokup a jejich vzdálenosti od nás. Při detailních studiích se postupuje tak, že se nejprve pomocí spektroskopických pozorování řady členů kupy určí její chemické složení, konkrétně obsah Z těžkých prvků a helia Y a poté se srovnává její pozorovaný HR diagram s předpovědí modelových výpočtů pro dané chemické složení. Z bodu, kde se pozorovaná sekvece hvězd kupy v HR diagramu začíná vzdalovat od hlavní posloupnosti, lze velmi přesně odhadovat vývojový věk kupy. Naopak konstanta, kterou by bylo třeba odečíst od pozorovaných zdánlivých vizuálních hvězdných velikostí, opravených o mezihvězdnou absorpci, aby se hvězdy hlavní posloupnosti v pozorovaném a modelovém HR diagramu překrývaly, se obvykle nazývá *modul vzdálenosti* $V_0 - M_V$ a podle (312) jej zřejmě lze vyjádřit jako

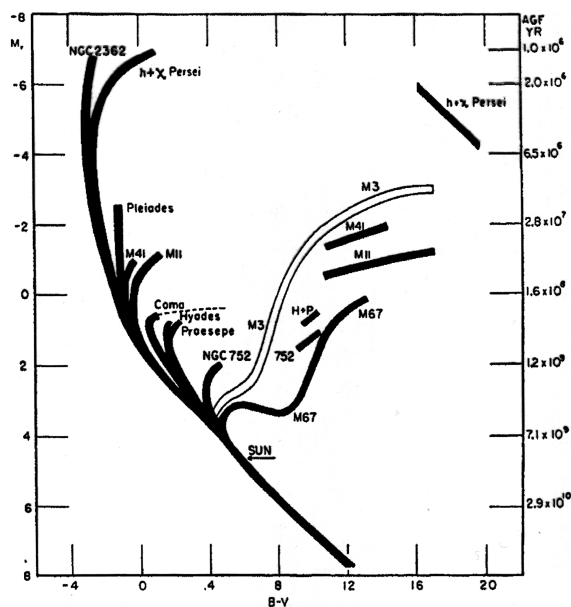
$$V_0 - M_V = 5 \log[d]_{\text{pc}} - 5. \quad (320)$$

Z něj můžeme ihned spočítat vzdálenost d hvězdokupy od nás.

Je třeba se zmínit, že poté, co byla zpracována měření vzdáleností z již zmiňované družice Hipparcos, ukázalo se, že pro většinu dobře pozorovaných galaktických hvězdokup se fotometricky a trigonometricky určené vzdálenosti velmi dobře shodují, ale v několika případech existuje dosud ne zcela uspokojivě vysvětlený rozdíl.²⁴

²⁴Konkrétně pro velmi známou hvězdokupu Plejády (M45) je podle Pinsonneaulta a spol. (1998) fotometricky určená vzdálenost (s použitím modelů hvězdného vývoje) asi 130 pc, zatímco měření družice *Hipparcos* vedou na vzdálenost (116 ± 3) pc. Tito autoři vyslovili domněnku, že měření družice *Hipparcos* mohou být na některých částech oblohy zatížena systematickou chybou. Na obranu spolehlivosti měření družice *Hipparcos* však velmi přesvědčivě vystoupili Robichon a spol. (1999), kteří ukázali, že fotometrická vzdálenost Plejád se podle určení různých autorů pohybuje v rozmezí 124 – 132 pc a z vlastní analýzy určili vzdálenost Plejád z družicových měření na 115 – 121 pc. Nezávisle vyloučil existenci systematických chyb v měření družice *Hipparcos* van Leeuwen (1999), který z nich určil vzdálenost Plejád v rozpětí 115 – 122 pc. Nicméně Narayanan a Gould (1999) publikovali kritickou studii, ve které dokazovali, že družicím *Hipparcos* měřené paralaxy Plejád a Hyád jsou prostorově korelovány na úhlových vzdálenostech asi 2° - 3° s amplitudami až $0,002$. Za předpokladu, že se všechny hvězdy náležející do Plejád pohybují se stejnou prostorovou rychlostí poté odvodili jejich individuální paralaxy z vlastních pohybů, rovněž měřených družicím *Hipparcos* a z nich získali vzdálenost Plejád 131 ± 11 pc, tedy hodnotu shodující se s klasickými odhady. Li a Junliang (1999) nezávisle statisticky vyhodnili prostorový pohyb hvězd z Plejád a určili vzdálenost $135,56 \pm 0,72$ pc.

Příběh ale pokračoval. Munari a kol. (2004) publikovali studii první objevené zákrytové dvojhvězdy v Plejádách V1229 Tau = HD 23642 a určili její vzdálenost na 132 ± 2 pc, ve výborné shodě s fotometricky určenou vzdáleností Plejád a v rozporu se vzdáleností určenou družicím *Hipparcos*. Další studii zákrytové dvojhvězdy V1229 Tau publikovali Southworth a kol. (2005). Nově



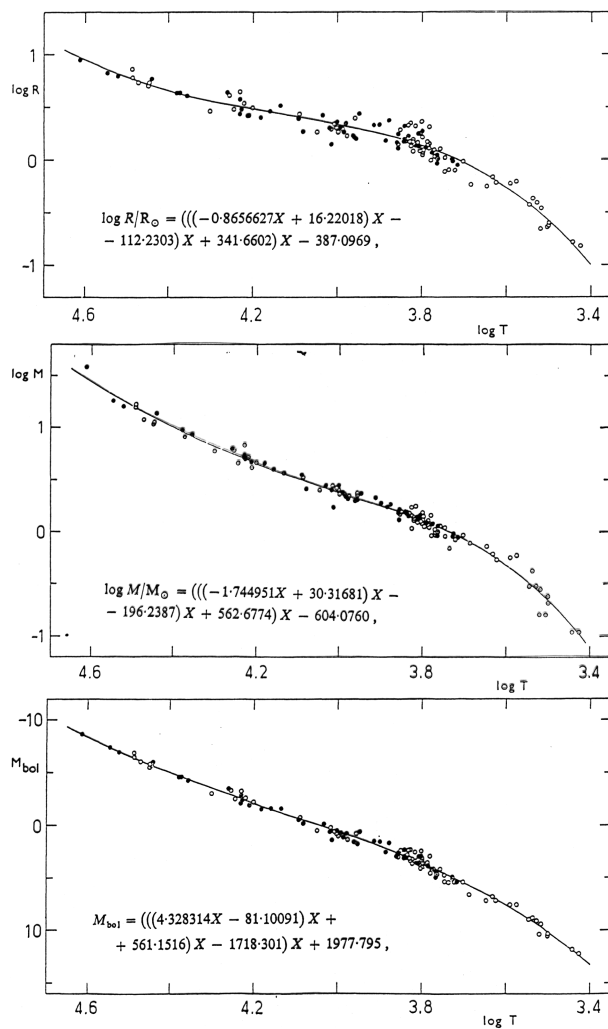
Obrázek 36: Hertzsprungův–Russelův diagram pro vybrané hvězdokupy. Převzato z práce Sandage (1957).

8.4 Projevy vývoje ve dvojhvězdách

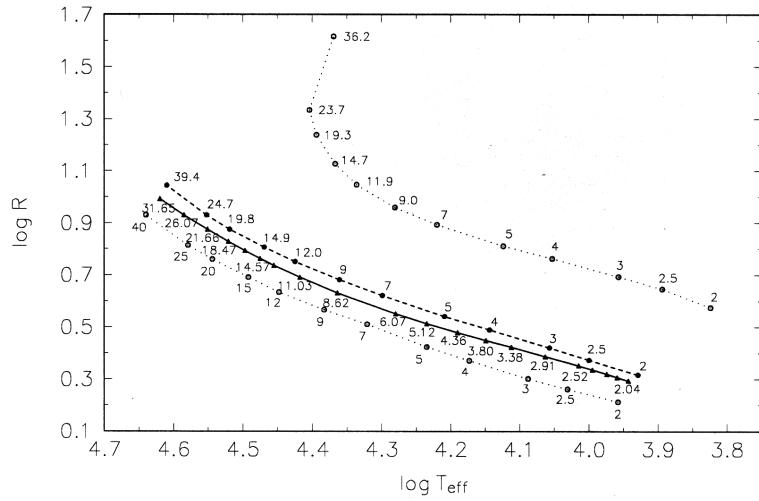
Pokud se podaří pro některou zákrytovou dvojhvězdu s dobrou přesností určit její základní fyzikální vlastnosti, můžeme se opět pokusit o srovnání s vývojovými modely spočtenými pro pozorované hmotnosti obou složek. Harmanec (1988) kriticky shromáždil určení hmot a poloměrů hvězd hlavní posloupnosti a odvodil střední závislost těchto veličin na efektivní teplotě hvězdy (obr. 37). Jeho empirickou kalibraci lze porovnat se spočtenou sítí modelů Schallera a spol. (1992). Toto srovnání ukazuje velmi dobrou shodu v celém rozsahu hmotností, pro něž byly modely spočteny (obr. 38).

Andersen (1991) prováděl detailní srovnání vývojových modelů s konkrétními dvojhvězdami. Ve většině případů našel velmi dobrou shodu, t.j. v mezích přesnosti stejný vývojový věk obou složek a dobrou shodu vypočtené a pozorované polohy v různých diagramech (obr. 39). Pro některé systémy se však shodu nalézt nepodařilo pro žádné rozumné chemické složení.

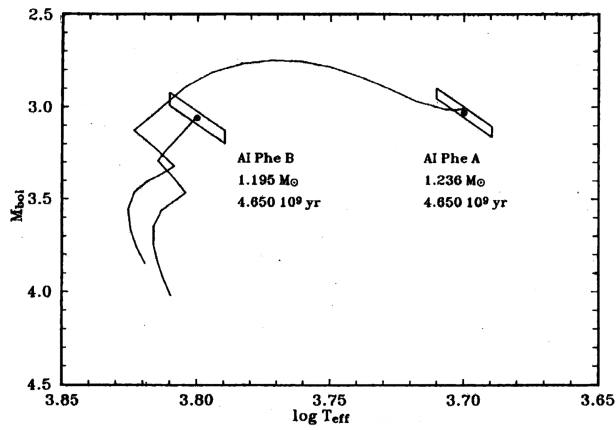
analyzovali fotometrii získanou Munarim a kol. a zaměřili se na analýzu chyb. Určili vzdálenost dvojhvězdy několika metodami konsistentně na 139 ± 1 pc. To se ovšem liší od dřívějších fotometrických určení vzdálenosti Plejád skoro stejně, jako se tato určení liší od vzdálenosti měřené družicí Hipparcos. Ještě jednu detailní studii V1229 Tau publikovali Groenewegen a kol. (2007), kteří dospěli ke vzdálenosti $138,0 \pm 1,5$ pc. Pan a kol. (2004) použili velký interferometr na Palomaru a rozlišili prostorovou dráhu spektroskopické dvojhvězdy Atlas = HD 23850, která má oběžnou periodu asi 291 dní. Došli k závěru, že tato dvojhvězda je od nás vzdálena více než 127 pc, přičemž nejpravděpodobnější vzdálenost stanovili na 133 – 137 pc. Zwahlen a kol. (2004) poté získali i přesnou spektroskopickou dráhu obou složek této dvojhvězdy. Vzhledem k tomu, že z analýzy astrometrické dráhy lze získat úhlový rozměr velké poloosy oběžné dráhy a sklon oběžné roviny, zatímco ze spektroskopie lze určit rozměr poloosy dráhy v absolutních jednotkách násobený sinem sklonu oběžné dráhy, vede kombinace obou dráhových řešení na skoro čistě geometrické určení vzdálenosti dvojhvězdy. Zwahlen a kol. tímto způsobem stanovili vzdálenost Plejád na 132 ± 4 pc.



Obrázek 37: Parametry (T , M_{bol} , M , R), určené měřeními pro složky dvojhvězd, které posléze umožnily odvodit empirické závislosti mezi těmito veličinami. Převzato z práce Harmance (1988).



Obrázek 38: Porovnání empirické závislosti $R(T_{\text{eff}})$, odvozené z pozorování oddělených dvojhvězd (plná čára), s pozdějšími teoretickými modely Schallera a spol. (1992). U symbolů jsou zapsané hmotnosti hvězd, tečkované čáry znázorňují hlavní posloupnost nulového věku (ZAMS) a konec hlavní posloupnosti (TAMS), čárkované jsou vyznačeny polohy hvězd přibližně v polovině pobytu na hlavní posloupnosti. Převzato z práce Harmance (2002a).



Obrázek 39: Vývoj složek dvojhvězdy AI Phe na H–R diagramu (T_{eff} , M_{bol}), od hlavní posloupnosti nulového věku po dobu 4,56 Gyr, a porovnání s polohami odvozenými z pozorování (s určitými chybovými intervaly). Převzato z práce Andersena (1991).

8.5 Změny chemického složení pozorované ve spektrech

Po většinu vývoje hvězdy jsou jakékoliv změny chemického složení skryté v jádře, kde probíhají nukleární přeměny, a na povrchu hvězdy se vůbec neprojevují — tam je chemické složení prakticky stejné jako na hlavní posloupnosti nulového stáří. Jádro a povrch jsou oddělené zónou zářivé rovnováhy.

V pozdějších fázích hvězdného vývoje však obvykle vznikají *povrchové konvektivní zóny*, které zasahují až do oblastí, kde předtím probíhaly nukleární přeměny (je v nich tedy zvýšený obsah helia, případně těžších prvků, nebo snížený). Proudění tak může syntetizované prvky *vynést* k povrchu, což se samozřejmě projeví v atmosféře hvězdy, a tedy i ve spektru, jako změny intenzit a profilů určitých spektrálních čar.²⁵ Takových vynesení se může odehrát vícero — jedno až tři, v závislosti na hmotnosti hvězdy (obr. 40).

Konvekce může z nitra vynést také *radioaktivní prvky* s krátkými poločasy rozpadu. Příkladem je nuklid technecia ⁹⁹Tc, který má poločas rozpadu $t_{1/2} = 211\,000$ yr, a jehož přítomnost v atmosféře se projeví spektrálními čarami na $\lambda = 403$ až 430 nm. Příkladem může být R Geminorum nebo jiné hvězdy ve fázi post-AGB (Merril 1952, Lebzelter a Hron 2003). Je důkazem, že konvektivní zóna zasahuje hluboko do nitra, kde jsou podmínky umožňující vznik těchto nestabilních nuklidů pomalým zachycením neutronů (s-procesem).

8.6 Test vnitřní struktury hvězd pomocí apsidálního pohybu

Již dlouhou dobu je známo, že některých dvojhvězd ve výstředných drahách lze využít k mapování vnitřní struktury jejich složek. Pokud by dvojhvězda ve výstředné dráze sestávala ze dvou hmotných bodů, bude její potenciál odpovídat Keplerově dráze a oběžný pohyb bude eliptický a ve stabilní dráze. Jakmile však hvězdy zaujmají konečný objem některé ekvipotenciální plochy nebo jakmile se uplatní relativistické efekty, dochází k narušování eliptického pohybu.

8.6.1 Apsidální pohyb v klasické mechanice

Podrobné modelování pomocí harmonických rozvoje gravitačního potenciálu vedlo ke zjištění, že rozložení hmoty ve hvězdě vede k postupnému stáčení přímky apsid ve směru oběžného pohybu, zatímco výstřednost oběžné dráhy se nemění. Je-li oběžná perioda dvojhvězdy udána ve dnech a $q = M_2/M_1$ označuje hmotový poměr, pak pro změnu délky periastra ω , ve stupních za časovou jednotku, v níž je udána oběžná perioda, platí v klasické mechanice následující rovnice

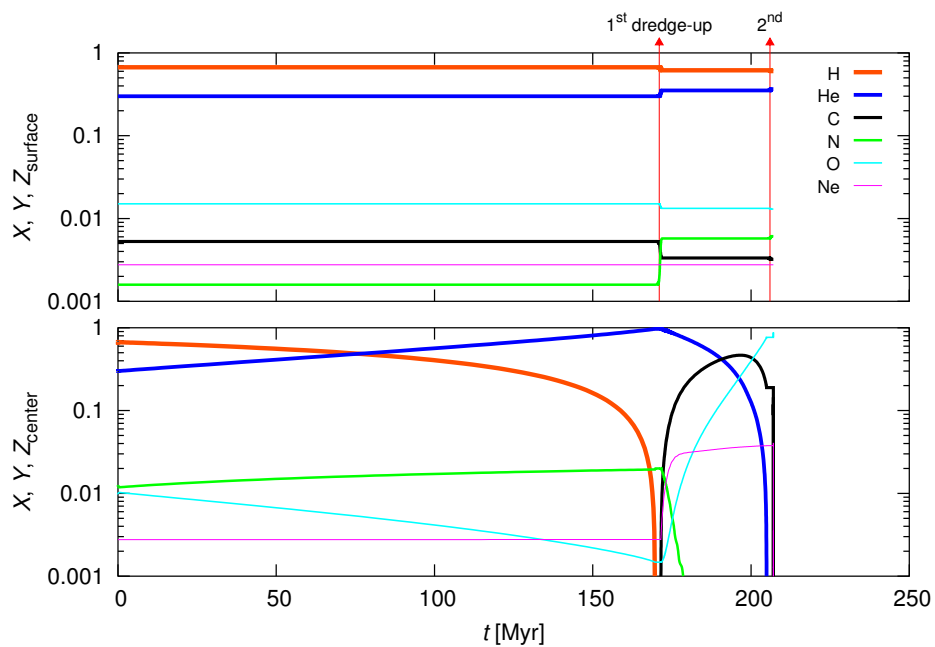
$$\dot{\omega}_c = \frac{360^\circ}{P} \{k_{2,1}[15qf(e) + (1+q)g(e, 1)]r_1^5 + k_{2,2}[15q^{-1}f(e) + (1+q^{-1})g(e, 2)]r_2^5\} \quad (321)$$

kde

$$f(e) = (1 - e^2)^{-5}(1 + 3e^2/2 + e^4/8), \quad (322)$$

$$g(e, j) = (1 - e^2)^{-2}(\Omega_j/\Omega_K)^2 \quad (323)$$

²⁵Spektrum se pochopitelně mění při každé změně teploty a ionizace ve fotosféře. Zde však musíme mít dokonalejší model hvězdné atmosféry, který prokáže, že pozorovaná změna je způsobena právě změnou chemického složení fotosféry.



Obrázek 40: Chemické složení v centru a na povrchu hvězdy o hmotnosti $4 M_{\odot}$. Po většinu nukleárního vývoje nejsou změny v centru vůbec znatelné na povrchu. Až rozšíření povrchové konvektivní zóny směrem k jádru, v čase 171 Myr, způsobí první vynesení k povrchu — obohacení o helium, dusík a ochuzení o kyslík, uhlík — což se projeví v atmosféře (a ve spektru). Druhé vynesení následuje v čase 206 Myr. Výpočet programem EZ.

a r_1 a r_2 označují relativní poloměry primární a sekundární složky, vyjádřené v jednotkách hlavní poloosy oběžné dráhy A . Členy s funkcí $f(e)$ vznikají díky slapové deformaci hvězdy, členy s $g(e)$ souvisejí s rotační deformací, přičemž Ω_j označuje úhlovou rotační rychlost j -té hvězdy ($j = 1, 2$) a $\Omega_K = 2\pi/P$ je Keplerova střední úhlová oběžná rychlost.

Konstanta vnitřní struktury k_2 je rovna nule pro hmotný bod a dosahuje hodnoty 0,75 pro zcela homogenní hvězdu. Ze sférických modelů stavby hvězd, funkce $\rho(r)$, ji lze spočítat podle vztahu

$$k_2 = \frac{16\pi}{5MR^5} \int_0^R \rho(r) r^7 dr \quad (324)$$

a např. v pracích Clareta a Giméneze (1992) a nověji Clareta (2004) je tato konstanta tabelována pro rozsáhlou síť vývojových modelů hvězd o různé hmotnosti.

Je ovšem zřejmé, že pozorovaný apsidální pohyb dvojhvězdy je důsledkem rozložení hmoty uvnitř *obou těles* a proto z něj lze určit pouze váhovaný střed

$$k_2 = \frac{c_1 k_{2,1} + c_2 k_{2,2}}{c_1 + c_2}, \quad (325)$$

kde c_1 a c_2 představují koeficienty u $k_{2,1}$ a $k_{2,2}$ v rovnici (321). Pro dvojhvězdu se stejnými hmotnostmi složek je tedy takový test nejspolehlivější.

8.6.2 Relativistický apsidální pohyb

Relativistický apsidální pohyb se řídí následujícím vztahem, který poprvé odvodili Levi-Civita (1937) a Robertson (1938):

$$\dot{\omega}_r = \frac{6\pi G}{c^2} \frac{M_1 + M_2}{AP(1 - e^2)}, \quad (326)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu a rychlost stáčení periastra je v radiánech za tu jednotku času, ve které se měří oběžná perioda. Vzdálenost složek A lze ještě eliminovat s použitím 3. Keplerova zákona a rychlost stáčení udat ve stupních za jednotku času. Dostáváme tak vztah

$$\dot{\omega}_r = \frac{(\pi G)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{5038848000} (M_1 + M_2)^{\frac{2}{3}}}{c^2 P^{\frac{5}{3}} (1 - e^2)}. \quad (327)$$

Je vidět, že relativistický apsidální pohyb závisí na celkové hmotnosti dvojhvězdy. U kompaktních objektů, jako jsou *binární pulsary*, nehraje klasický apsidální pohyb $\dot{\omega}_c$ prakticky žádnou roli a proto lze relativistický apsidální pohyb, daný vztahy (326) či (327), využít k přesnému určení hmotnosti soustavy.

Např. u binárního pulsaru PSR 1913+16 činí stáčení přímky apsid plných 4,2 ročně. V roce 2003 byl publikován objev binárního pulsaru s oběžnou periodou 2,4 hodiny, výstředností 0,088 a stáčením přímky apsid o 16,88 ročně (Burgay a kol. 2003). Podle rovnice (327) je tedy celková hmotnost této soustavy

2,58 M_{\odot} . Pro úplnost poznamenejme, že oběžná rychlost těles ve dráze činí asi 315 km s^{-1} , takže pokud jde o vlastní dráhový pohyb, žádné významné relativistické efekty se neuplatňují.

Výhodnější výraz pro relativistický apsidální pohyb lze ovšem získat tak, že ještě nahradíme hmotnosti složek polovičními amplitudami K_1, K_2 křivek radiálních rychlostí. Nejenže tím získáme vztah přímo použitelný na pozorovaná data, ale zvýšíme tím i přesnost určení, neboť z výrazu zcela zmizí gravitační konstanta G . Dostáváme tak

$$\dot{\omega}_r = \frac{1080^\circ}{c^2} \frac{(K_1 + K_2)^2}{P \sin^2 i}. \quad (328)$$

8.6.3 Celkový apsidální pohyb

U obecné dvojhvězdy je stáčení přímky apsid součtem klasického a relativistického stáčení a pro pozorovanou rychlost stáčení $\dot{\omega}$ přirozeně platí

$$\dot{\omega} = \dot{\omega}_c + \dot{\omega}_r. \quad (329)$$

Označíme-li symbolem U periodu úplné rotace přímky apsid, platí

$$U = \frac{360^\circ}{\dot{\omega}}. \quad (330)$$

Chceme-li ovšem zjistit, jak se pozorované stáčení přímky apsid shoduje s hodnotou konstanty vnitřní stavby k_2 , předpovězenou z klasické mechaniky, musíme nejprve spočítat relativistický příspěvek $\dot{\omega}_r$ z rovnice (328), ten odečíst od pozorované hodnoty stáčení, tedy

$$\dot{\omega}_c = \dot{\omega} - \dot{\omega}_r. \quad (331)$$

a poté spočítat pozorovanou hodnotu konstanty vnitřní stavby podle vztahu

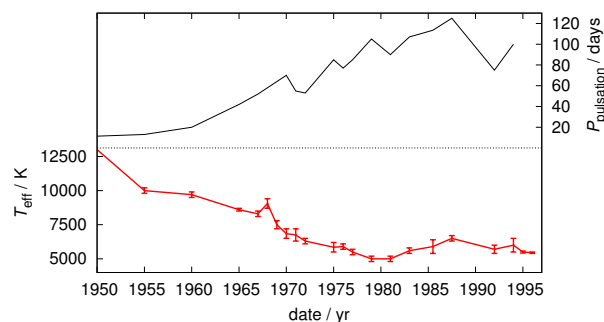
$$k_2 = \frac{P \dot{\omega}_c}{360^\circ} \frac{1}{c_1 + c_2}. \quad (332)$$

Hodnoty k_2 vypočtené z modelů stavby hvězd jsou obvykle řádově 10^{-3} až 10^{-2} .

8.7 Projevy vývoje za dobu lidské historie

Projevy hvězdného vývoje můžeme pozorovat jen v případech velmi rychlých vývojových stádií. Soudí se např., že projevem závěrečných fází vývoje hmotnějších hvězd jsou výbuchy supernov, které rozmetají většinu hmoty hvězdy do okolního prostoru. Tento názor potvrdil výbuch supernovy 1987 A ve Velkém Magellanově mračnu, kdy byl detekován i slabý tok neutrin. Jiným argumentem je přítomnost pulzaru v centru Krabí mlhoviny, která vznikla při výbuchu supernovy pozorované roku 1054.

Podobně se soudí, že např. známá proměnná hvězda FG Sge s velkou amplitudou změn, je hvězda v dynamickém pozdním stádiu vývoje (post-AGB star, obr. 41) — viz Jurcsik a Montesinos (1999).



Obrázek 41: Změny efektivní teploty a periody pulzací pro hvězdu FG Sge v období 1950 až 1996. Data z Jurcsik a Montesinos (1999).

Za důkaz hvězdného vývoje se považují i nálezy bílých trpaslíků v centru planetárních mlhovin.

Nezvyklý a originální pokus o ověření hvězdného vývoje v reálném čase učinil Mayer (1984), který se srovnáním hvězdných velikostí z katalogu Almagest se současnými pozorovanými jastnostmi veleobrů pokusil statisticky prokázat jejich pozorovatelný vývoj ve shodě s teorií. Jeho výsledky však byly nedávno Hearnshawem (1999) podrobeny kritice. I k Hearnshawově studii však lze mít výhrady a věc tak zůstává otevřená.

9 Jednoduché analytické modely a odhady

Nejen z historických důvodů, ale i pro pochopení některých souvislostí a často používaných vztahů je užitečné se seznámit s jednoduchými modely hvězd. Začneme připomenutím termodynamických dějů.

9.1 Polytropní děj

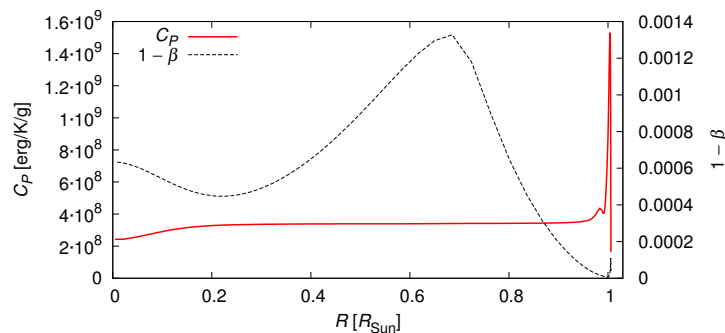
Polytropní změna je taková změna stavu, při které zůstává specifické teplo²⁶ c konstantní, tedy (pro 1 g látky)

$$\frac{dQ}{dT} = c = \text{konst.} \quad (333)$$

Speciální případ, kdy $c = 0$, se nazývá adiabatickým dějem, případ, kdy $c = c_P$, se nazývá dějem isobarickým, případ $c = c_V$ dějem isochorickým a případ, kdy $c \rightarrow \infty$, je dějem isotermickým.

Naším cílem je využít konstantního c k tomu, abychom zjednodušili stavovou rovnici $P(\rho, T)$ na tvar $P(\rho)$. Uvědomme si, že rovnice hvězdné stavby se tím podstatně zjednoduší: když tlak nezávisí na teplotě T , stačí nám pro popis stavby pouze dvě rovnice — rovnice kontinuity a hydrostatické rovnováhy, ve kterých vystupují $R(M_R)$, $P(M_R)$, $\rho(M_R)$ — nikoli čtyři.

Je ale předpoklad $c = \text{konst.}$ v celé hvězdě vůbec rozumný? Je jasné, že chemické složení musí být homogenní a také stupeň ionizace konstantní, jinak by se tepelná kapacita měnila. Navíc se vyloučením teploty zbavujeme i produkce energie z nukleárních reakcí a hvězda je tak zcela bez zdroje energie! Kupodivu to nevádí a ve většině objemu hvězdy můžeme takové přiblížení použít. Výsledky složitějších numerických modelů (obr. 42) to ostatně potvrzují.



Obrázek 42: Měrná tepelná kapacita c_P při konstantním tlaku a parametr $1 - \beta = 1 - P_g/P = P_r/P$ ve standardním modelu Slunce. V oblasti $0,3$ až $0,8 R_{\odot}$, tj. zejména v zóně zářivé rovnováhy, je c_P téměř konstantní. Řádový nárůst kapacity v podpovrchové vrstvě je způsoben neúplnou ionizací — přírůstek tepla dQ se spotřebuje hlavně na zvýšení ionizace, čili přírůstek teploty dT je malý a tepelná kapacita $c_P = (dQ/dT)_P$ velká. Hodnoty parametru $1 - \beta$ dosahují řádově 10^{-3} , čili tlak záření P_r je v celé hvězdě velmi malý v porovnání s celkovým tlakem P .

²⁶též měrná tepelná kapacita, $[c] = \text{erg K}^{-1} \text{g}^{-1}$

Konkrétní případ stavové rovnice hvězdné látky. Nejprve zkusíme zjednodušit stavovou rovnici pro směs plynu a záření

$$P = P_g + P_r = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T + \frac{1}{3} a T^4. \quad (334)$$

Musíme v celé hvězdě předpokládat *konstantní poměr β tlaku plynu k celkovému tlaku*

$$\beta = \frac{P_g}{P} = \text{konst.}, \quad (335)$$

což není velký „hřích“, neboť u reálných hvězd mnohdy představuje tlak záření sotva dvě procenta celkového tlaku (viz obr. 42). Teplotu T pak lze elegantně vyjádřit pomocí β

$$P = \frac{1}{\beta} P_g = \frac{1}{\beta} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T = \frac{1}{1-\beta} P_r = \frac{1}{1-\beta} \frac{1}{3} a T^4, \quad (336)$$

$$T^3 = \frac{1-\beta}{\beta} \frac{3\mathfrak{R}}{\mu a} \rho. \quad (337)$$

Dosazením zpět do (336) obdžíme zjednodušenou stavovou rovnici ve tvaru $P(\rho)$

$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \left[\frac{1-\beta}{\beta} \frac{3\mathfrak{R}}{\mu a} \right]^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{4}{3}} = K \rho^{\frac{4}{3}}. \quad (338)$$

Obecnější odvození z 1. věty termodynamické. Odvodíme nyní obecněji platnou rovnici polytropy, a to postupnými úpravami první věty termodynamické, která zní (pro 1 g látky)

$$dQ = dU + PdV. \quad (339)$$

Za vnitřní energii U hvězdné látky bychom dosadili

$$U = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T + \frac{aT^4}{\rho}, \quad (340)$$

za předpokladu konstantního β však můžeme hustotu ρ vyloučit a psát U pouze jako funkci teploty

$$U = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}T}{\mu} \frac{2-\beta}{\beta} = U(T). \quad (341)$$

Namísto diferenciálu dU pak budeme počítat pouze jednu parciální derivaci

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = c_V$$

$$dQ = \overbrace{\frac{\partial U}{\partial T}}^{c_V} dT + PdV. \quad (342)$$

Vidíme, že pro specifické teplo c_V při konstantním objemu ($dV = 0$) máme výraz

$$c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (343)$$

Stavovou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$PV = \frac{\mathfrak{R}}{\beta} T \quad (344)$$

a diferencujeme ji (při $\beta = \text{konst.}$)

$$d(PV) = PdV + VdP = \frac{\mathfrak{R}}{\beta} dT. \quad (345)$$

Dosazením za PdV do rovnice (342) dostáváme

$$dQ = \overbrace{\left(c_V + \frac{\mathfrak{R}}{\beta} \right)}^{\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = c_P} dT - VdP, \quad (346)$$

takže pro specifické teplo c_P při konstantním tlaku ($dP = 0$) máme vztah

$$c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = c_V + \frac{\mathfrak{R}}{\beta}. \quad (347)$$

Platí tedy rovnice

$$c_P - c_V = \frac{\mathfrak{R}}{\beta}, \quad (348)$$

kterou využijeme pro dosazení za P v rovnici (342)

$$c dT = c_V dT + (c_P - c_V) \frac{T}{V} dV. \quad (349)$$

Po úpravě

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} = (c_P - c_V) \frac{dV}{V}, \quad (350)$$

což lze snadno integrovat

$$(c - c_V) \ln T = (c_P - c_V) \ln V + \text{konst.} \quad (351)$$

Tabulka 5: Použití polytropních modelů s různým indexem n . Větší n znamená mimo jiné větší koncentraci látky ke středu.

index	látka (objekty)
$n = 1/2$ až 1	degenerovaný neutronový plyn (neutronové hvězdy)
$n = 3/2$	nerelativistický degenerovaný elektronový plyn (bílé trpaslíci, hnědí trpaslíci, Jupiter)
$n = 3$	směs ideálního plynu a záření (normální hvězdy), relativistický degenerovaný elektronový plyn
$n = 5$	nekonečná hvězda (vnější část hvězdy s hustým jádrem a řídkou obálkou)
$n \rightarrow \infty$	izotermální koule (bezsrážková kulová hvězdokupa)

a po zavedení exponentu

$$\gamma \equiv \frac{c - c_P}{c - c_V} \quad (352)$$

zapsat jako

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst.}' \quad (353)$$

Použijeme-li znovu stavovou rovnici (344), získáme

$$PV^\gamma = \text{konst.}'' \quad (354)$$

nebo ekvivalentně (neb $V = \frac{\mu}{\rho}$)

$$P = K\rho^\gamma \quad (355)$$

Polytropní děje bývá zvykem charakterizovat indexem n , který souvisí s exponentem γ vztahem

$$n \equiv \frac{1}{\gamma - 1} \quad (356)$$

Pak obecnou rovnici pro polytropní děj můžeme napsat ve tvaru

$$P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (357)$$

kde konstanta K obsahuje i střední molekulovou hmotnost částic μ .

Vidíme, že výše odvozený výraz (338) pro hvězdnou látku odpovídá polytropě s indexem $n = 3$. Použití dalších (přibližných) polytropních modelů shrnuje tabulka 5.

9.2 Laneova–Emdenova diferenciální rovnice

Rovnice hvězdné stavby nyní zjednodušíme následujícím postupem

1. rovnici kontinuity (89) přepíšeme pro gravitační potenciál Φ ;
2. použijeme rovnici hydrostatické rovnováhy (92) a rovnici polytropy (357) k nalezení $\rho(\Phi)$;
3. dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro Φ , kterou lze řešit analyticky pro určité hodnoty indexu n (nebo numericky pro všechny ostatní).

Pro sférickou hvězdu lze snadno zavést gravitační potenciál Φ . Gravitační zrychlení, čili síla působící na jednotku hmoty, je totiž gradientem potenciálu, tedy

$$\frac{d\Phi}{dR} = -\frac{GM_R}{R^2} = -\frac{G}{R^2} \int_0^R 4\pi R'^2 \rho dR'. \quad (358)$$

Tuto rovnici můžeme derivovat podle R (jako součin), a s přihlédnutím k rovnici zachování hmoty ve tvaru (88) dostáváme

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = \frac{2G}{R^3} \overbrace{\int_0^R 4\pi R'^2 \rho dR'}^{M_R} - 4\pi G\rho = -\frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} - 4\pi G\rho, \quad (359)$$

což lze snadno upravit na tvar

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} + 4\pi G\rho = 0. \quad (360)$$

Tuto rovnici zatím není možné vyřešit, neboť v ní kromě potenciálu $\Phi(R)$ vystupuje neznámá hustota $\rho(R)$.

Vzhledem k výše uvedenému můžeme rovnici hydrostatické rovnováhy (92) psát také ve tvaru

$$\frac{dP}{dR} = -\frac{GM_R}{R^2} \rho = \rho \frac{d\Phi}{dR}, \quad (361)$$

čili

$$dP = \rho d\Phi. \quad (362)$$

Podle obecné rovnice polytropy (357) máme

$$dP = K \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}} d\rho \quad (363)$$

a po dosazení

$$d\Phi = K \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}-1} d\rho. \quad (364)$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$\Phi + \text{konst.} = K(n+1)\rho^{\frac{1}{n}}. \quad (365)$$

Jestliže zvolíme nulový bod potenciálu na povrchu hvězdy, kde předpokládáme $\rho = 0$, bude konstanta rovnice (365) nulová a obdržíme kýžený vztah $\rho(\Phi)$

$$\rho = \left(\frac{\Phi}{K(n+1)} \right)^n. \quad (366)$$

Dosazením za ρ do (360) získáme rovnici, kde vystupuje pouze potenciál Φ

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} + \frac{4\pi G}{[K(n+1)]^n} \Phi^n = 0. \quad (367)$$

Jde o obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci $\Phi(R)$. Než ji budeme řešit, provedeme škálování zavedením parametru

$$\alpha^2 = \frac{4\pi G}{[K(n+1)]^n} \Phi_c^{n-1} \quad (368)$$

a nových proměnných φ a z pomocí vztahů

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_c}, \quad z = \alpha R, \quad (369)$$

kde Φ_c označuje hodnotu Φ v centru hvězdy. Bude zřejmě

$$\frac{d\Phi}{dR} = \Phi_c \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dR} = \alpha \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}, \quad (370)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dR^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{d\Phi}{dR} \right) \frac{dz}{dR} = \alpha^2 \Phi_c \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \quad (371)$$

$$\frac{2}{R} \frac{d\Phi}{dR} = \frac{2\alpha^2}{z} \Phi_c \frac{d\varphi}{dz}. \quad (372)$$

Rovnici (367) pak lze přepsat do tvaru *diferenciální rovnice Laneovy–Emdenovy*

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d\varphi}{dz} + \varphi^n = 0. \quad (373)$$

Jiný možný zápis Laneovy-Emdenovy rovnice zřejmě je

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{d\varphi}{dz} \right) + \varphi^n = 0. \quad (374)$$

Tato rovnice se obecně řeší numericky, např. pomocí rozvoje v řadu. Analytická řešení existují pro polytropní indexy $n = 0$, $n = 1$ a $n = 5$.

9.3 Polytrovní modely hvězd

Řešení rovnice (373) pro $n = 0$ je

$$\varphi(z) = 1 - \frac{z^2}{6}, \quad (375)$$

pro $n = 1$ má řešení tvar

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (376)$$

a konečně pro $n = 5$

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{z^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (377)$$

jak se můžeme snadno přesvědčit zpětným dosazením. Povšimněme si, že důsledkem řešení pro $n = 5$ je, že povrch hvězdy, kde je podle naší volby $\Phi = 0$, a tedy také $\varphi = 0$, odpovídá nekonečně velké hodnotě z , a tedy i R . Jinými slovy, hvězda stavěná podle polytropie $n = 5$ se rozprostírá do nekonečna.

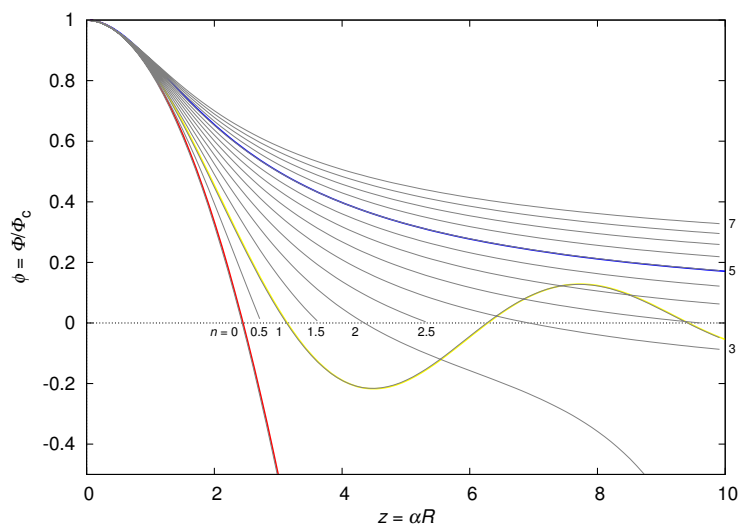
Numerické řešení pro libovolnou hodnotu n můžeme snadno získat Eulerovou metodou. Příslušný kód programu ve Fortranu 77 by mohl vypadat následovně

```
c  pocatecni podminky
    z = 1.e-3
    phi = 1.e0
    dphi_dz = 0.e0
    do while (z.lt.zmax)
c  Laneova-Emdenova rovnice
    d2phi_dz2 = -2.e0/z * dphi_dz - phi**n
c  jednoduchy Euleruv integrator
    dphi_dz = dphi_dz + d2phi_dz2 * dz
    phi = phi + dphi_dz * dz
    write(*,*) z, phi
    z = z + dz
enddo
```

Spočtené průběhy funkcí $\varphi(z)$ pro různá n ukazuje obrázek 43.

Hustota. Význam polytrovních modelů spočívá v tom, že pomocí nich lze činit určité odhady vnitřní stavby hvězd. Jak jsme již viděli, lze např. pomocí rovnice (366) počítat hustotu v libovolném bodě hvězdy ze znalosti hustoty v centru

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{\Phi}{\Phi_c}\right)^n = \varphi^n. \quad (378)$$



Obrázek 43: Analytická a numerická řešení Laneovy–Emdenovy rovnice, tedy funkce $\varphi(z)$, pro různé hodnoty polytropního indexu n . Hladinu, kde je $\varphi = 0$, považujeme za povrch hvězdy.

Pro případ $n = 0$ bychom dostali

$$\rho(R) = \rho_c \varphi^0 = \rho_c, \quad (379)$$

neboli homogenní hvězdu s konstantní hustotou. Pro větší n vychází vždy větší koncentrace látky ke středu.

Rovněž si můžeme všimnout, že podle vztahů (366) a (368) platí

$$\left(\frac{R}{z}\right)^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}}. \quad (380)$$

Tuto rovnici lze použít k určení centrální hustoty ρ_c ze zadaného poloměru hvězdy R_* a odpovídající hodnoty z_* , získané integrací Laneovy-Emdenovy rovnice. Plyne z ní rovněž, že

$$R_* \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}. \quad (381)$$

Vidíme tedy, že pro všechny polytropní modely s $n > 1$ je poloměr hvězdy klesající funkcí její centrální hustoty.

Tlak. Podobně lze odvodit odhad pro tlak; kombinací rovnic (357) a (366) dostáváme

$$P = \frac{\rho \Phi}{n+1}, \quad (382)$$

z čehož vyplývá

$$P = P_c \varphi^{n+1}. \quad (383)$$

Teplota. Z rovnice (337) plyne ihned teplota pro hvězdnou látku

$$T = \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3\mathfrak{R}}{\mu a} \rho \right)^{\frac{1}{3}} = T_c \varphi^{\frac{n}{3}}. \quad (384)$$

V případě odlišné stavové rovnice by byla pochopitelně odlišná také funkce $T(\varphi)$.

Hmota obsažená v kouli. Pro hmotu v kouli o poloměru R_0 můžeme psát s využitím rovnice (378)

$$M_R(R_0) = \int_0^{R_0} 4\pi R^2 \rho \, dR = 4\pi \rho_c \int_0^{R_0} R^2 \varphi^n \, dR, \quad (385)$$

kde R_0 označuje nějakou uvažovanou vzdálenost od středu hvězdy. Pokud provedeme substituci $R = z/\alpha$, dle zavedené transformace (369), vyjde

$$M_R(z_0) = 4\pi \rho_c \frac{R^3}{z^3} \int_0^{z_0} z^2 \varphi^n \, dz, \quad (386)$$

kde z_0 opět představuje hodnotu této proměnné v uvažované vzdálenosti R_0 od centra hvězdy. Integrál na pravé straně ovšem můžeme snadno vyjádřit z Laneovy–Emdenovy rovnice (374), takže dostáváme

$$M_R(z_0) = 4\pi \rho_c R_0^3 \left(-\frac{1}{z_0} \frac{d\varphi(z_0)}{dz} \right). \quad (387)$$

Hmota obsažená v kouli o daném poloměru je tedy dána derivací gravitačního potenciálu v *daném bodě*.

Je přirozeně možné zavést také střední hustotu hvězdy zřejmým vztahem

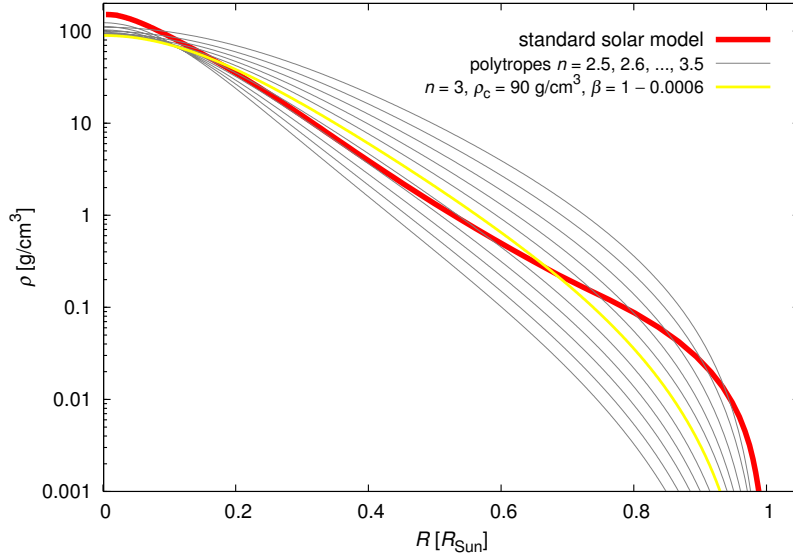
$$\bar{\rho} = \frac{M_*}{\frac{4}{3}\pi R_*^3}, \quad (388)$$

kde hvězdičkou jsou značeny hodnoty veličin odpovídající povrchu hvězdy. Pro celkovou hmotnost hvězdy M_* samozřejmě platí rovnice (387) při $z = z_*$.

Hodnoty z_* , $-z_*^2 \frac{d\varphi(z_*)}{dz}$ a $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}}$ byly pro různé hodnoty polytropního indexu n numericky spočteny a tabulovány, takže pomocí nich bylo možno pro hvězdu o dané hmotnosti M_* a poloměru R_* spočítat její vnitřní strukturu.

Srovnání polytropních modelů se standardním modelem Slunce. Již ze základní fyziky víme, že směs plynu a záření by měla přibližně odpovídat polytropa s $n = 3$ (viz (338)). Potvrzuje to i porovnání jednoduchého polytropního modelu se složitým standardním modelem Slunce (obr. 44). Pokud v polytropním modelu fixujeme poloměr Slunce (místo, kde $\varphi = 0$), vychází z rovnice (380) centrální hustota $\rho_c = 90 \text{ g cm}^{-3}$ (jen o málo menší než přesná hodnota 150 g cm^{-3}). I profily hustoty $\rho(R)$, respektive derivace $\rho'(R)$, v oblasti zóny zářivé rovnováhy si dobře odpovídají.

Co se teploty týče, polytropní model vede k centrální teplotě Slunce 12 milionů Kelvinů, což je slušný odhad vzhledem k současným nejlepším modelům, které udávají $T_c = 15,4 \cdot 10^6 \text{ K}$.



Obrázek 44: Porovnání polytropních modelů se standardním modelem Slunce na profilu hustoty $\rho(R)$. Uvažované hodnoty n jsou od 2,5 do 3,5. V zóně zářivé rovnováhy by standardnímu modelu Slunce nejlépe odpovídala polytropa s $n = 3,15$, $\rho_c = 95 \text{ g/cm}^3$, $\beta = 1 - 0,0006$.

Chandrasekharova mez. Z rovnic (387) a (380) plyne, že

$$M_* \propto \rho_c R_*^3 \propto \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}. \quad (389)$$

Zmínili jsme se již, že jedna polytropa s indexem $n = 3$ odpovídá stavové rovnici relativisticky degenerovaného elektronového plynu. Podle právě uvedené rovnice hmotnost takto konstruované hvězdy nezávisí na centrální hustotě a pro numerické hodnoty odpovídající relativisticky degenerovanému elektronovému plynu vychází

$$\frac{M_*(\text{mezni})}{M_\odot} = \frac{5,836}{\mu_e^2}. \quad (390)$$

To je slavná *Chandrasekharova mez* stability bílých trpaslíků. Všimněme si, že pro kompaktní hvězdy, které již prodělaly nukleární vývoj, můžeme předpokládat $X = 0$ a tedy $\mu_e = 2$, což pro ně dává limitní hmotnost $1,459 M_\odot$.

10 Hvězdný vítr a ztráta hmoty z hvězd

10.1 Základní fakta a úvahy

To, že hvězdné atmosféry nemusí být statické, a že z nich může docházet k úniku hmoty do okolního prostoru, naznačovala existující pozorování delší dobu.

Již Biermann (1951) upozornil na to, že plynné ohony komet, mířící vždy směrem od Slunce, nasvědčují přítomnosti radiálního výtoku plynu ze Slunce do meziplanetárního prostoru, a odhadl výtokové rychlosti na 500 km/s v blízkosti Slunce, urychlující se až k 1 500 km/s ve velkých vzdálenostech od Slunce. Od padesátých let, kdy začaly být vypouštěny sondážní rakety a později i družice a meziplanetární sondy, bylo přímo možné měřit tento tok plynu, *sluneční vítr* — nejprve v okolí Země a posléze i v různých vzdálenostech od Slunce.

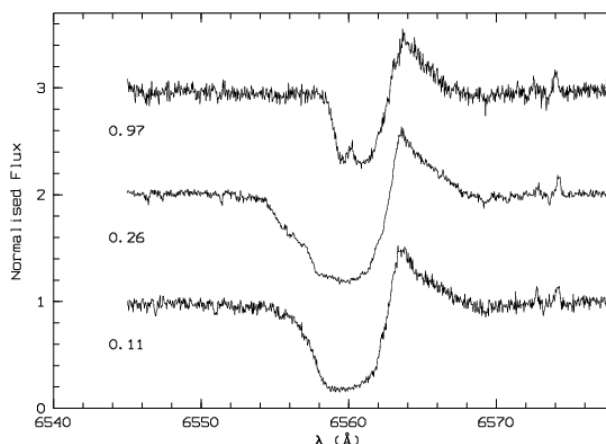
Z měření slunečního větru v blízkosti Země ($r = 1$ AU) plyne koncentrace $n \simeq 10$ částic/cm³ a rychlost $v \simeq 400$ km/s. To odpovídá hustotě $\rho \simeq m_{\text{H}}n = 1,7 \cdot 10^{-20}$ kg/m³ a celkové ztrátě hmoty ze Slunce

$$\frac{dM_{\odot}}{dt} = 4\pi r^2 v \rho \simeq 3 \cdot 10^{-14} M_{\odot}/\text{rok}. \quad (391)$$

Pozorovací důkazy větru u chladných hvězd. Pro obry a veleobry chladnější než G0 byly pozorovány následující jevy:

1. Absorpční čáry vápníku a hořčíku bývají posunuté do fialova vůči rychlosti fotosférických čar, což naznačuje rozpínání materiálu směrem k pozorovateli. U známých spektroskopických dvojhvězd radiální rychlosti těchto čar nesdílejí oběžný pohyb, což přesvědčivě dokazuje jejich *cirkumstelární původ*.
2. Zmíněné chladné hvězdy mají většinou také chromosférické emise čar vápníku a hořčíku, a právě pro hvězdy s cirkumstelárními absorpcemi mají dvojitě emisní složky poměr V/R menší než jedna. Pro tytéž hvězdy se rovněž pozorují cirkumstelární absorpční čáry He I na vlnové délce 1083,0 nm, posunuté do fialova o 150 až 200 km/s.
3. Pro zákrytové dvojhvězdy sestávající z chladného veleobra a horké složky spektrálního typu B (soustavy typu ζ Aur) lze během zákrytů pozorovat, zejména v družicových ultrafialových spektrech, cirkumstelární čáry z obálky veleobra, a v průběhu zákrytu tak studovat strukturu hvězdného větru v různé vzdálenosti od povrchu veleobra.
4. Na spektrech s vysokým rozlišením byly nalezeny čáry z cirkumstelárních obálek veleobrů typu M až do vzdáleností několika tisíců poloměrů veleobra.

Důkazy pro horké hvězdy. Pro horké hvězdy spektrálních tříd O a B o vysoké svítivosti byl únik plynu pozorován nejprve na základě *profilů P Cygni* (nazvaných podle veleobra P Cygni, pro kterého jsou tyto čáry



Obrázek 45: Profil typu P Cygni pozorovaný u spektrální čáry H_{α} objektu IRAS 08544–4431. Převzato z Maas a spol. (2003).

zvláště nápadné; obr. 45). Jde o kombinaci emisní čáry, s radiální rychlostí odpovídající radiální rychlosti hvězdy, a absorpční čáry téhož iontu, která je však posunutá do fialova a má tedy zápornou rychlost.

Takový profil vznikne, když hvězdu obklopuje expandující obálka: emisní složka má původ v horkém řídkém plynu okolo, rozpínajícím se na všechny strany stejně, kdežto dopplerovsky posunutá absorpční čára vzniká v oblasti před hvězdou, kdy je poloprůhledný plyn, letící k pozorovateli, v popředí husté, spojitě zářící fotosféry (obr. 47).

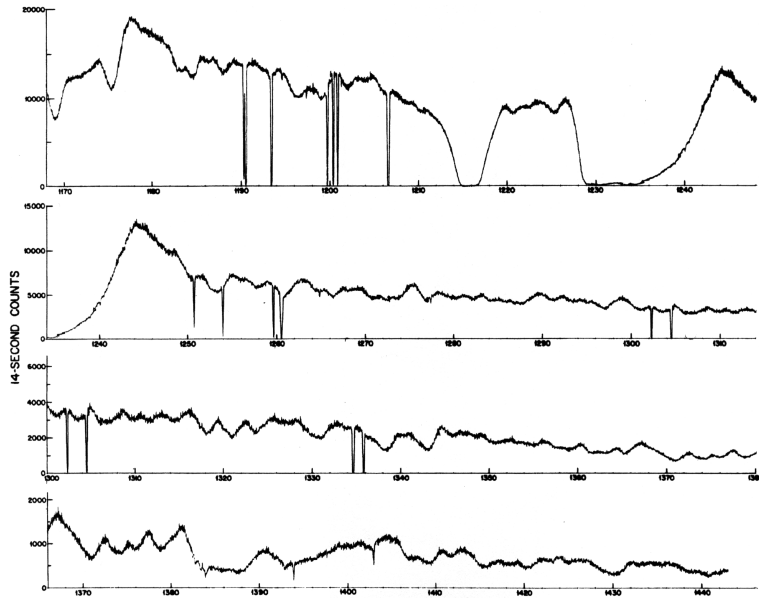
Poté, když byla získána první kvalitní ultrafialová spektra hvězd vně zemské atmosféry, byly u mnoha veleobrů pozorovány výrazné P Cyg profily rezonančních čar iontů jako C IV, Si IV či N V, které měly v některých případech velmi ostře definován fialový okraj absorpce. Ty naznačovaly, že plyn se ve velkých vzdálenostech urychluje až na konečné rychlosti 2 000 až 3 000 km/s. Později bylo zjištěno, že projevy hvězdného větru lze nalézt i u hvězd se závojem (v anglické literatuře Be stars) o nižší svítivosti, t.j. s třídami svítivosti V, IV a III.

Úniková rychlost. Z nebeské mechaniky je známo, že má-li se hmotná částice dostat z nějakého centrálního gravitačního pole do nekonečna, musí být její celková energie kladná

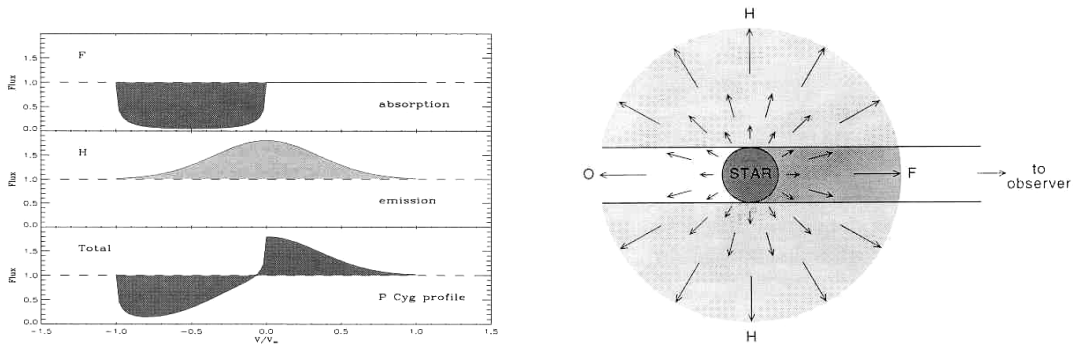
$$E = E_k + E_G = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_*m}{r} \geq 0. \quad (392)$$

Pro únikovou rychlost v_{esc} s povrchu hvězdy o hmotnosti M_* , čili ze vzdálenosti rovníkového poloměru R_{rov} , tedy platí

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_*}{R_{\text{rov}}}}. \quad (393)$$



Obrázek 46: Spektrum hvězdy ζ Puppis v UV oblasti (117 až 144 nm), pořízené družicí Copernicus. Je na něm patrné množství širokých spektrálních čar s charakteristickými profily P Cygni; úzké čáry jsou způsobené absorpcí v mezihvězdném prostředí. Převzato z Morton a Underhill (1977).



Obrázek 47: Vznik profilu P Cygni emisí záření (v oblasti označené H) a dopplerovskými posunutou absorpcí (v oblasti F) v rozpínající se cirkumstelární obálce. Převzato z <http://hven.swarthmore.edu/~cohen/hotstarwinds.html>.

Tabulka 6: Únikové rychlosti v_{esc} podle rovnice (394) na povrchu různých hvězd

hvězda	M_* (M_\odot)	R_{rov} (R_\odot)	v_{esc} (km/s)
Slunce	1,00	1,00	618
O7V	26,0	8,54	1079
O7Ia	28,0	22,9	683
B0V	14,6	5,80	979
B5V	4,36	3,01	743
A0V	2,24	2,09	639
F0V	1,50	1,56	606
G0V	1,16	1,25	595
K0V	0,91	1,01	556
M0V	0,45	0,52	575
M0Ia	15,8	500	110

Pokud hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce, dostaneme rovnici

$$v_{\text{esc}} = 617,61 \text{ km/s} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{rov}}}{R_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (394)$$

Několik odhadů, v jakém rozmezí se pro reálné hvězdy takové únikové rychlosti v blízkosti jejich povrchů mohou pohybovat, je shrnuto v tabulce 6.

10.2 Parkerova teorie větru u chladných hvězd

Nestabilita isotermální atmosféry. V jednorozměrném případě planparalelní atmosféry platí jednoduchá rovnice hydrostatické rovnováhy $dP = -\rho g dz$. Dosazením ze stavové rovnice a formální integrací získáme pro tlak

$$P(z) = P(0) \exp \left[- \int_0^z \frac{\mu m_{\text{H}}}{k T(z)} g dz \right], \quad (395)$$

přičemž integrál musí divergovat, aby exponenciála konvergovala. Pokud ve velké vzdálenosti předpokládáme závislost teploty ve tvaru polynomu $T(z) \propto z^n$, musí být evidentně $n < 1$, aby tato podmínka byla splněna. Izotermální atmosféra ($n = 0$) je stabilní.

Ve třech rozměrech (sférické symetrii) je však situace odlišná. Ve výrazu pro tlak se navíc objeví $\frac{1}{r^2}$ z gravitačního zrychlení

$$P(r) = P(R) \exp \left[- \int_R^r \frac{\mu m_{\text{H}}}{k} \frac{GM_*}{r'^2} dr' \right], \quad (396)$$

takže při obdobné závislosti teploty $T(r) \propto r^n$ vychází podmínka stability $n < -1$. Statická isothermální atmosféra tedy neexistuje! Místo rovnice hydrostatické rovnováhy musíme použít rovnici pohybovou.

Hydrodynamické rovnice. Základy teorie slunečního větru formuloval Parker (1958). Ukázal, že potřebné únikové rychlosti lze dosáhnout řešením hydrodynamických rovnic, jestliže předpokládáme, že k výtoku plynu dochází ze sluneční koróny zahřáté na teplotu 3 000 000 K. Podobný mechanismus můžeme předpokládat i u jiných chladných hvězd, které mají rozsáhlé podpovrchové konvektivní zóny a tedy i chromosféry a koróny.

Pohybová rovnice pro radiálně se rozpínající plyn je

$$m \frac{dv(r, t)}{dt} = - \frac{GM_* m}{r^2} - dPA, \quad (397)$$

kde v označuje rychlost, m hmotnost infinitesimálně tenké kulové vrstvy plynu, A jí příslušnou plochu a M_* hmotnost hvězdy. Dosadíme za $m = A dr \rho$ a získáme

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial r} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_v = - \frac{GM_*}{r^2} - \frac{c_s^2}{\partial \rho} d\rho \frac{A}{A dr \rho}. \quad (398)$$

Budeme-li uvažovat stacionární případ, je časová derivace rychlosti nulová. Rychlost zvuku c_s můžeme pro adiabatický děj, popsaný $P = K \rho^\gamma$, vyjádřit jako

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{K \gamma \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{kT}{\mu m_{\text{H}}}}. \quad (399)$$

Výsledkem je *Bernoulliho rovnice*

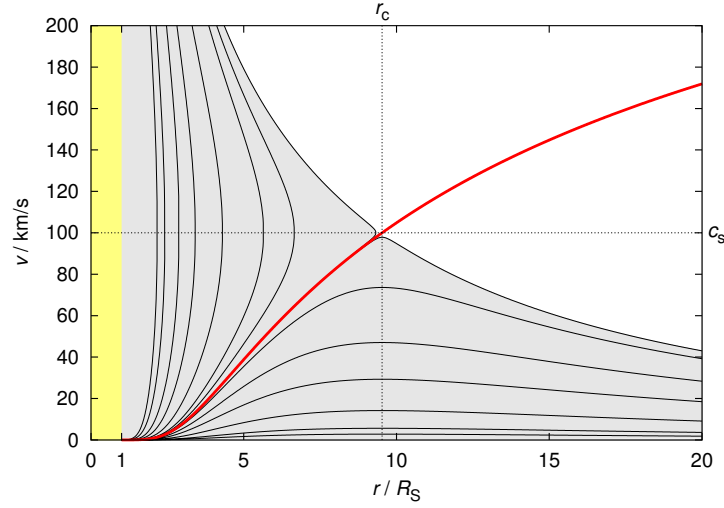
$$v \frac{dv}{dr} + c_s^2 \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0. \quad (400)$$

Závislost hustoty na rychlosti $\rho(v)$ můžeme zjistit z rovnice kontinuity

$$dM = 4\pi r^2 v dt \rho = 4\pi r_0^2 v_0 dt \rho_0, \quad (401)$$

čili

$$\rho = r_0^2 v_0 \rho_0 r^{-2} v^{-1}, \quad (402)$$



Obrázek 48: Numerická řešení Parkerovy rovnice pro hvězdný vítr, závislost rychlosti v na vzdálenosti r . Pohyb začíná na $r_0 = 1 R_\odot$ a malých hodnotách $v_0 \in (0,01; 10)$ m/s. Hodnota rychlosti zvuku byla zvolena konstantní $c_s = 100$ km/s, čili se jedná o isothermální model. Většina řešení (v šedé oblasti) je nezajímavá, neboť končí na malých rychlostech nebo malých vzdálenostech; jinde (v bílé oblasti) žádná řešení neexistují (resp. jde o řešení pro akreci, která začínají na velkých r). Důležité je ovšem *kritické řešení* (červeně) pro $v_0 = 0,21607618855$ m/s, které se vyznačuje překročením rychlosti zvuku c_s přesně v kritické vzdálenosti r_c , kde je funkce $H(r) = 0$. Vede totiž na vítr, tedy urychlení až na $v \simeq 400$ km/s ve velké vzdálenosti $r = 1\,000 R_\odot$.

a tedy

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = r^2 v \left(-2r^{-3} v^{-1} - r^{-2} v^{-2} \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{2}{r} - \frac{1}{v} \frac{dv}{dr}. \quad (403)$$

Po dosazení do (400) získáme *Parkerovu rovnici*

$$v \frac{dv}{dr} \left(1 - \frac{c_s^2}{v^2} \right) - \frac{2c_s^2}{r} + \frac{GM_*}{r^2} = 0, \quad (404)$$

což je diferenciální rovnice 1. řádu pro funkci $v(r)$. Její numerické řešení²⁷ vidíme na obrázku 48.

10.3 CAK teorie hvězdného větru řízeného zářením

Horké hvězdy mají jen velmi malé podpovrchové konvektivní zóny a proto u nich existence horkých korón není příliš pravděpodobná. I kdyby však koróny z nějaké dosud neznámé příčiny měly, Parkerův mechanismus vzniku slunečního větru by nebyl pro horké hvězdy použitelný. Jak upozornili Lucy a Solomon

²⁷ Asi nejjednodušší je vyjádřit derivaci rychlosti $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v(1-c_s^2/v^2)} \left(\frac{2c_s}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \right)$, uvážit počáteční podmínky $v_0 \doteq 0$ na $r_0 = 1,01 R_\odot$ a provést Eulerovu integraci $v_{i+1} = v_i + \frac{dv}{dt} \Delta r$, $r_{i+1} = r_i + \Delta r$. Pouze je třeba ošetřit singularitu při $v = c_s$.

(1970), k dosažení pozorovaných rychlostí hvězdného větru horkých hvězd (2 000 až 3 000 km s⁻¹) by v hypotetické koróně musely panovat teploty řádu 10 miliónů K, při kterých by ionty C IV, Si IV či N V musely dávno zaniknout v důsledku srážkové excitace.

Lucy a Solomon (1970) proto navrhli jiný mechanismus: vznik hvězdného větru působeného mechanickou silou v důsledku *selektivní absorpce záření v silných rezonančních čarách*. Jejich myšlenka byla zásadním způsobem vylepšena v klíčové práci Castora, Abbota a Kleina (1975), kteří ukázali, že síla, způsobující únik plynu z atmosfér horkých hvězd, vzniká díky selektivní absorpci *velkým množstvím spektrálních čar v ultrafialové oblasti*, ne pouze díky čarám rezonančním. Podařilo se jim ukázat, že výsledná síla vede na ztrátu hmoty, která je stokrát vyšší, než podle výpočtu Lucyho a Solomona (1970). Jejich práce se záhy stala klasickou prací v oboru a dnes lze často nalézt odkazy na standardní CAK teorii hvězdného větru řízeného zářením.

Naznačme si nyní, jak se hvězdný vítr modeluje. V zásadě jde o řešení hydrodynamických rovnic. První je zmiňovaná rovnice kontinuity, která je přímo časovou derivací rovnice (88),

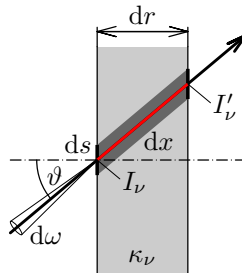
$$\frac{dM}{dt} = 4\pi r^2 \rho v, \quad (405)$$

kde \dot{M} je tok hmoty povrchem koule o poloměru r , nazývaný často rychlostí ztráty hmoty hvězdným větrem, a v je rychlost radiálního pohybu plynu ve vzdálenosti r od centra hvězdy.

Druhá rovnice je pohybová (hydrodynamická), obdobná jako (91), do níž je ale potřeba kromě gravitačního zrychlení a gradientu tlaku dosadit i zrychlení g_r působené tlakem záření

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_*}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP_g}{dr} + g_r. \quad (406)$$

Mechanická síla záření. Uvažme, jakou mechanickou silou působí záření o intenzitě I_ν na tenkou vrstvu plynu o tloušťce dr , na kterou dopadá pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $d\omega$ (obr. 49).



Obrázek 49: Vrstva plynu o tloušťce dr a opacitě κ_ν , do které vstupuje záření o intenzitě I_ν a vystupuje z ní záření o intenzitě I'_ν .

Z definice intenzity plyne, že energie záření E_ν procházející ploškou ds pod úhlem ϑ z prostorového úhlu $d\omega$ v intervalu frekvencí $d\nu$ za čas dt je v místě vstupu (a v místě výstupu)

$$E_\nu = I_\nu ds \cos \vartheta d\omega d\nu dt, \quad (407)$$

$$E'_\nu = I'_\nu ds \cos \vartheta d\omega d\nu dt. \quad (408)$$

Podle rovnice přenosu záření se při průchodu dráhou $dx = \frac{dr}{\cos \vartheta}$ pohltí energie

$$E'_\nu - E_\nu \equiv dE_\nu = \kappa_\nu \rho E_\nu dx = \kappa_\nu \rho I_\nu \overbrace{ds \cos \vartheta \frac{dr}{\cos \vartheta}}^{dV} d\omega d\nu dt = \kappa_\nu \rho I_\nu dV d\omega d\nu dt, \quad (409)$$

kde κ_ν označuje koeficient opacity v daném frekvenčním intervalu. Jak víme již z rovnice (174), je hybnost záření rovna

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c}, \quad (410)$$

kde c je rychlost světla. Mechanická síla působící *kolmo* na uvažovanou tenkou vrstvu bude dána změnou této hybnosti

$$df_{r,\nu} = \frac{dp_\nu}{dt} \cos \vartheta \quad (411)$$

Celkovou mechanickou sílu získáme integrací přes celý prostorový úhel:

$$\begin{aligned} f_{r,\nu} &= \int_{\omega=0}^{4\pi} df_{r,\nu} = \int_0^{4\pi} \frac{1}{c} \frac{dE_\nu}{dt} \cos \vartheta = \frac{1}{c} \int_0^{4\pi} \frac{1}{dt} \kappa_\nu \rho E_\nu \frac{dr}{\cos \vartheta} \cos \vartheta = \\ &= \frac{1}{c} \kappa_\nu \rho \int_0^{4\pi} \frac{1}{dt} I_\nu ds \cos \vartheta d\omega d\nu dt dr = \frac{1}{c} \kappa_\nu \rho ds d\nu dr \overbrace{\int_0^{4\pi} I_\nu \cos \vartheta d\omega}^{H_\nu} = \\ &= \frac{1}{c} \overbrace{\kappa_\nu \rho dr}^{d\tau_\nu} ds d\nu H_\nu = \frac{1}{c} ds d\nu d\tau_\nu H_\nu \end{aligned} \quad (412)$$

kde H_ν je celkový monochromatický tok²⁸ záření v daném místě (a někdy se zavádí τ_ν , jakožto optická tloušťka). Pro záření všech frekvencí máme

$$f_r = \int_{\nu=0}^{\infty} f_{r,\nu} = \frac{1}{c} \rho ds dr \int_0^{\infty} \kappa_\nu H_\nu d\nu. \quad (413)$$

Příslušné zrychlení vrstvy je

$$g_r = \frac{f_r}{dm} = \frac{f_r}{ds dr \rho} = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \kappa_\nu H_\nu d\nu. \quad (414)$$

²⁸Pozor, v mnoha pracech bývá místo celkového monochromatického toku H_ν používán tok F_ν , který je definován vztahem $H_\nu = \pi F_\nu$.

Poznámka nakonec odvození: mechanická síla na absorbující vrstvu (charakterizovanou dr a κ_ν) je něco jiného než tlak záření (176) (působící na plošku ds)!

Lucy a Solomon (1970) ukázali, že absorpce záření v rezonančních čarách ve vlnových délkách v blízkosti maxima zářivého toku je dostatečná k tomu, aby výsledné zrychlení (406) bylo *kladné*. Atmosféra pak není statická a musí docházet k úniku hmoty. Celá věc je ještě usnadňována tím, že jakmile se nějaká vrstva plynu dá do pohybu, budou ionty v ní díky *Dopplerovu posuvu* pohlcovat záření na vyšších frekvencích než v klidovém stavu, tedy záření, které předtím pohlcováno být nemuselo.

Castor, Abbot a Klein (1975) řešením pohybové rovnice se započtením absorpce v mnoha čarách v UV oblasti zjistili, že v nadzvukové oblasti je poměr zrychlení úniku plynu ke gravitačnímu zrychlení téměř konstantní, asi 1,5. Tím vysvětlují, proč lze rychlost plynu popisovat empirickou formulí

$$v(r) \doteq v_\infty \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta, \quad (415)$$

kteřou užíval již Chandrasekhar ve třicátých letech. Parametr β udávají roven $\frac{1}{2}$, různí autoři jej ale volí různě. Rychlost v nekonečnu v_∞ musí převyšovat rychlost únikovou. Spočetli rovněž, že např. pro hvězdu hlavní posloupnosti spektrálního typu O5 činí rychlost ztráty hmoty $6 \cdot 10^{-6} M_\odot$ ročně.

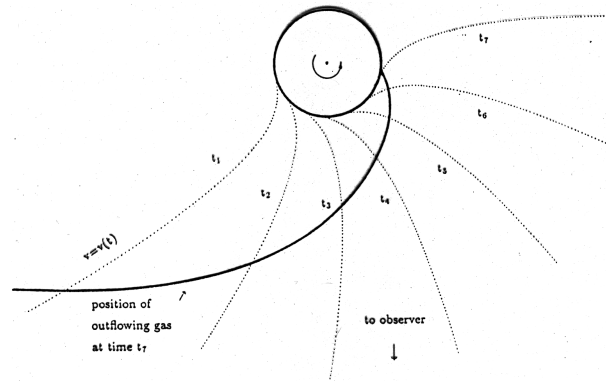
Vliv metalicity na vítr. Je dobré si uvědomit, co vše nám rovnice (414) říká. Pokud budeme uvažovat hvězdy, které vznikaly v období, kdy mezihvězdná látka obsahovala jen malé procento těžších prvků (například typický obsah těžších prvků v Malém Magellanově mračnu se odhaduje na $Z = 0,004$), budou podmínky pro vznik silného hvězdného větru podstatně *horší*, neboť atmosféra takových hvězd bude obsahovat téměř výlučně jen nepočtené absorpční čáry vodíku a helia (κ_ν je nízké).

Časová modulace hvězdného větru. V nedávné době byla rozpracována teorie hvězdného větru soustředěvaného rotací směrem k rovníku hvězdy. Bjorkman a Cassinelli se pomocí této teorie snažili vysvětlovat vznik hvězd se závojem. Rovněž existují pozorování, že hvězdný vítr není rovnoměrný proud hmoty, existují náznaky modulace s rotační periodou (viz obr. 50 až 52). Na tuto možnost upozorňovali např. Mullan (1984) či Harmanec (1991), pozorováním byla podobná modulace poprvé doložena Owockim a spol. (1995) a hydrodynamický model cirkumstelárních korotujících struktur byl publikován v práci Cranmer a Owocki (1996).

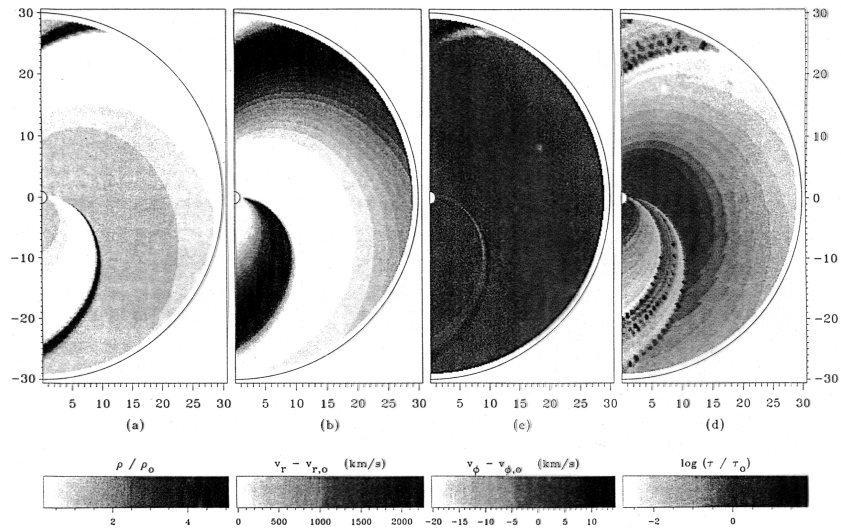
10.4 Vliv hvězdného větru na vývoj hvězd

Parametrický popis větru. Reimers (1975) odvodil ze spektroskopických pozorování červených obrů empirický vztah pro ztrátu hmoty (obr. 53)

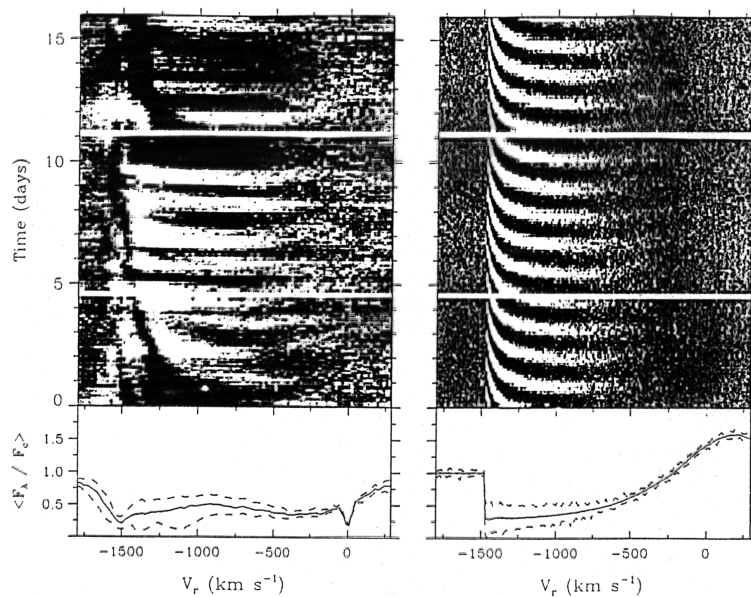
$$\frac{dM}{dt} \doteq \eta_w \cdot 4 \cdot 10^{-13} M_\odot/\text{rok} \frac{R}{R_\odot} \frac{L}{L_\odot} \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^{-1}, \quad (416)$$



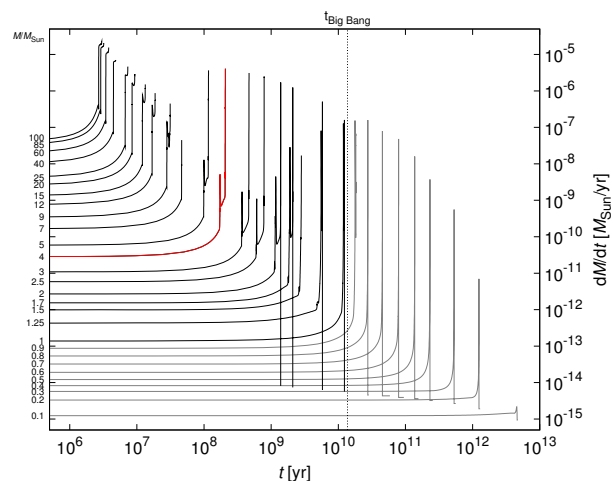
Obrázek 50: Trajektorie, kterou zaujímají částice vyvrhované z určitého místa na povrchu rotující hvězdy (pohled ve směru rotační osy). Při pozorování spekter (pozorovatelem v rovině rovníku) se objeví modulace intenzity a profilů čar s rotační periodou hvězdy.



Obrázek 51: Hydrodynamická simulace struktury hvězdného větru (korotující interakční oblasti, CIR), která je ve stacionárním stavu. Šedou škálou je znázorněny normalizované hodnoty: (a) hustoty, (b) radiální složky rychlosti, (c) azimutální složky rychlosti a (d) radiální Sobolevovy optické tloušťky. Převzato z Cranmer a Owocki (1996).



Obrázek 52: Vlevo: série spekter hvězdy HD 64760 pořízených v čáře SiIV ($\lambda = 139,4$ nm). Na vodorovné ose je dopplerovská rychlost, na svislé čas, monochromatický tok je zobrazen stupněm šedi. Dole je spočtený průměrný profil čáry (plnou čarou) a maximální odchylky (čárkovaně). Vpravo: analogický graf pro modelový výpočet, ve kterém autoři předpokládali zhuštění hvězdného větru, buzené neradiálními pulzacemi hvězdy. Převzato z Owocki a spol. (1995).



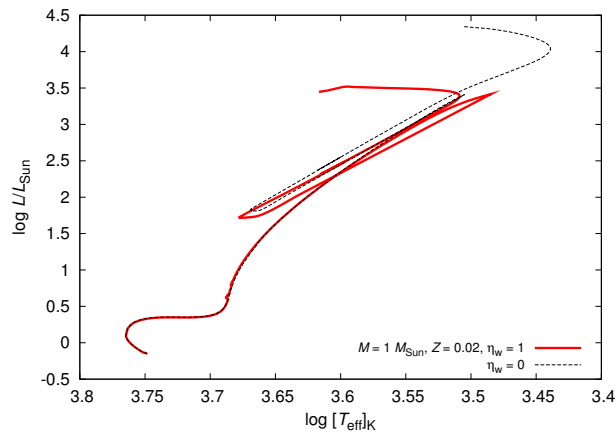
Obrázek 53: Ztráta hmoty dM/dt Reimersovým větrem (úměrná zářivému výkonu L) v závislosti na čase, pro hvězdy s hmotnostmi 0,1 až $100 M_{\odot}$. Výpočet programem EZ.

v němž jsme ještě doplnili účinnost η_w , kterou můžeme považovat za volný parametr. Tento Reimersův vítr není samozřejmě použitelný univerzálně pro všechny typy hvězd ve všech fázích vývoje. Například u Slunce je skutečně pozorovaný vítr asi 20 krát méně efektivní.

Vliv větru. Hvězdy ztrácející hmotu větrem se chovají jako hvězdy s nižší hmotností. Během vývoje na hlavní posloupnosti je však vliv nepatrný; vždyť Slunce za dobu své existence ztratilo jen 0,01 % své hmotnosti. U červených obrů můžeme při započtení větru zjistit menší zářivý výkon (obr. 54). Ve výsledku vede vítr k malému prodloužení doby života. (Příliš velká ztráta hmoty by však naopak mohla vést k dřívějšímu ukončení nukleárního vývoje, protože v nitru nenastanou podmínky pro zažehnutí pozdějších reakcí.)

Velký význam má vítr v závěrečných fázích vývoje, například pro hvězdy na asymptotické větvi obrů (AGB) jsou pozorované ztráty hmoty až $\dot{M} \gtrsim 10^{-3} M_{\odot}/\text{rok}$, při poměrně malé rychlosti $v \simeq 10 \text{ km/s}$. Tento *supervítr* (angl. superwind) je pravděpodobně buzen *tlakem záření na prachové částice*, uhlíkaté nebo silikátové, které běžně kondenzují v rozsáhlých obálkách obřích hvězd (Lagadec a Zijlstra 2008).

Hvězdný vítr významně přispívá k obohacení mezihvězdného prostředí těžšími prvky, a postupně tak zvyšuje metalicitu mezihvězdné látky. Vítr je pravděpodobně vydatnějším zdrojem než exploze supernov.



Obrázek 54: Vliv započtení hvězdného větru na vývoj hvězdy ($M = 1 M_{\odot}$) v H–R diagramu. Účinnost větru byla zvolena $\eta_w = 1$. Výpočet programem EZ.

11 Vliv rotace

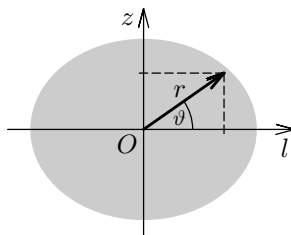
11.1 Rocheův model a jednoduché odhady

Hrubý odhad vlivu rotace na rozměry hvězdy poskytuje Rocheův model. Je založen na předpokladu, že všechna hmota hvězdy je soustředěna ve hmotném bodu v jejím centru, a na předpokladu tuhé rotace s úhlovou rychlostí ω . Z hlediska povrchových vrstev je tento předpoklad u reálných hvězd docela dobře splněn. (Vnitřní stavba takové hvězdy by se vlastně měla podobat polytropě s indexem $n \geq 5$, která se rozprostírá do nekonečna nebo jinými slovy je velmi koncentrovaná ke středu.)

Rotující hvězdu budeme popisovat v *neinerciální* soustavě korotující s hvězdou, s válcovými souřadnicemi l, z . Osa z je identická s osou rotace, a druhá souřadnice l odpovídá kolmé vzdálenosti od rotační osy (obr. 55). Na částici v atmosféře hvězdy působí jednak gravitační zrychlení $a_g = -GM_*r^{-2}$, kde $r^2 = l^2 + z^2$, jednak odstředivé $a_o = \omega^2 l$. Jejich působení popíšeme celkovým potenciálem ($\mathbf{a} = \nabla\Psi$)

$$\Psi = \frac{GM_*}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2. \quad (417)$$

Ekvipotenciální plochy jsou zároveň plochami konstantní hustoty, takže rotující hvězda bude zaujímat tvar některé konkrétní ekvipotenciální plochy.



Obrázek 55: Zavedení válcových souřadnic (l, z) pro výpočet gravitačního potenciálu rotující hvězdy.

Zkoumejme, jaké budou vlastnosti *kritické plochy*, pro niž bude někde výslednice přitažlivé a odstředivé síly nulová. Podmínkou pro to je nulový gradient potenciálu ($\nabla\Psi = 0$). Konkrétně dostáváme

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z} = -\frac{1}{2}GM_*(l^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}2z = -GM_*r^{-3}z = 0, \quad (418)$$

což je zřejmě splněno všude v rovině rovníku hvězdy, t.j. pro $z = 0$, a

$$\frac{\partial\Psi}{\partial l} = -GM_*(l^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}l + \omega^2 l = 0. \quad (419)$$

Protože $z = 0$, je tato druhá podmínka splněna pro l_0 , pro něž platí

$$GM_*(l_0^2)^{-\frac{3}{2}} = \omega^2, \quad (420)$$

čili

$$l_0 = \sqrt[3]{\frac{GM_*}{\omega^2}}. \quad (421)$$

Hodnota kritického potenciálu je tedy

$$\Psi_{\text{crit}} = \frac{GM_*}{l_0} + \frac{1}{2}\omega^2 l_0^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \quad (422)$$

Kritická ekvipotenciála $\Psi = \Psi_{\text{crit}}$ je množinou bodů (l, z) , pro něž platí

$$\frac{\omega^2 l_0^3}{\sqrt{l^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\omega^2 l^2 = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \quad (423)$$

Můžeme ještě zjistit hodnotu *polárního poloměru* takové kriticky rotující hvězdy z_{pol} , jestliže položíme $l = 0$

$$\frac{\omega^2 l_0^3}{z_{\text{pol}}} = \frac{3}{2}\omega^2 l_0^2. \quad (424)$$

Dostáváme

$$z_{\text{pol}} = \frac{2}{3}l_0 \quad (425)$$

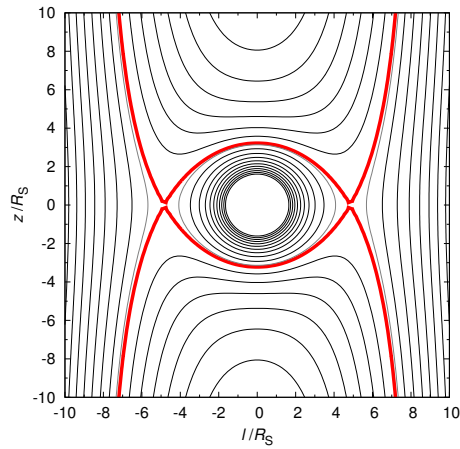
a vidíme, že hvězda rotující na mezi své dynamické stability má rovníkový poloměr o polovinu větší než poloměr polární. Tvar ekvipotenciál je znázorněn na obrázku 56 a příklad hvězdy rotující blízko kritické meze uvádíme na obrázku 57.

Odhady poloměrů hvězd. Rotační zploštění může mít vliv na odhady poloměrů hvězd z jejich hvězdné velikosti. Pokud bychom pozorovali hvězdu rotující v blízkosti kritické rotační rychlosti zhruba od pólu rotace, budeme vidět v zásadě její rovníkový poloměr. Pokud však pozorujeme hvězdu zhruba v rovině jejího rovníku, můžeme průmět zářící plochy v prvním přiblížení aproximovat plochou elipsy s velkou poloosou rovnou rovníkovému, a malou polárnímu poloměru hvězdy. Pro efektivní poloměr R_{eff} tak dostáváme

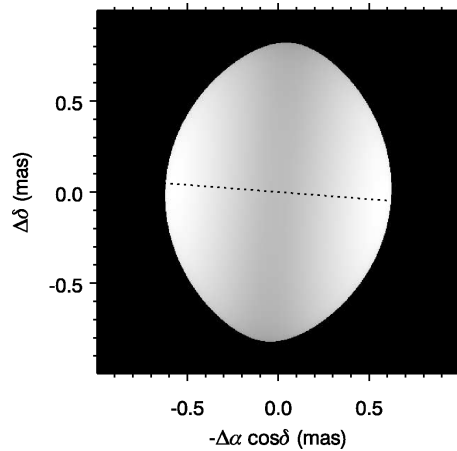
$$\pi R_{\text{eff}}^2 = \pi ab = \frac{3}{2}\pi R_{\text{pol}}^2, \quad (426)$$

neboli

$$R_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{3}{2}} R_{\text{pol}} \doteq 1,225 R_{\text{pol}}. \quad (427)$$



Obrázek 56: Ekvipotenciály rocheovského potenciálu $\Psi(l, z)$ rotující hvězdy o hmotnosti $M = 3,5 M_{\odot}$ a rotační periodě $P = 15,9$ h. Červeně je vyznačena kritická hodnota potenciálu Ψ_{crit} , čili maximální rozměr, jaký hvězda může zaujmout, aby byla ještě stabilní. Tence je nakreslena ekvipotenciála $\Psi = 1,028 \Psi_{\text{crit}}$, přibližně odpovídající hvězdě Regulus.



Obrázek 57: Rekonstruovaný obraz hvězdy Regulus (α Leo) získaný interferometrem CHARA ve filtru K . Při své hmotnosti $3,5 M_{\odot}$, periodě $15,9$ h a poloměru rotuje hvězda blízko meze stability. Zřetelné je také ztemnění rovníku oproti pólům, způsobené rozdílným gravitačním potenciálem a tedy i teplotou. Převzato z McAlister a spol. (2005).

Minimální rotační perioda. Uvedme si v té souvislosti několik užitečných základních vztahů, které se hodí pro podobné odhady. U rotujících hvězd se můžeme setkat s projevy rychlé proměnnosti jasnosti nebo profilů spektrálních čar. Může se stát, že si budeme chtít učinit představu, v jakém rozmezí se může nalézat rotační perioda rotující hvězdy. Označíme-li v rovníkovou rotační rychlost hvězdy, R_{rov} její rovníkový poloměr a P_{rot} její rotační periodu, platí zřejmě

$$v = \frac{2\pi R_{\text{rov}}}{P_{\text{rot}}}. \quad (428)$$

Bývá zvykem vyjadřovat obvodovou rotační rychlost v km s^{-1} , rotační periodu ve dnech a poloměry hvězd v jednotkách slunečního poloměru. Pro sluneční poloměr můžeme přijmout hodnotu

$$R_{\odot} = 6,95508 \cdot 10^8 \text{ m}, \quad (429)$$

a dostáváme užitečnou pracovní rovnici

$$v = 50,57877 \text{ km/s} \frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}} \frac{1}{[P_{\text{rot}}]_{\text{d}}}. \quad (430)$$

Žádná hvězda nemůže rotovat rychleji, než kritickou rychlostí v_{crit} , při které se přitažlivé a odstředivé zrychlení vyrovnávají (nazývá se též Keplerova či oběžná rychlost)

$$\frac{GM_*}{R_{\text{rov}}^2} = \frac{v_{\text{crit}}^2}{R_{\text{rov}}}, \quad (431)$$

což vede na vztah

$$v_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{GM_*}{R_{\text{rov}}}}. \quad (432)$$

Pokud opět hmotnost a rovníkový poloměr hvězdy budeme vyjadřovat v jednotkách hmotnosti a poloměru Slunce a použijeme-li moderní hodnoty z práce Gundlach a Merkowitz (2000)

$$M_{\odot} = (1,988435 \pm 0,000027) \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad (433)$$

$$G = (6,674215 \pm 0,000092) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (434)$$

bude

$$v_{\text{crit}} = 436,822 \text{ km/s} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (435)$$

Kombinací vztahů (430) a (435) dostáváme odhad minimální možné rotační periody ve tvaru

$$P_{\text{min}} = \frac{2\pi R_{\text{rov}}}{v_{\text{crit}}} \doteq 0,11587 \text{ d} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}}\right)^{\frac{3}{2}} \doteq 0,21287 \text{ d} \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_{\text{pol}}}{R_{\odot}}\right)^{\frac{3}{2}}. \quad (436)$$

Maximální rotační perioda. Pro konkrétní hvězdy ve většině případů neznáme sklon jejich rotační osy vůči nám, z rotačního rozšíření profilů spektrálních čar proto určíme pouze projekci rotační rychlosti $v \sin i \leq v$, tedy hodnotu, která je menší než skutečná rovníková rotační rychlost nebo je jí nanejvýš rovna. Proto můžeme pro hvězdu se změřenou promítnutou rotační rychlostí $v \sin i$ — máme-li představu o jejím poloměru — odhadnout i *maximální* možnou rotační periodu s použitím vztahu (430):

$$P_{\max} = \frac{2\pi R_{\text{rov}}}{v \sin i} \doteq 50,57877 \text{ d} \frac{R_{\text{rov}}}{R_{\odot}} \frac{1}{[v \sin i]_{\text{km/s}}}. \quad (437)$$

Je ovšem třeba upozornit na jednu okolnost. Pokud se nějakým vnějším vlivem vytvoří v blízkosti rovníku hvězdy, která rotuje hluboko pod kritickou rotační rychlostí a je prakticky sférická, cirkumstelární plynová obálka (např. akreční disk ve dvojhvězdě), může být perioda rotace případných struktur v takové obálce kratší, než by plynulo z aplikace vztahů (436). Odhad minimální periody v takových případech dostaneme, jestliže do vztahu (436) dosadíme za rovníkový poloměr skutečný sférický poloměr hvězdy.

11.2 Modely hvězdného vývoje se započtením rotace

Rotace může ovlivnit stavbu hvězdy v několika směrech:

1. Odstředivá síla všude mimo rotační osu hvězdy *snižuje efektivní gravitaci*.
2. Protože vektor odstředivé síly není mimo rovník hvězdy rovnoběžný s vektorem síly přitažlivé, dojde k *narušení sférické symetrie* — ekvipotenciály přestávají být kulové, jak jsme to již diskutovali výše pro limitní případ Rocheova modelu.
3. Protože se zářivý tok H mění s gravitačním zrychlením v tom kterém místě, není konstantní na daném ekvipotenciálním povrchu, což může změnit podmínky vzniku konvektivní rovnováhy.
4. Rotace může *ovlivňovat konvekci* několika dalšími způsoby: jednak může působit proti konvektivním pohybům, jednak může — v důsledku přerozdělování momentu hybnosti — určité konvektivní pohyby vyvolat i v oblastech zářivé rovnováhy (v důsledku diferenciální rotace, meridionální cirkulace).
5. Rotace způsobí i *meridionální cirkulaci*, která vede na *diferenciální rotaci*, ta vyvolá ‘stříh’ a efektivní promíchávání hvězdného materiálu. To vše ovlivní přerozdělování úhlového momentu hybnosti a obecně způsobí, že rotační rychlost v různých částech hvězdy nebude odpovídat konservativnímu případu, t.j. odstředivá síla nebude mít potenciál.

Naprostá většina badatelů, zabývajících se modelováním vývoje hvězd se započtením rotace, se ovšem zatím omezila na (vnitřně fyzikálně nekonsistentní) případy, kdy lze odstředivou sílu potenciálem popsat. Při obecné formulaci se obvykle vychází z *vektorového tvaru* základních rovnic.

Vektorový tvar rovnic stavby. Pro silové pole se uvažuje obecný gravitační potenciál a potenciál rotace, jak byl popsán dříve (viz vztah (417)). Rovnici hydrostatické rovnováhy lze pak zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla \Phi + \omega^2 \mathbf{l} = -\nabla \Psi, \quad (438)$$

kde Φ označuje (záporný) gravitační potenciál, Ψ je celkový potenciál, ω je úhlová rotační rychlost kolem osy z a vektor l míří kolmo na osu rotace a jeho délka je rovna kolmé vzdálenosti uvažovaného místa od osy z .

Rovnici kontinuity nahradí *Poissonova rovnice* ve tvaru

$$\Delta \Phi \equiv \text{div}(\nabla \Phi) = 4\pi G \rho. \quad (439)$$

Místo veličiny L_R je výhodnější uvažovat vektorový tok záření jednotkovou plochou \mathbf{H} a rovnicí zářivého přenosu energie můžeme pak psát ve tvaru

$$\nabla T = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \mathbf{H}. \quad (440)$$

Rovnice tepelné rovnováhy nabude tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \epsilon\rho, \quad (441)$$

kde ϵ představuje veškerý uvolňovaný měrný výkon.

Dá se ukázat (viz např. Schwarzschild 1958), že pro rotační zákony, pro něž úhlová rychlost rotace závisí pouze na vzdálenosti od osy rotace z , jsou všechny fyzikální veličiny konstantní podél každé ekvipotenciální plochy. Pro případ tuhé rotace lze pro celkový potenciál psát

$$\Psi(R, \vartheta) = \Phi(R, \vartheta) - \frac{1}{2}\omega^2(R \sin \vartheta)^2 = \Phi(R, \vartheta) - \frac{1}{3}\omega^2 R^2 [1 - P_2(\cos \vartheta)], \quad (442)$$

kde

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \quad (443)$$

je Legendrův polynom druhého stupně (nejedná se o žádný rozvoj, pouze přepis $\sin^2 \vartheta$). Lze definovat jakýsi střední poloměr každé ekvipotenciální plochy R_0 jako poloměr ve směru $\vartheta = \vartheta_0$, pro který je $P_2(\cos \vartheta_0) = 0$. To je splněno pro $\vartheta \simeq 55^\circ$.

Různé modely rotujících hvězd. Jak si jako první uvědomili Faulkner, Roxburgh a Strittmatter (1968), je v takovém případě možné napsat pro poloměr R_0 rovnice formálně velmi podobné rovnicím pro případ nerotující hvězdy.

Jiný postup zvolili Kippenhahn a spol. (1970). Vyšli z toho, že rotace ovlivňuje hvězdu dvojím způsobem: (i) působí proti gravitaci spolu s gradientem tlaku, a (ii) způsobuje rotační zploštění hvězdy. Oni se rozhodli

zploštění ignorovat. Předpokládali rovněž sférickou symetrii úhlové rychlosti, tedy $\omega = \omega(R)$. Vzhledem k rotační symetrii lze pro *radiální složku* odstředivé síly působící na element slupky (pod úhlem ϑ) psát

$$dF_o = \omega^2 l \sin \vartheta dm_R = \omega^2 R \sin^2 \vartheta dm_R, \quad (444)$$

kam za hmotnost elementu dosadíme

$$dm_R = \frac{dM_R}{4\pi R^2} R d\vartheta R \sin \vartheta d\varphi. \quad (445)$$

Integrováním přes celý prostorový úhel ω získáme střední hodnotu radiální složky odstředivé síly působící na celou slupku o hmotnosti dM_R

$$\bar{F}_o = \int_{\omega} dF_o = \int_{\varphi} \int_{\vartheta} \omega^2 R \frac{dM_R}{4\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \overbrace{d\varphi}^{2\pi} = \omega^2 R \frac{dM_R}{4\pi} 2\pi \overbrace{\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta}^{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \omega^2 R dM_R. \quad (446)$$

Na plošnou jednotku povrchu koule o poloměru R působí tedy radiálně odstředivá síla

$$\frac{1}{4\pi R^2} \bar{F}_o = \frac{\omega^2}{6\pi R} dM_R \quad (447)$$

a příslušná rovnice hydrostatické rovnováhy nabude tvar

$$\frac{dP}{dM_R} = -\frac{GM_R}{4\pi R^4} + \frac{\omega^2}{6\pi R}. \quad (448)$$

To je třeba vzít v potaz i v rovnici konvektivní rovnováhy.

Jejich metodu převzali a ještě zdokonalili Endal a Sofia (1976). Předpokládali opět, že místy stejné teploty, tlaku a hustoty jsou ekvipotenciální plochy a jako nezávisle proměnnou zvolili veličinu M_{Ψ} , t.j. hmotu obsaženou uvnitř ekvipotenciální plochy s hodnotou celkového potenciálu Ψ . Místo poloměru R zavedli jakýsi efektivní poloměr ekvipotenciální plochy R_{Ψ} vztahem

$$V_{\Psi} = \frac{4}{3}\pi R_{\Psi}^3, \quad (449)$$

kde V_{Ψ} je objem příslušné ekvipotenciální plochy. To jim umožnilo psát rovnici zachování hmoty ve tvaru

$$dM_{\Psi} = \rho dV_{\Psi} = 4\pi R_{\Psi}^2 \rho dR_{\Psi}, \quad (450)$$

a tedy

$$\frac{dR_{\Psi}}{dM_{\Psi}} = \frac{1}{4\pi R_{\Psi}^2 \rho}, \quad (451)$$

což je rovnice formálně stejná, jako pro případ nerotující hvězdy. Hodnoty všech veličin, které se na ekvipotenciálním povrchu nezachovávají, středovali integrací přes povrch ekvipotenciální plochy.

Asi od druhé poloviny devadesátých let 20. století se studiu vývoje rotujících hvězd soustavně věnuje ženevská skupina kolem prof. Maedera. Základy jejich přístupu jsou popsány v práci Meyneta a Maedera (1997). Tito autoři upozornili na problém *nekonservativnosti rotace*. Aby i přesto mohli celý problém pojednat jako jednorozměrný, předpokládali, že diferenciální rotace má takový charakter, že úhlová rychlost rotace ω je konstantní na *isobarách* — plochách konstantního tlaku. To vcelku dobře odpovídá existujícím studiím turbulence u Slunce i u jiných hvězd. V literatuře se takový charakter rotace nazývá *obálková rotace* (angl. shellular rotation). Pro menší rotační rychlosti lze takovou rotaci dobře aproximovat vztahem $\omega = \omega(R)$, který předpokládali již Kippenhahn a spol. (1970). Meynet a Maeder (1997) ukázali, že v takovém případě lze využít výše naznačený postup s tím, že místo ekvipotenciálních ploch se uvažují isobary, a odvodili příslušný tvar rovnic. Další studie rotace hvězd jsou popsány v pokračující sérii prací (Meynet a Maeder 1997, 2000, Maeder 1997, 1999, Maeder a Meynet 2000b, Maeder a Zahn 1998) a shrnuty v práci Maeder a Meynet (2000a).

Dosud jediné experimentální dvourozměrné modely vývoje rotujících hvězd publikovali Shindo a spol. (1997) pro hvězdu o hmotnosti $18 M_{\odot}$ a pro heliovou hvězdu o hmotnosti $5 M_{\odot}$.

Je ovšem třeba říci, že všechny tyto studie je třeba považovat za předběžné. Porovnávání výsledků se skutečně pozorovanými hvězdami je proto třeba činit s patřičnou rezervou, neboť obecný problém v alespoň dvourozměrném (rotačně symetrickém popisu) nebyl ještě zdaleka vyřešen.

11.3 Některé výsledky vývoje rotujících hvězd

Sackmann a Anand (1970) spočítali modely rotujících hvězd hlavní posloupnosti o hmotnostech mezi 5 a $10 M_{\odot}$ a vývoj rotující hvězdy o hmotnosti $10 M_{\odot}$ za předpokladu *tuhé rotace* ($\omega(R) = \text{konst.}$) a *zachování celkového momentu hybnosti* ($\mathcal{L} = \text{konst.}$). Při výpočtu vývoje hvězdy tedy měnili model od modelu úhlovou rychlost rotace $\omega(t)$ (kterou podle předpokladu zachovávali pro daný čas konstantní v celém nitru hvězdy) tak, aby byla splněna podmínka

$$\mathcal{L} = I\omega = \text{konst.}, \quad (452)$$

kde I označuje moment setrvačnosti celé hvězdy

$$I = \int_M R^2 dM = \int_V R^2 \rho(R) dV. \quad (453)$$

Zjistili, že za těchto předpokladů je vliv rotace na stavbu hvězd hlavní posloupnosti poměrně malý. Bolometrický zářivý výkon se snižuje jen o méně než 7 % a polární poloměr hvězdy o méně než 2 %.

Výrazné změny však nastávají během nukleárního vývoje hvězdy. S postupným růstem poloměru hvězdy sice klesá obvodová rychlost v na rovníku, ale ukazuje se, že *pomaleji*, než rychlost kritická $v_{\text{crit}} \propto R^{-1/2}$ (viz (432)), čili může nastat situace

$$v \geq v_{\text{crit}}. \quad (454)$$

Modely proto vedou k závěru, že i hvězdy, které mají na hlavní posloupnosti nulového věku rotační rychlosti několikrát menší než je rychlost kritická, se během vývoje na hlavní posloupnosti mohou stát *rotačně nestabilní*. Sackmann a Anand tím vysvětlovali možný vznik hvězd se závojem.

Kippenhahn a spol. (1970) propočítali vývoj rotujících hvězd pro dva jiné možné případy: (i) moment hybnosti se zachovává lokálně v oblastech zářivé rovnováhy zatímco v oblastech konvektivního přenosu energie rotuje hvězda jako tuhé těleso a zachovává se celkový moment hybnosti. (ii) Moment hybnosti se zachovává lokálně v oblastech měnicího se chemického složení; v oblastech, kde je chemické složení homogenní, rotuje hvězda jako tuhé těleso a zachovává se celkový moment hybnosti.

Vývoj pro obě uvedené alternativy spočetli pro hvězdu o hmotnosti $9 M_{\odot}$, přičemž pro model na hlavní posloupnosti nulového věku předpokládali tuhou rotaci. Vývoj propočítali až do fází vyhoření helia a v obou případech vedl v závěrečných fázích ke vzniku rychle rotujícího jádra a pomalu rotujících vnějších vrstev. Pro druhý uvažovaný případ zachovávání momentu hybnosti navíc vývoj na konci hlavní posloupnosti vedl rovněž k rotační nestabilitě hvězdy, autoři však upozorňují, že již pro model na hlavní posloupnosti nulového věku kritickou rotaci předpokládali.

Kippenhahn a spol. také upozornili na to, že když rotace zmenšuje efektivní gravitační zrychlení, **rotující hvězda se chová v jistých ohledech jako hvězda s poněkud menší hmotností** — všechna vývojová stadia trvají pro rotující hvězdu poněkud déle než pro nerotující hvězdu o stejné hmotnosti.

Endal a Sofia (1979) propočítali vývojové modely v rozsahu hmotností od 1,5 do $10 M_{\odot}$ pro tři různé alternativy: (i) tuhou rotaci, (ii) zcela lokální zachování momentu hybnosti a (iii) pro realistický model simulující co nejlépe očekávané přerozdělování momentu hybnosti ve hvězdě (viz Endal a Sofia 1978). Došli k závěru, že pokud hvězda na hlavní posloupnosti nulového věku rotuje s obvodovou rychlostí, která se rovná alespoň asi 60 % rychlosti kritické, dojde u ní během vývoje na hlavní posloupnosti k rotační nestabilitě, která může napomoci vzniku hvězdy se závojem.

Kromě toho z jejich výpočtů vyplývá, že pro stadium obrů vedou jejich výpočty k nižším rotačním rychlostem než jednodušší rotační modely, takže není třeba hledat další mechanismy ztráty úhlového momentu u obrů typu K.

Meynet a Maeder (2000) publikovali první sít' vývojových modelů rotujících hvězd v rozmezí hmotností 9 až $120 M_{\odot}$ pro sluneční chemické složení a různé počáteční rotační rychlosti. Předpokládali nekonzervativní odstředivou sílu, vývoj rotační rychlosti modelovali s uvážením všech známých procesů a brali v potaz i ztrátu hmoty hvězdným větrem. Jejich výsledky shrnují následující odstavce.

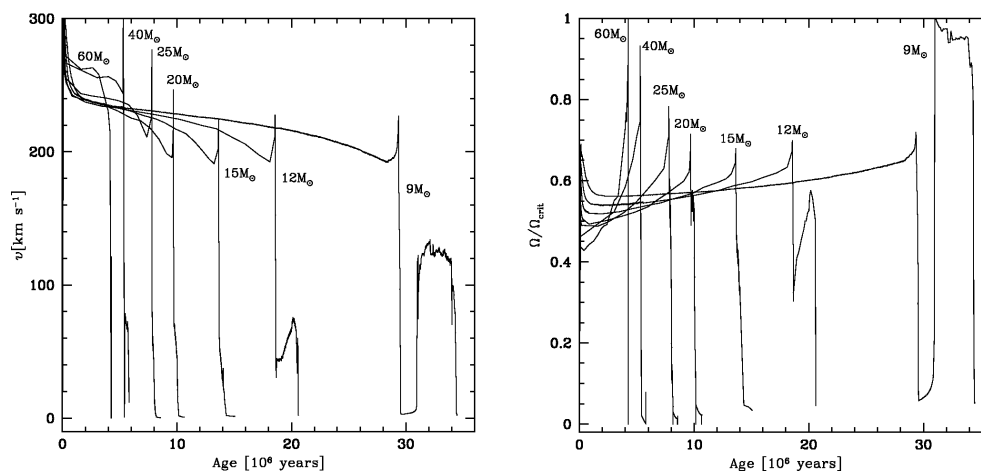
Vývoj rotační rychlosti. Obecně lze říci, že sekulární mechanismy přerozdělení úhlového momentu, jako je konvekce či meridionální cirkulace, se uplatňují v obdobích *klidného vývoje*, zatímco v rychlých vývojových stádiích nemají dost času se uplatnit a úhlová rotační rychlost se mění v zásadě tak, že se lokálně zachovává moment hybnosti. Pro modely na hlavní posloupnosti nulového věku byla předpokládána tuhá rotace. Vývoj probíhá takto (obr. 58):

1. *růst R_* → pokles ω ; hvězdný vítr → diferenciální rotace:* Pomalý růst poloměru R_* během hlavní posloupnosti vede k tomu, že úhlová rotační rychlost ω všude ve hvězdě postupně klesá, včetně centrálního konvektivního jádra. Zároveň se ustaví diferenciální rotace, s rotační rychlostí klesající

směrem k povrchu hvězdy. Tak tomu je především díky započtení ztráty hmoty hvězdným větrem. (Testovací výpočet, ve kterém byly uvažovány všechny procesy kromě ztráty hmoty, vede k soustavně rostoucí rotační rychlosti na povrchu hvězdy během vývoje na hlavní posloupnosti a k dosažení kritické rotace.)

2. $X_c \lesssim 0,05 \rightarrow$ *smrštění jádra* \rightarrow *zvýšení $\omega_{\text{jádra}}$* : Ke konci životní doby na hlavní posloupnosti, když relativní hmotnostní obsah vodíku klesne pod 0,05 a jádro se smršťuje, začne úhlová rotační rychlost v centrálních částech růst.
3. $X_c \doteq 0 \rightarrow$ *pokles R_** \rightarrow *růst ω* \rightarrow *možná nestabilita*: Ve fázi celkové kontrakce hvězdy po spotřebování zásob vodíku v jádru roste úhlová rotační rychlost v celé hvězdě. Zejména pro méně hmotné hvězdy (ve studovaném rozsahu hmotností) dosáhne v této fázi krátkodobě rotační rychlost i více než 80 % kritické rotační rychlosti na povrchu hvězdy.

Zajímavým zjištěním je i to, že během vývoje podél hlavní posloupnosti klesá rotační rychlost na povrchu hvězdy tím rychleji, čím větší byla počáteční rychlost rotace. Právě tak je zajímavé si povšimnout, že povrchová rotační rychlost během vývoje klesá s časem tím rychleji, čím je hvězda hmotnější.



Obrázek 58: Vlevo: vývoj obvodových rychlostí v na rovníku s časem pro hvězdy s různými počátečními hmotnostmi, s počáteční $v = 300 \text{ km/s}$ a $Z = 0,004$. Vpravo: poměr $\omega/\omega_{\text{crit}}$ úhlové rychlosti ku kritické úhlové rychlosti. Převzato z Maeder a Meynet (2001).

Vliv na vývojové dráhy v HR diagramu. Vzhledem k tomu, že — jak jsme se již úvodem zmínili — závisí tok záření na povrchu rotující hvězdy přibližně na lokálním gravitačním zrychlení, jsou polární oblasti hvězdy teplejší než oblasti rovníkové. Hvězda kromě toho nemá kulový tvar a pojem efektivní teploty podle

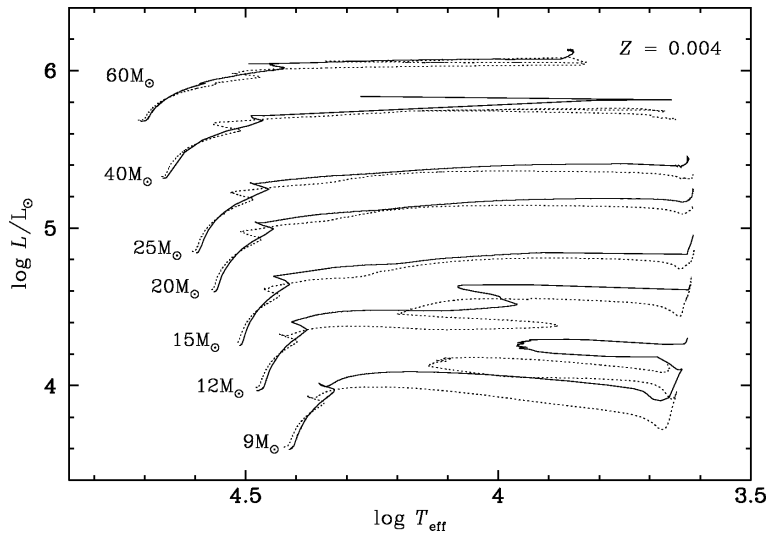
původní definice proto ztrácí smysl. Aby i přesto bylo možno konstruovat teoretický HR diagram, zavedli Meynet a Maeder (1997) střední efektivní teplotu rotující hvězdy vztahem

$$L = \sigma T_{\text{eff}}^4 S, \quad (455)$$

kde S označuje plochu povrchu hvězdy.

Srovnání rotujících a nerotujících hvězd ukazuje, že na hlavní posloupnosti nulového věku vede rostoucí rotace k poklesu jak efektivní teploty T_{eff} , tak zářivého výkonu L hvězdy. Rotující hvězda se proto jeví jako nerotující hvězda s poněkud menší hmotností.

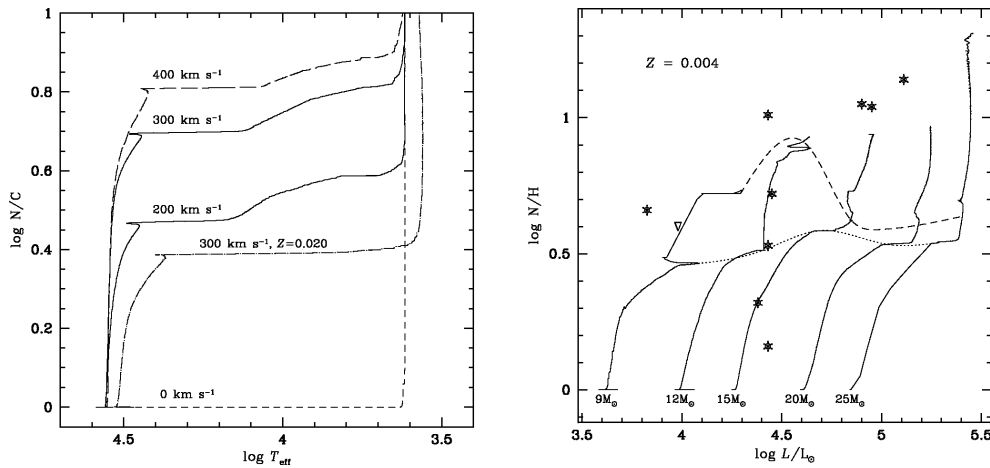
Naproti tomu postupný vývoj vede k tomu, že rotující hvězdy mají *větší* L než hvězdy nerotující. Tento fakt spolu s působením odstředivé síly znamenají také, že ztráta hmoty \dot{M} z rotujících hvězd je o 60 až 100 % větší, než z hvězd nerotujících. Počáteční rotační rychlost 200 km s^{-1} vede rovněž k *prodloužení životní doby* na hlavní posloupnosti asi o 20 až 30 % a pokud porovnááme isochrony, zvýší taková rotace odhad stáří asi o 25 %.



Obrázek 59: Vývoj hvězd na H–R diagramu pro hvězdy rotující (plná čára) a nerotující (čárkovaná čára). Počáteční obvodové rychlosti rotujících hvězd byly $v = 300 \text{ km/s}$. Převzato z Maeder a Meynet (2001).

Vliv na povrchové chemické složení. Velmi zajímavým důsledkem rotace je to, že již během vývoje na hlavní posloupnosti dochází u hvězd v uvažovaném rozsahu hmotností k *obohacování jejich atmosfér heliem a dusíkem a naopak k úbytku uhlíku a kyslíku*. Tento efekt roste s rostoucí hmotností hvězdy (obr. 60).

Srovnání s pozorováním. Je třeba si uvědomit, že srovnání výsledků modelů rotujících hvězd s pozorováním je obtížné nejen proto, že rotační modely se dosud vyvíjejí a nejsou dokonalé, ale i proto, že pro



Obrázek 60: Vlevo: poměr abundancí N/C dusíku a uhlíku na povrchu v závislosti na efektivní teplotě T_{eff} , pro hvězdu $M = 20 M_{\odot}$ a různé hodnoty rotačních rychlostí od $v = 0$ do 400 km/s . Vpravo: poměr povrchových abundancí N/H v závislosti na luminozitě L , pro hvězdy s různými hmotnostmi a počáteční rychlostí $v = 300 \text{ km/s}$. Převzato z Maeder a Meynet (2001).

danou hvězdu obvykle neznáme sklon její rotační osy. Pokud jde o hvězdu rychle rotující, její pozorované vlastnosti, včetně její zdánlivé polohy v HR diagramu, se přirozeně budou výrazně lišit podle toho, zda se na ni díváme spíše od pólu či spíše od rovníku. Přesto se lze dohadovat alespoň o dvou souvislostech:

1. *Vznik hvězd se závojem.* Z pozorování je známo, že největší procento hvězd se závojem se pozoruje kolem spektrální třídy asi B2, což odpovídá na hlavní posloupnosti hmotnosti asi $9 M_{\odot}$. Jak jsme viděli, pro hmotnější hvězdy během vývoje povrchová rotační rychlost rychle klesá (v důsledku rostoucího \dot{M} a \dot{L}) takže podmínky pro únik hmoty v rovníkových oblastech se zhoršují. To by s jevem hvězd se závojem mohlo souviset v případě, že k němu v zásadě dochází nějakým vyvrháváním materiálu z hvězdy samotné.
2. *Přebytek He, N u rotujících hvězd.* Z pozorování se zdá, že pro rychleji rotující O hvězdy se pozoruje přebytek helia, jsou známy i OBN hvězdy, u nichž je i přebytek dusíku, a ty se vyskytují hlavně mezi hvězdami hmotnějšími než asi $40 M_{\odot}$. Rovněž se zdá, že obsah helia a dusíku v atmosférách rotujících B hvězd roste během jejich vývoje na hlavní posloupnosti. Tato fakta jsou v dobré kvalitativní shodě s modelovými výsledky.

Vliv metalicity na rotační nestabilitu. Maeder a Meynet (2001) spočítali rotační modely pro hvězdy v rozsahu hmotností od 9 do $60 M_{\odot}$ pro velmi malý obsah těžkých prvků $Z = 0,004$, který odpovídá hvězdám v Malém Magellanově oblaku. Zjistili, že při *malém* Z je malá opacita κ_{ν} látky, malá zářivá síla f_{r} v atmosféře hvězdy (viz (413)), čili slabší *hvězdný vítr*, malá ztráta hmoty \dot{M} , a tedy i malá ztráta úhlového momentu hybnosti \dot{L} hvězdy, což *napomáhá* vzniku rotační nestability.

Uvedené zjištění může souviset s nedávno pozorovanými fakty, že hvězdokupy s nižším obsahem těžkých prvků obsahují vyšší procento hvězd se závojem. Nové modely také lépe předpovídají obohacování atmosfér veleobrů dusíkem, v souladu s pozorováním veleobrů typu A v Magellanově mračnu a vysvětlují větší počet červených veleobrů.

Závěrem poznamenejme, že Maeder a Meynet (2000a) publikovali podrobnou přehledovou práci o vývoji rotujících hvězd.

12 Vývoj dvojhvězd

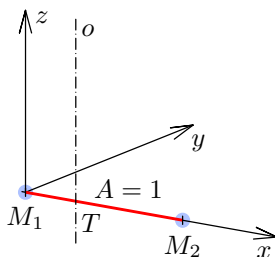
Z toho, co jsme si již o hvězdném vývoji pověděli, je zřejmé, že ve dvojhvězdě se rychleji bude vyvíjet hmotnější složka. Je-li oběžná perioda a tedy vzdálenost mezi složkami menší než určitá mez, může se stát — již během vývoje na hlavní posloupnosti, pravděpodobněji ale při přechodu hvězdy z hlavní posloupnosti do oblasti obrů po vypálení vodíku v jádru — že se poloměr hvězdy zvětší natolik, že překročí mez stability a plyn z hvězdy začne odtékat směrem k sekundární, méně hmotné složce dvojhvězdy. Tento proces naruší tepelnou rovnováhu hvězdy ztrácející hmotu a výrazně změní její další vývoj. Popíšme si nejprve, jak se výpočty ve stadiu výměny hmoty provádějí.

12.1 Rocheův model a jednoduché odhady

Vzhledem k výrazné koncentraci hmoty směrem k centru hvězdy lze i ke studiu dvojhvězd velmi úspěšně využít Rocheův model, který je ovšem komplikovanější, než v případě osamocené rotující hvězdy. Předpokládáme opět, že hmotnost primární i sekundární složky je soustředěna do hmotných bodů o hmotnostech M_1 a M_2 , ω označuje úhlovou oběžnou rychlost soustavy a zavedeme také *hmotový poměr*

$$q = \frac{M_2}{M_1}. \quad (456)$$

Zvolme *neinerciální* pravoúhlo souřadnou soustavu pevně spojenou s dvojhvězdou, která má počátek v bodě M_1 a jejíž osa x míří od M_1 k M_2 , osa y je na ni kolmá a leží v oběžné rovině a osa z je kolmá na oběžnou rovinu, přičemž vzdálenost $A = 1$ mezi oběma hmotnými body zvolíme za jednotku vzdálenosti (obr. 61). Označme vzdálenost těžiště od bodů M_1 a M_2 jako x_1 a x_2 . Platí zřejmě $x_1/x_2 = M_2/M_1$ a $x_2 = 1 - x_1$, z čehož dostaneme $x_1 = M_2/(M_1 + M_2)$.



Obrázek 61: Zavedení souřadnicové soustavy pro výpočet potenciálu v okolí dvojhvězdy. Těžiště T a osa o otáčení nejsou v počátku.

Na infinitesimální tělíčko o hmotnosti m , nacházející se v obecném bodě (x, y, z) , budou působit tři síly: gravitační přitažlivosti obou hmotných bodů a odstředivá síla odpovídající rotaci souřadnicové soustavy. Tyto síly mají tvar:

$$\mathbf{F}_1 = -G \frac{mM_1}{|\mathbf{r}_1|^3} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -G \frac{mM_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{F}_3 = m\omega^2 \mathbf{r}_3,$$

$$\mathbf{r}_1 = (x, y, z), \quad \mathbf{r}_2 = (x - 1, y, z), \quad \mathbf{r}_3 = \left(x - \frac{M_2}{M_1 + M_2}, y, 0 \right).$$

Označíme-li ještě

$$r_1 = |\mathbf{r}_1|, \quad r_2 = |\mathbf{r}_2|, \quad r_3 = |\mathbf{r}_3|, \quad (457)$$

lze celkový potenciál oněch tří sil ($F = m\nabla W$) zapsat ve tvaru

$$W = \frac{GM_1}{r_1} + \frac{GM_2}{r_2} + \frac{1}{2}\omega^2 r_3^2. \quad (458)$$

Úhlovou oběžnou rychlost ω vyjádříme ze 3. Keplerova zákona ($A = 1$)

$$\omega^2 A^3 = G(M_1 + M_2) = GM_1(1 + q) \quad (459)$$

a pro zjednodušení zápisu místo potenciálu W zavedeme potenciál

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{W}{GM_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{1}{2}(1 + q)r_3^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + q((1 - x)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1 + q}{2}(x^2 + y^2) - qx + \frac{q^2}{2(1 + q)}. \end{aligned} \quad (460)$$

Rovnice ekvipotenciálních ploch je pak

$$\Omega = C, \quad (461)$$

kde C je konstanta odpovídající konkrétní ploše (obr. 62). Všimněme si ještě, že tvar ekvipotenciálních ploch je funkcí jediné proměnné, poměru hmot q .²⁹

Můžeme se opět ptát po místech, ve kterých je výsledná síla působící na testovací tělíčko nulová, čili

$$\nabla\Omega = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \frac{\partial\Omega}{\partial z} \right) = \mathbf{0}. \quad (462)$$

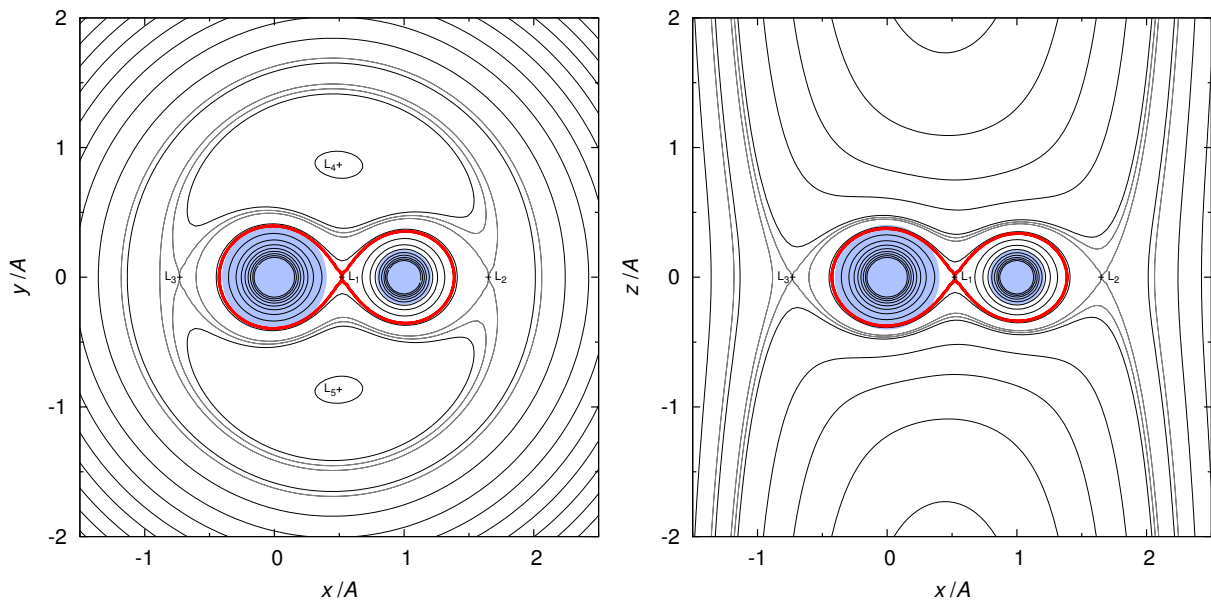
Rozepsáno do souřadnic

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z + q \left(-\frac{1}{2}\right) ((1 - x)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = 0. \quad (463)$$

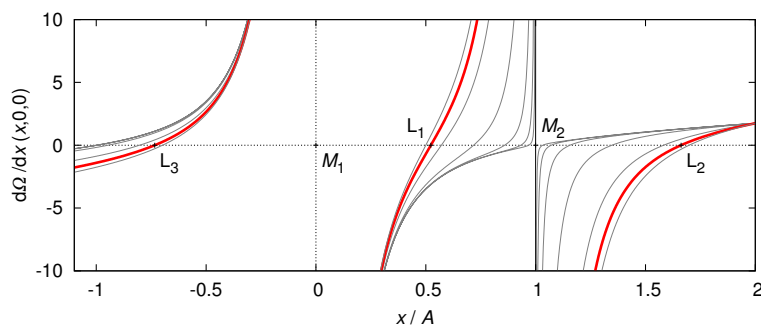
Z této rovnice plyne řešení $z = 0$. Druhá rovnice

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y + q \left(-\frac{1}{2}\right) ((1 - x)^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y + \frac{1 + q}{2} \cdot 2y = 0, \quad (464)$$

²⁹Podotkněme, že obdobná analýza se provádí v nebeské mechanice v problému tří těles. Při transformaci souřadnic tam kromě odstředivé síly vzniká i Coriolisova ($F_c \propto \omega \times \mathbf{v}$), kterou v našem stacionárním případě neuvažujeme ($\mathbf{v} = 0$). Zmiňované ekvipotenciální plochy se někdy nazývají křivky nulových rychlostí.



Obrázek 62: Potenciál $\Omega(x, y, 0)$ a $\Omega(x, 0, z)$ pro dvojhvězdu s hmotnostmi $M_1 = 4,0 M_\odot$, $M_2 = 3,2 M_\odot$ ($q = 0,8$). Znázorněny jsou polohy Lagrangeových libračních bodů a kritická ekvipotenciála, při jejímž překročení by docházelo k přetoku hmoty. Naznačené jsou i kulové hvězdy, s poloměry R_1 , R_2 , jaké by měly na hlavní posloupnosti nulového věku (v čase $t = 0$). Ve skutečnosti by ovšem tvar povrchu hvězd nezůstal kulový, ale přizpůsobil by se určitým ekvipotenciálám.



Obrázek 63: Průběh funkce $\frac{\partial\Omega(x,0,0)}{\partial x}$ pro poměr hmotností $q = 4,0/3,2 = 0,8$ a její kořeny, což jsou souřadnice Lagrangeových libračních bodů L_1, L_2, L_3 . Tence jsou vyznačeny funkce pro další hodnoty $q = 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0,1, 0,5, 1,0$.

má dvě řešení. Vezměme nejprve $y \neq 0$, po krácení y totiž máme

$$-\frac{1}{r_1^3} - \frac{q}{r_2^3} + 1 + q = 0, \quad (465)$$

což je možné splnit pouze když

$$r_1 = r_2 = 1. \quad (466)$$

Jedná se o dva body v oběžné rovině, ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka s body M_1, M_2 . Nazývají se Lagrangeovy body L_4 a L_5 .

Pokud $y = 0$ (čili hledáme kolineární řešení na ose x), pak ze třetí rovnice

$$\frac{\partial\Omega(x,0,0)}{\partial x} = -\frac{x}{|x|^3} + \frac{q(1-x)}{|1-x|^3} + (1+q)x - q = 0 \quad (467)$$

plyne polynom 5. stupně pro x (s parametrem q), který má tři reálné kořeny (obr. 63). Těm se obvykle říká L_1 (bod mezi M_1 a M_2); L_2 (ležící za M_2) a L_3 (ležící vně M_1).

Jak jsme se již zmiňovali u jednotlivých hvězd, význam ekvipotenciálních ploch spočívá v tom, že rovnovážná hvězda zaujme tvar některé z nich. Zvláště významná je kritická plocha obsahující bod L_1 — často zvaná *Rocheova mez* — která představuje mez dynamické stability dvojhvězdy. Praktický návod jak počítat rozměry kritické meze pro zvolený poměr hmot lze nalézt v apendixu práce Harmanec (1990).

Fyzikální klasifikace dvojhvězd. Rocheův model poskytuje kritérium pro dodnes využívanou fyzikální klasifikaci dvojhvězd na:

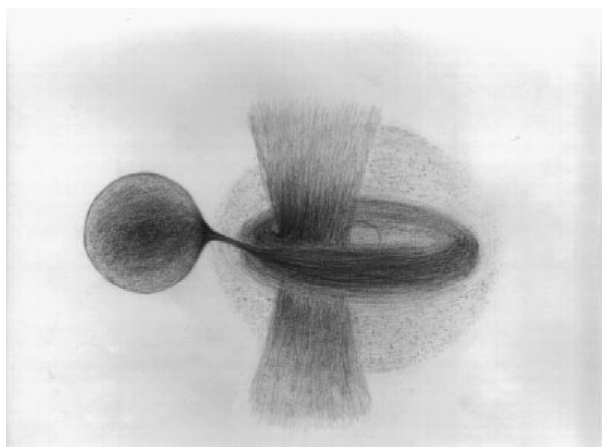
1. *oddělené*, kdy obě složky mají rozměry menší než kritická plocha;
2. *polodotykové*, ve které je jedna složka uvnitř kritické plochy a druhá ji právě vyplňuje, tudíž dochází k přetoku hmoty přes bod L_1 ;

3. *dotykové*, když obě složky zaplňují nebo překračují kritickou plochu a mají společnou atmosféru. Eventuálně může docházet k úniku hmoty ze systému přes bod L_2 .

12.2 Výpočet hvězdného vývoje ve stadiu výměny hmoty

Je zřejmé, že problém vývoje dvojhvězd je úloha, která zásadním způsobem narušuje předpoklad sférické symetrie, úspěšně použitý v případě modelů osamocených hvězd. Jak jsme si ukázali pomocí Rocheova modelu, projeví se narušení nejen sférické, ale i osové symetrie ve chvílích, kdy hvězda expanduje na mez dynamické stability.

Následný přenos hmoty mezi složkami probíhá formou *plynného proudu*, který vytéká z okolí Lagrangeova bodu L_1 a je v důsledku *Coriolisovy síly* nevyhnutelně strháván ve směru oběžného pohybu hmotu ztrácející složky. V řadě případů — jak ukazují i nejnovější třírozměrné hydrodynamické modely — oblétně druhou hvězdu a při návratu složitě interaguje s původním proudem (vznikne *horký pás*). Kolem hmotu přijímající složky se vytváří *akreční disk* a též sférická obálka. Část plynu opouští dvojhvězdu a odnáší s sebou tedy část hmoty, i část úhlového momentu soustavy (obr. 64).



Obrázek 64: Nákres modelu dvojhvězdy β Lyrae, sestávající z obra spektrálního typu B6–8II o hmotnosti $3 M_{\odot}$, z něhož přetéká hmota na trpaslíka typu B, s hmotností $13 M_{\odot}$. Rychlost přenosu hmoty dosahuje $\dot{M} = 2 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{rok}$, což vysvětluje pozorované prodlužování oběžné periody $\dot{P} = 19 \text{ s/rok}$. Hmotu přijímající složka je skrytá v akrečním disku a cirkumstelární obálce; v místě kontaktu disku s proudem hmoty jsou znázorněny kolmé výtrysky. Převzato z práce Harmance (2002b).

Ze všech těchto důvodů — i přes velký pokrok ve výpočetní technice — fyzikálně konsistentní výpočty vývoje dvojhvězd ve fázi výměny hmoty dosud neexistují. Přesto existuje již od konce šedesátých let postup, jak výměnu hmoty ve dvojhvězdách alespoň zhruba modelovat, a jak si učinit představu, co asi můžeme u reálných soustav očekávat. Vychází se z následujících zjednodušení:

1. Počítá se *jednorozměrný* model hmotu ztrácející hvězdy, místo skutečné geometrie Rocheova modelu se za dosažení meze stability pokládá, když hvězda dosáhne takového poloměru $R_{\text{crit}}(t)$, že se její

objem rovná objemu odpovídající Rocheovy meze pro okamžitý poměr hmot obou složek. Ten lze dobře popsat jednoduchou aproximační formulí (Paczyński 1971)

$$R_{\text{crit}}(t) \doteq \left(0,38 + 0,2 \log \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \right) A(t), \quad (468)$$

kde $M_1(t)$, $M_2(t)$ a $A(t)$ označují hmotu složky, která hmotu ztrácí, hmotu přijímající složky a vzdálenost středů obou hvězd v čase t .

2. Veškerá hmota, která expanduje přes kritický poloměr daný vztahem (468) *okamžitě* odtéká směrem ke druhé složce dvojhvězdy. Hrubé odhady expanze plynu do vakua ukazují, že tento předpoklad není nesmyslný.
3. Přenos hmoty je *konservativní*, t.zn., že veškerá hmota, odtékající ze složky 1 je zachycena složkou 2 a že žádná hmota neuniká ze soustavy. Navíc se uvažuje jen moment moment soustavy související s oběžným pohybem \mathcal{L}_{orb} a zanedbávají se rotační momenty hybnosti \mathcal{L}_{rot} . Toto druhé zjednodušení je dosti přijatelné, neboť rotační momenty jsou ve srovnání s oběžným momentem podstatně menší.³⁰ (Navíc by případný mechanismus přenosu momentu hybnosti mezi \mathcal{L}_{orb} a \mathcal{L}_{rot} byl beztak málo účinný.)
4. Model hmoty přijímající složky se obvykle nepočítá, pouze se registruje její okamžitá hmotnost tak, aby celková hmotnost soustavy zůstala zachována. Tím se modelování vyhne problému reálného popisu hydrodynamického přenosu hmoty mezi složkami.

Vzdálenost složek dvojhvězdy. Za zmiňovaných předpokladů platí zákon zachování hmoty

$$M_1(t) + M_2(t) = K \quad (469)$$

a také zákon zachování celkového (oběžného) momentu hybnosti

$$\mathcal{L} \doteq \mathcal{L}_{\text{orb}} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} A v_K = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} A \frac{2\pi A}{P}. \quad (470)$$

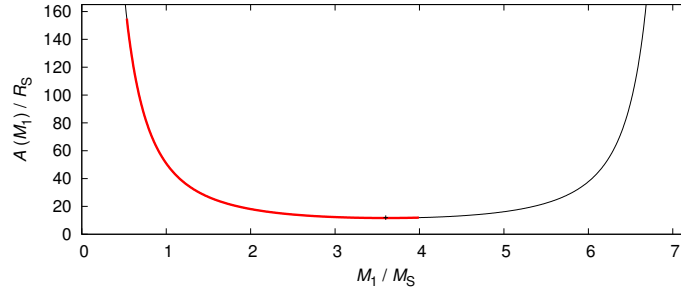
Tento vztah lze ještě upravit pomocí 3. Keplerova zákona

$$\frac{A^3}{P^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2} \quad (471)$$

do tvaru

$$\mathcal{L}_{\text{orb}}^2 = G \frac{M_1^2 M_2^2}{M_1 + M_2} A, \quad (472)$$

³⁰Například pro hvězdu o hmotnosti $M_1 = 4 M_\odot$, poloměru $R_1 = 5 R_\odot$, rotační periodě $P = 2$ d by bylo $\mathcal{L}_{\text{rot}} \simeq k M_1 R_1^2 \omega \simeq 1,8 \cdot 10^{44} \text{ kg m}^2$, kde koeficient $k \simeq 0,05$ je dosti malý, neboť hmota je značně koncentrována ke středu. V porovnání s tím vychází ve dvojhvězdě s $M_2 = 3,2 M_\odot$ a se vzdáleností $A = 12 R_\odot$ hodnota $\mathcal{L}_{\text{orb}} = (GM_1^2 M_2^2 / (M_1 + M_2) A)^{-1/2} \simeq 1,0 \cdot 10^{46} \text{ kg m}^2$, čili o 2 řády větší.



Obrázek 65: Změny vzdálenosti dvojhvězdy s počátečními hmotnostmi $M_1 = 4 M_\odot$, $M_2 = 3,2 M_\odot$ během přenosu hmoty, v závislosti na hmotnosti M_1 (dle (474)). Červeně je vyznačen vývoj takové dvojhvězdy při realisticky počítaném přenosu hmoty — původní hmotový poměr $q = M_2/M_1 = 0,8$ se více než převrátil (na hodnotu $q = 1,89$).

což se pro případ konstantní celkové hmoty (469) redukuje na podmínku

$$A(t)M_1^2(t)M_2^2(t) = C. \quad (473)$$

Můžeme si přirozeně položit otázku, kdy bude vzdálenost mezi oběma hvězdami minimální. V poslední rovnici (473) vyloučíme hmotnost M_2 s využitím (469)

$$A(M_1) = CM_1^{-2}(K - M_1)^{-2} \quad (474)$$

a hledáme, kdy bude derivace této funkce podle hmoty M_1 primáru nulová. Dostaneme

$$\frac{dA(M_1)}{dM_1} = -2CM_1^{-3}(K - M_1)^{-2} + 2CM_1^{-2}(K - M_1)^{-3} = 0, \quad (475)$$

což po úpravě vede na podmínku

$$-(K - M_1) + M_1 = -K + 2M_1 = 0 \quad (476)$$

neboli

$$M_1 = M_2. \quad (477)$$

Vidíme, že **vzdálenost mezi hvězdami je při konservativním přenosu hmoty mezi složkami minimální ve chvíli, když se hmotnost obou těles vyrovná**. Při toku z hmotnější složky na méně hmotnou ($M_1 > M_2$) se vzdálenost zmenšuje; při opačném toku ($M_1 < M_2$), respektive po převrácení hmotového poměru, se vzdálenost zvětšuje (obr. 65).

Nekonzervativní přenos hmoty. V některých pracích z novější doby se uvažuje parametricky ztráta hmoty a úhlového momentu ze soustavy. Např. de Loore a De Greve (1992) předpokládají vztah ve tvaru

$$\frac{dM_2}{dt} = -\beta \frac{dM_1}{dt}, \quad (478)$$

přičemž parametr β volí konstantní pro celou fázi výměny hmoty, obvykle roven 0,5. To je nepochybně určitý nedostatek, neboť lze předpokládat, že ve fázích rychlejšího přenosu hmoty je pravděpodobnost úniku hmoty ze soustavy větší, než ve fázích pomalých. V tomto modelu tedy $(1 - \beta)$ z hmoty opouštějící složku 1 uniká ze soustavy.

Ještě složitějším problémem je popsat ztrátu úhlového momentu. De Loore a De Greve (1992) předpokládali, že úhlový moment je úměrný celkové hmotnosti soustavy $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$, čili

$$\mathcal{L} \propto M^\gamma, \quad (479)$$

a změnu momentu hybnosti popisovali parametrickou rovnicí

$$\frac{\Delta \mathcal{L}}{\mathcal{L}} = 1 - \left(1 - \frac{\Delta M}{M}\right)^\gamma, \quad (480)$$

kde konstantu γ po pokusech s modelováním konkrétní dvojhvězdy volili rovnou 2,1. Autoři při těchto nekonzervativních výpočtech modelovali i vývoj složky přijímající hmotu, ovšem pouze tak, že přidávali příslušnou hmotnost o daném chemickém složení.

Model hvězdného nitra. Hvězdné nitro primáru se musí odtoku hmoty jistým způsobem přizpůsobit. Zásadní je, aby poloměr hvězdy $R(t)$ vycházel na Rocheově mezi $R_{\text{crit}}(t)$ a ne menší nebo větší. Výpočet modelu ve fázi odtoku proto probíhá následovně (Kippenhahn a Weigert 1967):

1. Pro počáteční hodnoty $M_1(t_0)$, $M_2(t_0)$, $A(t_0)$ spočteme konstanty K , C ze vztahů (469), (473).
2. Zkusmo zvolíme Δt vývojového modelu.
3. Spočteme poloměr Rocheovy meze $R_{\text{crit}}(t)$.
4. Je-li $R_1(t) > R_{\text{crit}}(t)$, zvolíme odpovídající hodnotu $dM_1 < 0$ podle osvědčeného vztahu

$$dM_1 = -M_1(t) \cdot \min[s(\log R_1(t) - \log R_{\text{crit}}(t)), 0,03], \quad (481)$$

kde konstanta s může nabývat hodnotu mezi 0,1 a 0,5. Všimněme si, že tímto nedovolujeme změnu hmotnosti o více než 3 %.

5. Vynecháme jednu nebo několik prvních slupek v diferenčním schematu tak, aby hvězda měla novou hmotnost

$$M_1(t + \Delta t) = M_1(t) + dM_1, \quad (482)$$

tyto vrstvy „odtekly“ k sekundární hvězdě. Pokud slupky číslujeme od povrchu, musíme je v takovém případě ještě přechíslovat. Jinak řečeno, úloha je v nezávisle proměnné M_R nyní definována na intervalu $\langle 0, M_1(t) + dM_1 \rangle$ místo původního intervalu $\langle 0, M_1(t) \rangle$.

6. Pomocí rovnic (469), (473) a (468), spočteme nové hodnoty $M_2(t + \Delta t)$, $A(t + \Delta t)$ a $R_{\text{crit}}(t + \Delta t)$.
7. Změníme polohu bodu M_F , tj. hranice, kde je již třeba uvažovat neadiabatickou konvekci a neúplnou ionizaci v podpovrchových vrstvách, a to tak, aby bylo

$$\frac{M_F(t + \Delta t)}{M_1(t + \Delta t)} \leq \frac{M_F(t)}{M_1(t)}. \quad (483)$$

8. Spočteme nový model nitra — 1. *superiteraci* správného modelu. Zejména nás zajímá výsledný poloměr hvězdy $R_1(t + \Delta t)$.

Je důležité si uvědomit, že expanze povrchových vrstev a narušení tepelné rovnováhy vedou ke *změněm zářivého toku* L_R i v *podpovrchových vrstvách* a rovnici tepelné rovnováhy (152), popisující změnu L_R od místa k místu, je i v nich proto třeba řešit. (Zde se právě vyplatí, jsou-li změny vnitřní energie popisovány přímo pomocí entropie, neboť se pak nedopouštíme žádných zanedbání v příslušných rovnicích.)

Ve stádiích výměny hmoty je ovšem na začátku každého modelu třeba znovu spočítat *povrchový trojúhelník* (295) v diagramu L vs. T_{eff} pro novou hmotu modelu. V rychlejších stádiích přenosu hmoty je to nutné dělat dokonce před každou *superiterací*.

9. Poloměr hvězdy $R_1(t + \Delta t)$ porovnáme s očekávaným poloměrem Rocheovy meze $R_{\text{crit}}(t + \Delta t)$. Pokud se obě hodnoty liší více než o požadovanou přesnost, zvolíme pomocí lineární interpolace nový časový krok Δt (tzn. vrátíme se k bodu 2) a spočteme 2. *superiteraci*. To opakujeme tak dlouho, až je dosaženo požadované shody poloměrů $R_1(t + \Delta t)$ a $R_{\text{crit}}(t + \Delta t)$.

Praxe ukazuje, že kromě velmi komplikovaných stádií stačí obvykle 1 až 3 *superiterace* k nalezení konzistentního modelu (tj. hodnot Δt , dM_1 , resp. M_1 a struktury nitra).

10. Po ukončení zmiňovaných *superiterací* provedeme obvyklý časový krok vývojového modelu, čili změníme chemické složení dle (301), a vrátíme se k bodu 2.

Výpočet fáze přenosu hmoty ukončíme v okamžiku, jakmile vyjde $R_1(t) < R_{\text{crit}}(t)$.

12.3 Některé výsledky modelování vývoje dvojhvězd

Je třeba si uvědomit, že vývoj dvojhvězd nabízí mnohem více *kombinací*, než vývoj osamocené hvězdy. Začátek stadia výměny hmoty mezi složkami závisí na počáteční oběžné periodě soustavy a na hmotách obou složek, dalšími faktory jsou chemické složení a dosud ne dobře prostudovaná dynamika přenosu (množství hmoty a momentu unikajících ze soustavy).

Z vývoje *osamocených* hvězd víme některá fakta:

1. Během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku dosahuje hvězda postupně *několika lokálních maxim svého poloměru* $R(t)$. Ne každé následující maximum je nutně větší než poslední předchozí, avšak absolutním maximem je určitý okamžik ve stadiu veleobra na konci oné části vývoje, která je určována jadernými reakcemi.
2. Životní doba pobytu hvězdy na hlavní posloupnosti je klesající funkcí hmotnosti hvězdy. To pro dvojhvězdy znamená (při rozumném předpokladu, že obě složky dvojhvězdy vznikly současně), že *dříve bude expandovat vždy hmotnější z nich*. Často se pro ni volí termín *primární složka* či primár.

Můžeme ovšem rozlišit dva případy výměny hmoty mezi složkami (Kippenhahn a Weigert 1967):

případ A: je-li vzdálenost A mezi složkami dostatečně malá, může k výměně hmoty dojít ještě během pobytu primární složky na hlavní posloupnosti.

případ B: situace, kdy k překročení Rocheovy meze primární složkou dojde teprve v období rychlé expanze poloměru hvězdy po vyhoření vodíku v jejím jádru.

Plavec (1968) odvodil parametrické vztahy, pomocí kterých lze pro konkrétní dvojhvězdu odhadnout kritické hodnoty oběžné periody pro to, aby došlo k některému případu výměny hmoty. S použitím výpočtů vývoje osamocených hvězd pro chemické složení $X = 0,708$ a $Z = 0,02$ vyšly periody (ve dnech)

$$\log P^0 = 0,441 \log M_1 - 1,06 - s(q), \quad (484)$$

$$\log P^I = 0,731 \log M_1 - 0,86 - s(q), \quad (485)$$

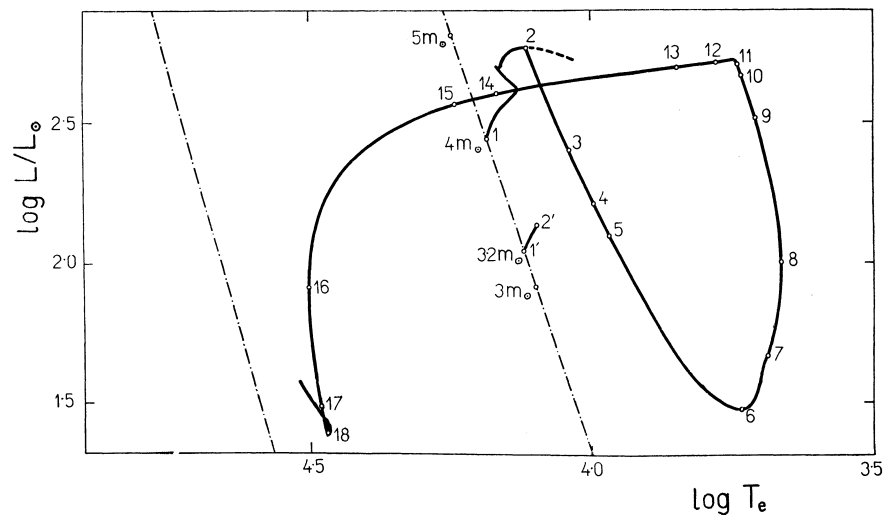
$$\log P^{II} = 2,201 \log M_1 - 0,04 - s(q), \quad (486)$$

kde $s(q) = 1,5 \log r + 0,5 \log(1 + q)$, přičemž $r = R/A$ je střední relativní poloměr Rocheovy meze (podle (468)) a $q = M_2/M_1$ je hmotový poměr mezi sekundární a primární složkou. Případ A výměny hmoty nastane, pokud oběžná perioda soustavy leží mezi P^0 a P^I a případ B, je-li perioda mezi P^I a P^{II} . Například pro dvojhvězdu se složkami $M_1 = 4 M_\odot$ a $M_2 = 3,2 M_\odot$ vycházejí hodnoty hraničních period $P^0 = 0,47$ d, $P^I = 1,12$ d, $P^{II} = 56,9$ d.

Ačkoliv první pokusy o modelování výměny hmoty byly činěny již roku 1960, lze za první dostatečně realistický výpočet považovat sekvenci modelů publikovaných Kippenhahnem a Weigertem (1967).

Příklad konkrétní dvojhvězdy $4 M_\odot$ a $3,2 M_\odot$. Popišme si průběh vývoje dvojhvězdy o původních hmotnostech $4 M_\odot$ a $3,2 M_\odot$, jak jej propočtl Harmanec (1970) (viz obr. 66):

1. čas $t = 0$, ZAMS: Na počátku vývoje měla uvažovaná soustava oběžnou periodu $1,785$ d. Ke kontaktu primární složky s mezí stability dojde až po vyčerpání vodíku v jejím jádru; jedná se o případ B.
2. $t = 93,5$ Myr, *expanze obálky* \rightarrow *začátek přenosu hmoty* \rightarrow *zmenšování A*: Poloměr primáru $R_1 = 4,78 R_\odot$ činí dvojnásobek poloměru na počátku hlavní posloupnosti a je na Rocheově mezi. Obálka hvězdy expanduje v důsledku tepelné nestability v jádru, a ztráta hmoty z povrchových vrstev tuto nestabilitu ještě urychlila. Přenos hmoty se proto v prvním stadiu prudce zrychluje. Tomu napomáhá i zmenšující se vzdálenost A mezi složkami.



Obrázek 66: H–R diagram pro *primární* složku dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$. Další parametry dvojhvězdy na počátku přenosu hmoty jsou: poloměry $R_1 = 4,78 R_{\odot}$, $R_2 = 2,47 R_{\odot}$, spektrální typy B7 III a B8 V, vzdálenost mezi složkami $A = 11,95 R_{\odot}$ a orbitální perioda $P = 1,785$ d. Hlavní posloupnosti nulového stáří (ZAMS, čerchované čáry) jsou vyznačeny dvě — pro dvě různá chemická složení: $X = 0,602$, $Y = 0,354$ a $X = 0$, $Y = 0,956$. Vývoj je zachycen před, během i po přenosu hmoty. Přenos hmoty probíhá mezi body 2 až 11; jednotlivé body jsou popisované v textu. Model končí v bodě 18 mimo jiné z toho důvodu, že původně sekundární hvězda by v této fázi pravděpodobně dosáhla Rocheova poloměru a začal by přetok hmoty zpět na primár. Převzato z práce Harmance (1970).

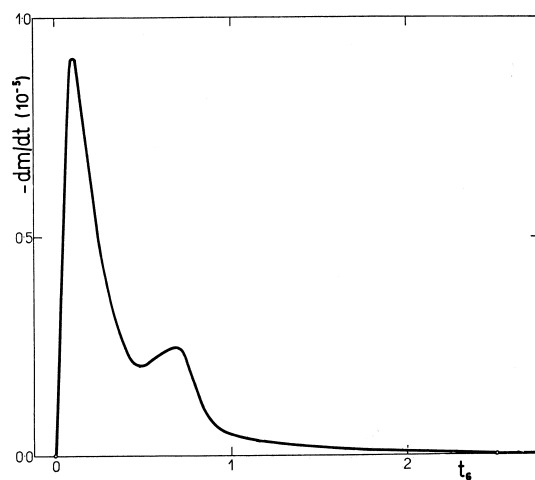
3. *čas od začátku přenosu hmoty* $t_s = 84\,000 \text{ yr}$, $M_1 = M_2 \rightarrow A$ *minimální*: Po krátké době mají obě složky stejnou hmotnost $3,6 M_\odot$ a vzdálenost mezi nimi dosahuje minima. Od toho momentu vede pokračující výměna hmoty k narůstání vzdálenosti mezi složkami, což přirozeně brzdí rychlost přenosu.
4. $t_s = 110\,000 \text{ yr}$, *první maximum* dM/dt : Vzdalování převládne nad vlivem tepelné nestability, rychlost přenosu hmoty dosáhne svého maxima $9 \cdot 10^{-6} M_\odot$ za rok a počíná klesat (obr. 67). Hmotnost primární hvězdy činí v té chvíli $3,37 M_\odot$.
5. $t_s = 127\,800 \text{ yr}$, *q převrácené, podpovrchová konvektivní zóna*: Po 127800 letech se původní hmotový poměr mezi složkami vymění. Klesající efektivní teplota vede — podobně jako při vývoji osamocené hvězdy — k poklesu ionizace v podpovrchových vrstvách hvězdy a s tím souvisejícím vznikem *konvektivní zóny*. Asi po 400 000 letech od začátku odtoku začne tato konvektivní zóna prudce narůstat směrem do nitra hvězdy (obr. 68).

Je dobře si uvědomit, že vnitřní části hvězdy se téměř po celou dobu přenosu hmoty chovají značně *autonomním* a vcelku neměnným způsobem: rovnoměrně se smršťují, aby kompensovaly nestabilitu vzniklou zánikem centrálního nukleárního zdroje energie. Určité změny jsou však patrné. Centrální teplota v poměru k centrální hustotě hned na začátku odtoku začíná narůstat prudčeji než před jeho začátkem (obr. 69).

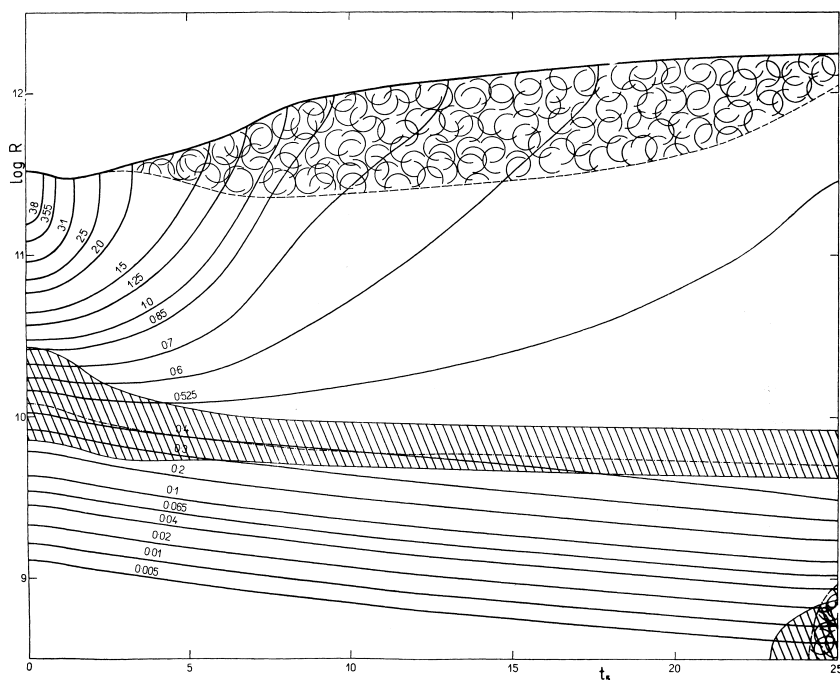
To je chování právě opačné, než jaké ukazují modely výměny hmoty v případě A. Tam totiž centrální teplotu určuje především produkce nukleární energie a ta s úbytkem hmotnosti hvězdy přirozeně klesá. Na začátku odtoku v případě A klesá proto i centrální teplota.

K pochopení průběhu přenosu hmoty je třeba si povšimnout chování hlavního zdroje energie v daném případě: *vodíkové slupky*. Oblast, v níž probíhá slučování vodíku na helium se během celého odtoku absolutně i relativně zmenšuje. Maximum produkce se přitom během první části odtoku zvolna přesouvá směrem k centru, a to jak v poloměru, tak ve hmotě. To souvisí s rostoucí teplotou a hustotou centrálních částí hvězdy. Energetický výkon slupky ale současně klesá. To je způsobeno jednak tím, že klesá hustota a teplota vnějších částí slupky, neboť tyto vrstvy během ztráty hmoty expandují zčásti na úkor své vnitřní energie, a za druhé proto, že ve spodních částech slupky rychle ubývá vodíku. Úbytek vodíku nakonec způsobí, že se (klesající) maximum hoření vodíku ve slupce začne přesouvat směrem k povrchu ve hmotě.

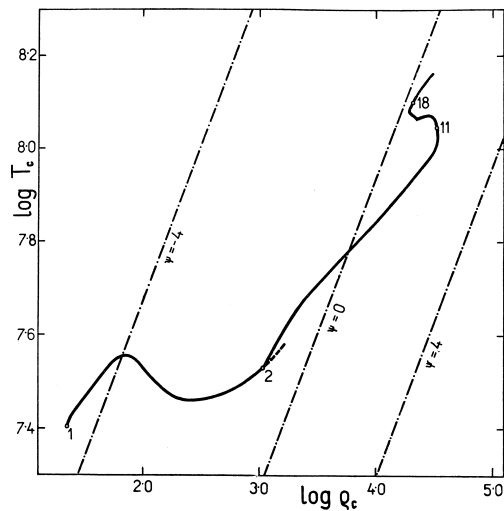
6. $t_s = 472\,900 \text{ yr}$, *minimum L*: Postupně prakticky zanikne původní tepelná nestabilita vnějších vrstev hvězdy, vyvolaná ztrátou hmoty, a další odtok hmoty již probíhá pouze pod vlivem tepelné nestability v jádru. Tím samozřejmě ubude i pohlcování zářivé a vnitřní energie v obalu a 472 900 let po začátku odtoku dosáhne zářivý výkon hvězdy minima a začíná opět narůstat. K tomuto růstu přispěly ještě další důvody. Přechod na konvektivní přenos energie ve vnějších částech hvězdy vytvořil (podobně jako u vývoje osamocené hvězdy) lepší podmínky pro hoření vodíku ve slupce, takže produkce energie v ní začíná růst. Mimo to se již hvězda v té době zbavila všech vrstev s původním chemickým složením a u povrchu se proto mění i velikost rozptylu zářivé energie.



Obrázek 67: Rychlost přenosu hmoty $-dM/dt$ ($[dM/dt] = 10^{-5} M_{\odot}$) v závislosti na čase t pro dvojhvězdu $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$. Převzato z Harmanec (1970).

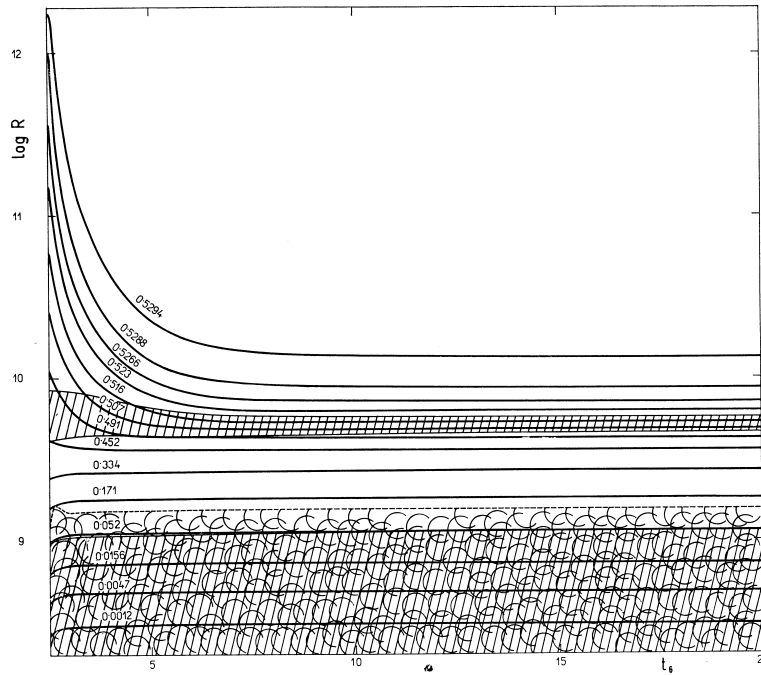


Obrázek 68: Změny vnitřní struktury primární složky dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$ v průběhu přenosu hmoty. Každá slupka je označena absolutním hmotnostním podílem (v jednotkách M_{\odot}). Hranice konvektivních zón jsou značeny čárkovanou čarou, oblasti termonukleárních reakcí (s produkcí energie větší než 10 erg/g/s) jsou šrafované, maximum produkce energie ve slupce je čerchovaná čara. Převzato z Harmanec (1970).



Obrázek 69: Závislost centrální hustoty ρ_c a centrální teploty T_c pro vývoj primární složky dvojhvězdy $4 M_\odot$ a $3,2 M_\odot$. Srovnej s obr. 24. Převzato z Harmanec (1970).

7. $t_s = 720\,000$ yr, *druhé maximum* dM/dt : Konvektivní zóna má ještě jiný důsledek: rychlejší růst poloměru hvězdy a následkem toho i přechodné druhé maximum přenosu hmoty od začátku odtoku, asi $2,5 \cdot 10^{-6} M_\odot$ za rok.
8. $t_s = 1,11$ Myr, *minimum* T_{eff} , *malé* dM/dt : Poté se rozloha konvektivní zóny i rychlost ztráty hmoty opět zmenšují, minima dosáhne i efektivní teplota a končí rychlá fáze odtoku. Další vývoj je určován již jen tepelnou nestabilitou jádra hvězdy. Rychlost odtoku hmoty v té době činí asi $4 \cdot 10^{-7} M_\odot$ za rok a dále se zpomaluje. Efekty ztráty hmoty z povrchu hvězdy jsou v té době už tak malé, že se hvězda chová prakticky stejně jako osamocená hvězda původní hmotnosti v podobném vývojovém stadiu.
9. $t_s = 2,08$ Myr, *růst* $T_c \rightarrow$ *slučování He na C*: Růst centrální teploty pokračuje a v jádru začíná docházet k nukleární syntéze helia na uhlík.
10. $t_s = 2,41$ Myr, *jaderná konvektivní zóna*: V centru vzniká nová konvektivní zóna.
11. $t_s = 2,51$ Myr, *růst* $\epsilon_{\text{He}} \rightarrow$ *expanze slupky H* \rightarrow *pokles* $\epsilon_{\text{H}} \rightarrow$ *konec expanze obálky* \rightarrow *konec přenosu hmoty*: Narůstání produkce v jádru ovšem zhorší podmínky pro hoření ve vodíkové slupce, obal hvězdy přestane růst a 2517900 let po začátku odtoku fáze výměny hmoty končí. Původně primární hvězda má nyní hmotnost pouhých $0,53 M_\odot$, ale poloměr $25,0 R_\odot$ a obsah vodíku na povrchu činí pouze 0,256 proti původního 0,602. Oběžná perioda dvojhvězdy se prodloužila na $84,2$ a poměr hmot se z původního poměru $M_2/M_1 = 0,8$ více než převrátil na $M_1/M_2 = 0,079$.
- 12.–18. $t_s = 2,60$ až $12,6$ Myr, *kontrakce* \rightarrow *ZAMS pro He hvězdy*: Konkrétní výpočet, který jsme použili jako ilustrační příklad, pokračoval i po skončení výměny hmoty. Původně primární složka v důsledku



Obrázek 70: Změny vnitřní struktury *původně* primární složky dvojhvězdy $4 M_{\odot}$ a $3,2 M_{\odot}$ po skončení přenosu hmoty. Značení je podobné jako na obr. 68. Převzato z Harmanec (1970).

rostoucí produkce hoření helia v jádru rychle kontrahuje a zahřívá se, takže roste efektivní teplota, postupně mizí podpovrchová konvektivní zóna a hvězda se přesouvá v HR diagramu z oblasti obrů až do blízkosti hlavní posloupnosti heliových hvězd (obr. 70).

V čase 12,6 miliónu let od začátku výměny hmoty hvězda konečně znovu dosáhne stavu tepelné rovnováhy a lokálního minima svého zářivého výkonu. Je zajímavé si uvědomit, že se tak stalo až v době, kdy obsah helia v jádru v důsledku nukleární přeměny již poklesl zhruba na polovinu ($Y = 0,484$). Původně hmotnější složka dvojhvězdy je v té době horkým trpaslíkem s poloměrem pouhých $0,208 R_{\odot}$.

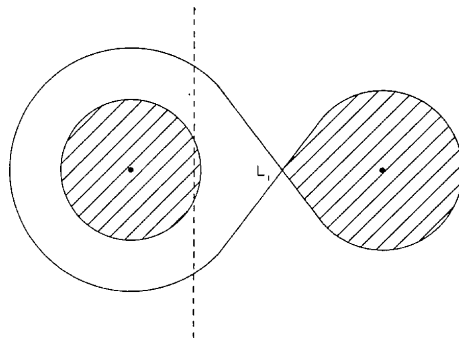
Výsledky vývoje ve dvojhvězdě mohou být velmi rozmanité. Konkrétní výpočty ukazují, že vývoj heliové hvězdy může vést k dalšímu přenosu hmoty ještě dříve, než se stačí k mezi nestability přiblížit původně sekundární složka, opačný případ je však častější. V tom případě se může stát, že se začne přenášet hmota na horkou kompaktní hvězdu, na jejímž povrchu tak může dojít i k nukleárnímu hoření a k eruptivním jevům.

Obecně lze ale uzavřít, že pokud k výměně hmoty dojde v kterékoliv fázi vývoje hvězdy, ve které z důvodů změn její vnitřní stavby dochází právě k růstu poloměru, **vede překročení meze stability ve dvojhvězdě k fázi mohutné výměny hmoty mezi složkami, při které se původní hmotový poměr více než vymění.**

12.4 Modely vývoje dvojhvězd versus pozorování

Vývojový paradox. Prvním problémem, který se výpočty výměny hmoty ve dvojhvězdách pokoušely vyřešit, byl *vývojový paradox polodotykových soustav*. Když totiž byly získány údaje o základních fyzikálních vlastnostech dostatečného počtu dvojhvězd a když začala být po roce 1950 využívána klasifikace dvojhvězd na oddělené, polodotykové a kontaktní, ukázalo se, že ve všech případech zaplňovala Rocheovu mez u polodotykových soustav *méně hmotná* sekundární složka (obr. 71). V té době bylo už z teorie stavby hvězd jasné, že rychleji by se měla ve dvojhvězdě vyvíjet a k Rocheově mezi expandovat hmotnější z obou složek. A pozorování se zdála ukazovat pravý opak.

Se skvělým fyzikálním citem navrhl možné vysvětlení zdánlivého paradoxu Crawford (1955). Postuloval, že rychleji se bude skutečně vyvíjet hmotnější složka a že dojde k výměně hmoty, která obrátí původní poměr hmot. (Jeho hypotéze velmi vytrvale oponoval astronom českého původu Zdeněk Kopal.) Trvalo více než 10 let, než byla Crawfordova hypotéza výpočty výměny hmoty výtečně kvalitativně potvrzena. Vtip spočívá v tom, že rychlá počáteční fáze výměny hmoty, během níž se původní poměr hmot převrátí, probíhá vůči ostatním fázím vývoje tak rychle, že máme statisticky velmi malou šanci podobný systém pozorovat.

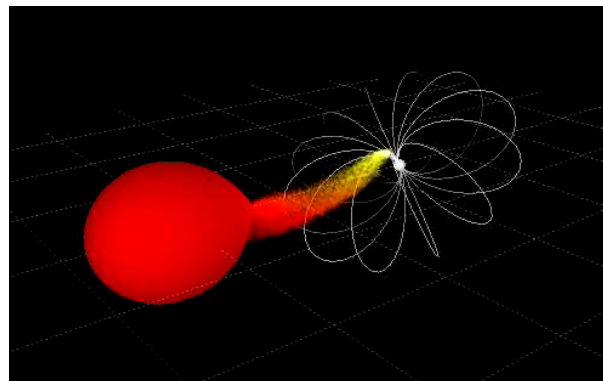


Obrázek 71: Schéma polodotykové soustavy, ve které Rocheův lalok vyplňuje méně hmotná sekundární složka. Převzato z Crawford (1955).

Hvězdy se závojem. Po úspěšném vyřešení vývojového paradoxu se začali astronomové přirozeně zajímat, zda i další výsledky výměny hmoty by bylo možno ztotožnit s nějakými pozorovanými systémy. Kříž a Harmanec (1975) formulovali obecnou hypotézu, že výměna hmoty v pozdějších stádiích případu B vede ke vzniku hvězd se závojem. Hypotéza nabízela vysvětlení vzniku závoje kolem těchto hvězd, důvod jejich velké rotační rychlosti a také vysvětlení některých typů pozorovaných změn. Určitý počet dvojhvězd s očekávanými vlastnostmi se pak skutečně podařilo mezi hvězdami se závojem objevit. Dnes se soudí, že navržený mechanismus je jedním z možných, nemůže však být jediným, neboť se nepodařilo nalézt očekávané procento zákrytových dvojhvězd mezi hvězdami se závojem.

Excentrické dráhy, magnetické polary. Dnes se výměna hmoty považuje za integrální součást ve vývoji dvojhvězd a existují četné více či méně propracované scénáře. Např. Habets (1987) předpokládá, že první fáze výměny hmoty ve hmotné dvojhvězdě vede skutečně ke vzniku hvězdy se závojem a ke vzrůstu oběžné periody, i při částečné ztrátě hmoty a úhlového momentu ze soustavy. Rovněž bral v potaz přenos a ztrátu hmoty ve formě hvězdného větru ještě před tím, než hvězda dosáhla Rocheovy meze. Další přenos hmoty z původně primární složky nastává ve fázi hoření helia a uhlíku a hvězda nakonec vybuchne jako supernova, což vede ke vzniku *výstředné dráhy*, ve které se pohybuje zbytek supernovy — neutronová hvězda — a hmotná hvězda, která během fází přenosu získala hmotu. Ta se při průchodu pericentrem stává opakovaně dynamicky nestabilní a posílá hmotu směrem k neutronové hvězdě, což vede ke vzniku rentgenového záření. Konečným stádiem vývoje hmotné dvojhvězdy může být i *binární pulsar*. Rostoucí nejistota těchto scénářů s rostoucím stádiem vývoje spočívá v naší neznalosti skutečných mechanismů ztráty hmoty a úhlového momentu ze soustavy, o nichž byla již řeč úvodem.

Jiným komplikovaným případem jsou polary — dvojhvězdy s kompaktním bílým trpaslíkem, který má silné *magnetické pole*. Podle modelu Nortona a spol. (2004) pro hvězdu EX Hydrae může takové pole zabránit vzniku normálního akrečního disku, neboť hmota z okolí bodu L_1 odtéká podél magnetických siločar rovnou k pólům bílého trpaslíka (obr. 72). Pozorované změny jasnosti systému se interpretují tak, že tok hmoty není ustálený.



Obrázek 72: Možný model dvojhvězdy (kataklyzmické proměnné hvězdy) EX Hydrae. Hmota přetéká z červeného trpaslíka na bílého trpaslíka, který má ovšem natolik silné magnetické pole, že látka z okolí bodu L_1 odtéká podél magnetických siločar k pólům bílého trpaslíka. Převzato z <http://www.ukaff.ac.uk/movies.shtml>, Norton a spol. (2004).

13 Pulsace hvězd

Problém pulsací hvězd představuje rozsáhlou a rychle se rozvíjející tematiku, a to zejména poté, co se ukázalo, že pomocí rozboru pulsací s různými periodami je možné nezávislým způsobem studovat vnitřní stavbu našeho Slunce. Dnes přibývá pokusů aplikovat stejnou metodu i na jiné hvězdy a vzniká tak obor, kterému se v astronomické literatuře říká *asteroseismologie*. Na webové stránce sdružení European Network of Excellence in AsteroSeismology, <http://www.eneas.info>, lze nalézt několik vynikajících učebních textů zabývajících se podrobně touto problematikou, např. texty Prof. J. Christensena–Dalsgaard a či Prof. C. Aerts(ové). V tomto textu se omezíme jen na stručný výklad.

13.1 Radiální pulsace sférických hvězd

13.1.1 Podmínka pro vznik pulsací

Úvahy o dynamické stabilitě či nestabilitě hvězd vůči pulsacím mohou vycházet z následující úvahy: během oscilace se termodynamický stav elementu hmoty v pulsující hvězdě periodicky mění a po jednom úplném cyklu se vždy vrací do původního stavu. Podle 1. věty termodynamické je

$$dQ = dU + dW. \quad (487)$$

Protože vnitřní energie $U(\rho, T)$ je funkcí stavových veličin, bude její celková změna při cyklickém procesu nulová. Práce W vykonaná při jednom cyklu cyklického procesu bude tedy integrálem změn pohlceného tepla

$$W = \oint dQ \quad (488)$$

a k pulsacím bude opakovaně docházet tehdy, bude-li celková práce na úkor pohlceného tepla kladná, tedy $W > 0$.

Protože entropie má úplný diferenciál, bude ovšem

$$\oint dS = \oint \frac{dQ}{T} = 0, \quad (489)$$

takže část pohlceného tepla se v procesu opět uvolní.

Předpokládejme, že teplota jako funkce času t prodělává malou cyklickou změnu $\delta T(t)$ kolem střední hodnoty T_0 , tedy

$$T(t) = T_0 + \delta T(t). \quad (490)$$

Pak lze místo (489) psát

$$\oint \frac{dQ(t)}{T_0 + \delta T(t)} = \oint \frac{dQ(t)}{T_0} \frac{1}{1 + \delta T(t)/T_0} = 0. \quad (491)$$

S použitím Taylorova rozvoje a zanedbáním členů vyšších řádů můžeme tuto rovnici ještě přepsat do tvaru

$$\oint \frac{dQ(t)}{T_0} \left(1 - \frac{\delta T(t)}{T_0} \right) = 0 \quad (492)$$

a tedy

$$\frac{1}{T_0} \oint dQ(t) = \oint \frac{dQ(t)\delta T(t)}{T_0^2}. \quad (493)$$

Podmínku udržení pulsací můžeme pomocí toho zapsat ve tvaru

$$W = \oint dQ(t) = \oint \frac{\delta T(t)}{T_0} dQ(t) > 0. \quad (494)$$

Protože T_0 je kladné číslo, znamená podmínka (494), že k pohlcování tepla ($dQ > 0$) musí docházet v té části cyklu, kdy teplota prochází maximem ($\delta T > 0$) a naopak. Jinak řečeno: *aby hvězda pulsovala, musí k pohlcování tepla docházet při jejím smršťování a k jeho uvolňování naopak při expanzi.*

Všimněme si ještě, že podmínku pulsační nestability jsme formulovali pro malý element hmoty. Analogická podmínka pro celou hvězdu by měla tvar

$$W = \int_0^{M_*} \oint \frac{\delta T(t, M_R)}{T_0(M_R)} dQ(t, M_R) dM_R > 0, \quad (495)$$

kde kruhová integrace probíhá přes každý element hvězdné hmoty a integrace ve hmotě přes celou hvězdu.

13.1.2 Opacitní mechanismus pulsací

Nejčastějším mechanismem, který může způsobit pulsační nestabilitu, je mechanismus opacitní, který ovšem funguje pouze v oblastech měnící se ionizace některého dostatečně zastoupeného iontu, nejčastěji vodíku či helia. Uvažujme nejprve úplně ionizovaný plyn. Opacitu hvězdné látky lze přibližně popsat pomocí funkční závislosti

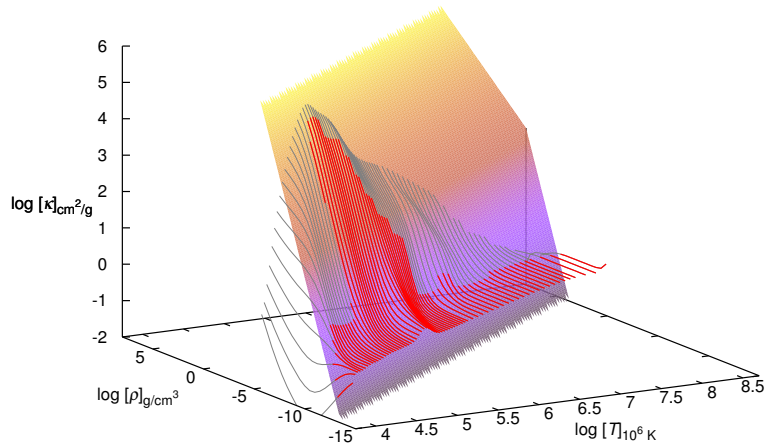
$$\kappa = c\rho^k T^{-m}, \quad (496)$$

kde c je konstanta a k a m jsou kladná čísla. Poměrně dobrou aproximaci pro volně-vázané a volně-volné přechody představují *Kramersovy opacity* (obr. 73), které lze zapsat ve tvaru

$$\kappa = c\rho T^{-3,5}. \quad (497)$$

Pro adiabatický děj je $P \sim \rho^{\frac{5}{3}}$ a tedy $T \sim \rho^{\frac{2}{3}}$, což vede na

$$\kappa = c\rho^{-\frac{4}{3}}. \quad (498)$$



Obrázek 73: Odchytky přibližných Kramersových opacit (polynomické závislosti $\kappa = c\rho T^{-3,5}$, tj. barevná plocha na logaritmickém grafu) od přesnějších hodnot z Rogers a Iglesias (1996).

To ovšem znamená, že při kompresi *s rostoucí hustotou klesá opacita* a tedy pohlcování tepla. Jinými slovy, *plně ionizované části hvězdy jsou stabilní* a ke stabilním pulsacím v nich nemůže docházet.

Jiná je ovšem situace v oblastech *měníci se ionizace*, kde je energie stlačování spotřebována na růst ionizace a teplota roste mnohem pomaleji. Pokud budeme předpokládat závislost teploty na hustotě ve tvaru

$$T \sim \rho^\lambda, \quad (499)$$

pak pro Kramersovu opacitu platí

$$\kappa = c\rho^{1-3,5\lambda} \quad (500)$$

a podmínkou vzniku pulsací je tedy nerovnost

$$1 - 3,5\lambda > 0. \quad (501)$$

To bývá v oblastech měnící se ionizace často splněno. Záleží ovšem na tom, kde se ta která ionizační zóna ve hvězdě nachází. Je-li příliš hluboko uvnitř hvězdy, dojde disipací k utlumení kmitů, zatímco je-li příliš blízko povrchu, je tepelná kapacita příliš malá na to, aby došlo ke globálním oscilacím.

13.1.3 Hrubý odhad periody radiálních pulsací

Již Shapley (1914) argumentoval tím, že základní perioda radiálních pulsací sférických hvězd, kdy hvězda zvětšuje a zmenšuje svůj poloměr tak, že zachovává po celou dobu svůj sférický tvar, musí být zhruba dána dynamickou časovou škálou

$$t_{\text{dyn}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sim \sqrt{\frac{1}{G\bar{\rho}}}, \quad (502)$$

kde $\bar{\rho}$ je průměrná hustota hvězdy. O té tedy základní perioda radiálních pulsací vypovídá. Pulsace můžeme v prvním přiblížení chápat jako *akustické hustotní kmity* s vlnovou délkou rovnou průměru hvězdy. Taková vlna se šíří rychlostí zvuku v_z a perioda radiální pulsace je tak dána výrazem

$$\Pi = \frac{2R}{\bar{v}_z}, \quad (503)$$

kde \bar{v}_z je střední rychlost zvuku přes celou pulsační periodu. Zvukové kmity lze považovat za adiabatické a z teorie akustických kmitů plyne pro rychlost zvuku

$$v_z^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\text{ad}} = \gamma_{\text{ad}} \frac{P}{\rho}, \quad (504)$$

kde $\gamma_{\text{ad}} = \frac{c_P}{c_V}$ pro adiabatický děj ($c = 0$) označuje přímo poměr specifických tepel při konstantním tlaku a objemu (viz rovnice (352)).

Pokud uvažujeme hvězdu jako plynovou kouli, plyne z rovnice (162) pro vnitřní energii směsi iontového a elektronového plynu (bez příspěvku záření, tj. $\beta = 1$), že příspěvek tepelné energie dE_t připadající na elementární objem dV bude

$$dE_t = U \rho dV = \frac{3}{2} P dV, \quad (505)$$

kde P opět označuje celkový tlak směsi plynu. Celkovou tepelnou energii dostaneme integrací přes celý objem hvězdy, tedy

$$E_t = \frac{3}{2} \int P dV. \quad (506)$$

Z věty o viriálu víme, že mezi celkovou kinetickou tepelnou energií a celkovou potenciální energií E_G v soustavě, která se nalézá v hydrostatické rovnováze, platí vztah

$$E_G = -2E_t. \quad (507)$$

Za předpokladu, že hvězda osciluje kolem rovnovážného stavu odpovídajícího stavu hydrostatické rovnováhy, a za předpokladu polytropního modelu lze tedy střední rychlost zvuku odhadnout s pomocí věty o viriálu (507):

$$E_G = -2 \frac{3}{2} \int_V P dV = -3 \int_{M_R} \frac{P}{\rho} dM_R = -3 \int_{M_R} \frac{v_z^2}{\gamma} dM_R \approx -\frac{3M_*}{\gamma} \bar{v}_z^2, \quad (508)$$

kde pro gravitační potenciální energii E_G lze pro sférické rozložení hmoty psát

$$E_G = -w \frac{GM^2}{R}. \quad (509)$$

Faktor w nabývá hodnoty $\frac{3}{5}$ pro homogenní rozložení hmoty a hodnoty $\frac{3}{2}$ pro hvězdy na hlavní posloupnosti. Hodnota faktoru w roste se stoupající koncentrací hmoty směrem do centra.

Z rovnic (508) a (509) tedy dostáváme

$$\bar{v}_z^2 = -\frac{\gamma E_G}{3M} = \frac{\gamma w GM}{3R}. \quad (510)$$

Dosažením do rovnice (503) pro pulsační periodu získáme výraz

$$\Pi = 2 \left(\frac{3}{\gamma w} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (511)$$

S využitím definice střední hustoty

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \bar{\rho} \quad (512)$$

můžeme rovnici (511) ještě upravit do tvaru

$$\Pi \sqrt{\bar{\rho}} = \sqrt{\frac{9}{\pi G \gamma w}}, \quad (513)$$

který poprvé odvodil Eddington (1918).

Pokud vypočteme střední hustotu Slunce z hodnot poloměru a hmotnosti (429, 433)

$$\bar{\rho}_\odot = 1408,977 \text{ kg m}^{-3}, \quad (514)$$

můžeme udávat střední hustotu hvězdy v těchto jednotkách. Za předpokladu polytropního modelu s $n = 3$ (tedy $\gamma = \frac{4}{3}$) a pro $w = \frac{3}{2}$ pak pro pulsační periodu ve dnech platí

$$\Pi \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\odot}} = 0,0451716 = Q'. \quad (515)$$

Konstanta na pravé straně tedy udává periodu radiální pulsace našeho Slunce, pokud by bylo pulsačně nestabilní. Např. pro chladného veleobra spektrální třídy M0Ia s hmotností a poloměrem, jaký jsme uvažovali v tabulce (6), dostaneme podle (515) $\Pi = 260,^d0$. Naopak pro bílého trpaslíka Sirius B o hmotnosti $1,034 M_\odot$ a poloměru $0,0084 R_\odot$ vychází pulsační perioda pouhé 6,05 sekundy.

Vzhledem k tomu, že střední hustota $\bar{\rho} = M/V$, kde M a V jsou hmotnost a objem hvězdy, je možné pro sférické modely psát úměru

$$Q' = \Pi \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{R_\odot} \right)^{-\frac{3}{2}} = \Pi \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{L_\odot} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff}\odot}} \right)^3, \quad (516)$$

přičemž konstantě Q' se říká *pulsační konstanta*.

Pro reálné hvězdné modely ovšem Q' není konstanta, ale ukazuje se, že

$$Q' \sim \left(\frac{R}{M} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (517)$$

Vemury a Stothers (1978) z toho s použitím Carsonových opacit odvodili následující vztah pro periodu radiální pulsace nerotující hvězdy *ve dnech*

$$\Pi \doteq 0,025 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{\frac{7}{4}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-\frac{3}{4}}, \quad (518)$$

přičemž koeficient úměry 0,025 vykazuje rozptyl $\pm 0,001$.

Vztah (518) dává pěkné výsledky. Např. pro primární složku spektroskopické dvojhvězdy Spika (α Vir A), která je proměnnou hvězdou typu β Cep, určili Herbison-Evans a spol. (1971) s pomocí intenzitního interferometru hodnoty $M/M_{\odot} = 10,9 \pm 0,9$, $R/R_{\odot} = 8,1 \pm 0,5$, což podle vztahu (518) dává teoretickou hodnotu pulsační periody $0,162$. Přihlédneme-li k udaným chybám poloměru a hmotnosti, nachází se teoretická pulsační perioda v rozmezí $0,1366$ až $0,1920$. Skutečně pozorovaná pulsační perioda je $0,174$.

13.1.4 Vztahy perioda – zářivý výkon – barva

Výše uvedené vztahy vysvětlují rovněž existenci empirického vztahu perioda – zářivý výkon pro cefeidy a jiné typy radiálně pulsujících hvězd. Vztah (516) můžeme psát v logaritmickém tvaru

$$\log \Pi = \log Q - 0,5 \log(M/M_{\odot}) + 1,5 \log(R/R_{\odot}). \quad (519)$$

Z definice efektivní teploty plyne

$$\log(R/R_{\odot}) = 8,474 - 0,2 M_{\text{bol}} - 2 \log T_{\text{eff}}, \quad (520)$$

takže po dosazení do (519) dostaneme

$$\log \Pi = 12,71 + \log Q - 0,5 \log(M/M_{\odot}) - 3 \log T_{\text{eff}} - 0,3 M_{\text{bol}}. \quad (521)$$

Empirické závislosti zářivý výkon – perioda bývají často udávány ve tvaru

$$M_V = a \log \Pi + b, \quad (522)$$

kde koeficienty a a b jsou empiricky určeny pro danou skupinu pulsujících hvězd.

Rovnici (521) můžeme upravit do tvaru

$$M_V = 42,37 + 3,333 \log Q - BC(T_{\text{eff}}) - 3,333 \log \Pi - 10 \log T_{\text{eff}} - 1,667 \log(M/M_{\odot}). \quad (523)$$

Pulsační nestabilita obvykle odpovídá dosti úzkému rozmezí efektivních teplot a tak pouze člen odpovídající hmotnosti hvězdy má vliv na empirické koeficienty a a b , neboť pro danou skupinu hvězd existuje obvykle vztah mezi hmotností a zářivým výkonem ve tvaru

$$\log(M/M_{\odot}) = c M_{\text{bol}} + d. \quad (524)$$

Konkrétně pro klasické cefeidy byl tento vztah zpřesněn pomocí pozorování s velkým optickým interferometrem Evropské jižní observatoře v práci Kervelly a spol. (2004), kteří udávají hodnoty $a = -2,769$ a $b = -1,440$. Petersen a Christensen-Dalsgaard (1999) udávají pro δ Sct hvězdy na základě nové kalibrace pomocí družice Hipparcos hodnoty b v rozmezí $-3,2$ až $-4,0$.

V některých empirických závislostech se vliv efektivní teploty bere v potaz pomocí členu, který charakterizuje barvu hvězdy některým fotometrickým indexem, např. $(b - y)$. To jsou pak vztahy zářivý výkon – barva – perioda, nejčastěji ve tvaru

$$M_V = a' \log \Pi + b'(b - y) + c', \quad (525)$$

kde koeficienty a' , b' a c' jsou opět empiricky určeny pro danou skupinu pulsujících hvězd.

Je ovšem dobře si uvědomit, že pokud si v logaritmickém tvaru vyjádříme dolní mez rotační periody nějaké hvězdy³¹, t.j. Keplerovu rotační rychlost na uvažovaném rovníkovém poloměru, při aproximaci pomocí Rocheova modelu, dostaneme rovnici (viz např. Harmanec 1987)

$$\log \Pi = -0,936 - 0,5 \log(M/M_{\odot}) + 1,5 \log(R/R_{\odot}). \quad (526)$$

což je rovnice formálně totožná s rovnicí (519) pro $\log Q = -0,936$. Dodejme, že pro jednoduchý polytropní model Eddingtonův je $\log Q = -1,433$. Časové škály radiální pulsace a rotace hvězd jsou tedy srovnatelné a v konkrétních případech nemusí být snadné rozhodnout, co je skutečnou fyzikální příčinou pozorovaných změn jasnosti či radiální rychlosti hvězdy.

13.2 Neradiální pulsace

Neradiální pulsací rozumíme takovou (multi)periodickou změnu tvaru hvězdy, při kterém dochází k odchylkám jak od sférické, tak osové symetrie. Vznik neradiálních pulsací může kromě již zmiňovaného opacitního mechanismu souviset s rotací hvězd nebo se slapovými silami, je-li uvažovaná hvězda složkou těsné dvojhvězdy. Základy teorii neradiálních pulsací položil svou prací Ledoux (1951) a později byla rozvíjena např. v pracích Osaki (1986), Osaki a Shibahashi (1986). Kambe a Osaki (1988) publikovali i serie profilů čar ovlivněných neradiálními pulsacemi. Je třeba ale říci, že fyzikálně konsistentní model takových pulsací pro rychleji rotující hvězdy dosud neexistuje, neboť jde o velmi obtížný úkol. Je to pochopitelné — jak jsme si již ukázali, neexistují dosud ani fyzikálně konsistentní modely rychle rotujících hvězd. Při popisu neradiálních pulsací se proto volí určitá zjednodušení.

Zpravidla se předpokládá, že osa symetrie oscilací je identická s osou rotace hvězdy a že na hvězdu nepůsobí žádné vnější síly. Pulsace dané hvězdy se vyšetřují pomocí systému nelineárních parciálních

³¹To je také dolní mezí oběžné periody dvojhvězdy tvořené námi uvažovanou hvězdou a sekundárem zanedbatelné hmotnosti.

diferenciálních rovnic, do nichž se zavádějí periodické perturbace, a vyšetřuje se numericky reakce hvězdy na ně. Soustavu rovnic s perturbacemi tvoří pohybová rovnice, rovnice kontinuity a Poissonova rovnice. Pokud se hvězda ukáže jako pulsačně nestabilní, získají se řešení s kruhovými pulsačními frekvencemi ω . Skalární veličiny se obvykle popisují pomocí sférických harmonických funkcí. Pro popis polohy bodů na povrchu hvězdy se používá zápis ve sférických souřadnicích (r, ϑ, φ) , kde r je radiální vzdálenost od středu hvězdy, ϑ úhel měřený od ‘severního’ pólu hvězdy v rozmezí $\langle 0, \pi \rangle$ a φ úhel měřený podél hvězdného rovníku v rozmezí $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Složky vektoru rychlosti V lze zapsat pomocí sférických harmonických funkcí $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ ve tvaru

$$V_r(r, \vartheta, \varphi, t) = A_n(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) e^{i\omega t}, \quad (527)$$

$$V_\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t) = A_n(r) k \frac{\partial Y_l^m(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} e^{i\omega t}, \quad (528)$$

$$V_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{A_n(r) k}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_l^m(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} e^{i\omega t}, \quad (529)$$

kde k je poměr amplitud horizontální a radiální rychlosti pulsace. Pro danou frekvenci pulsace souvisí s hmotou hvězdy M , jejím poloměrem R a gravitační konstantou G podle vztahu

$$k = \frac{GM}{\omega^2 R^3}. \quad (530)$$

Veličina ω označuje kruhovou frekvenci

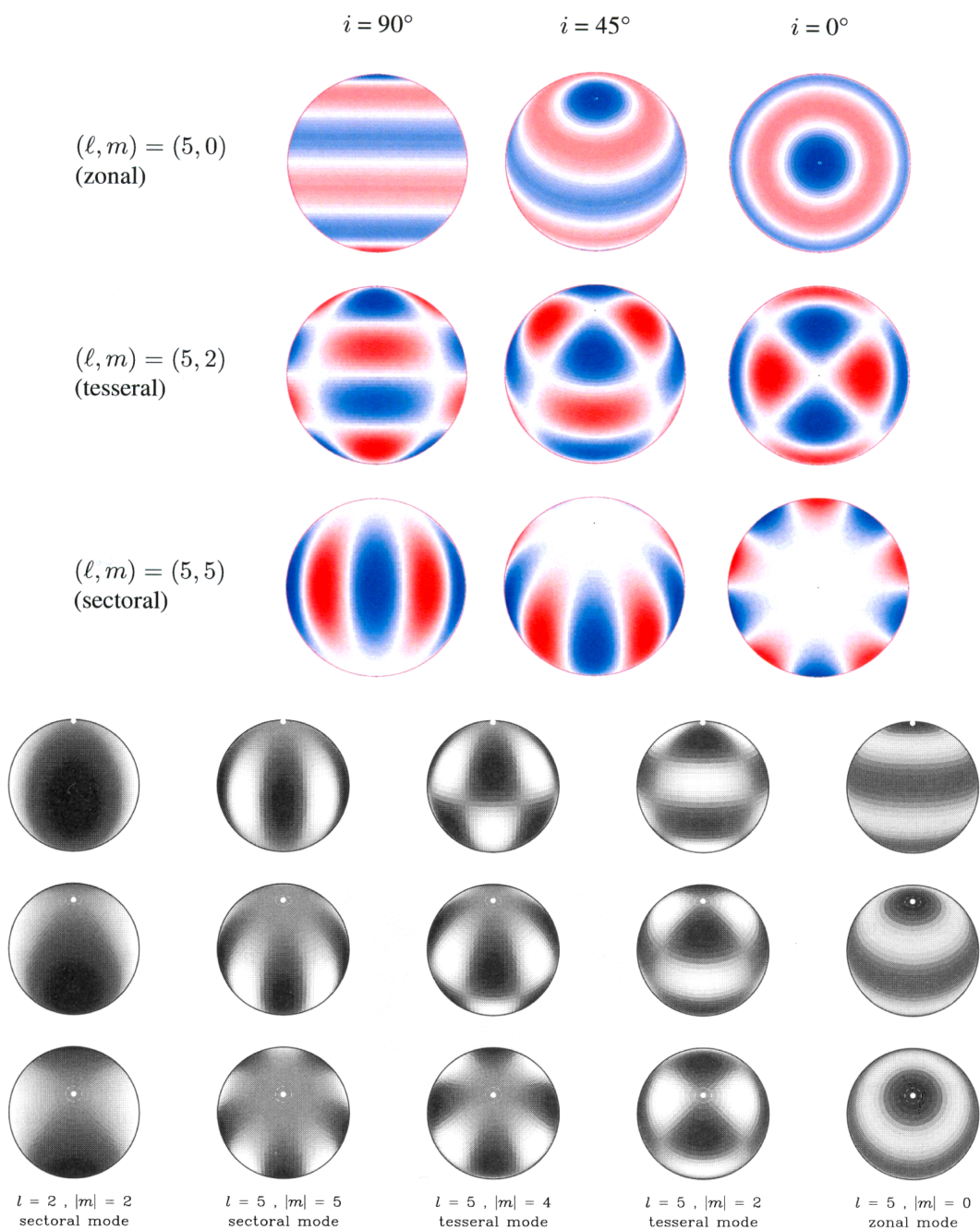
$$\omega = \frac{2\pi}{P_{n,l,m}}. \quad (531)$$

$P_{n,l,m}$ je perioda daného pulsačního módu popsaného kvantovými čísly (n, l, m) :

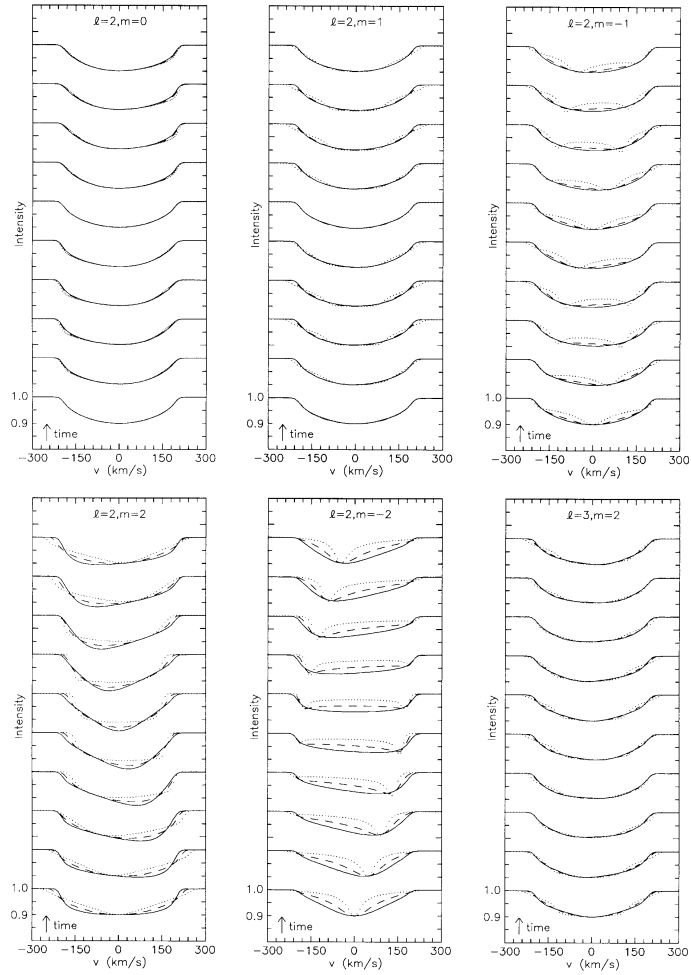
- n označuje počet pulsačních vln v radiálním směru;
- l udává, kolik je na povrchu hvězdy linií, které neprodělávají žádný radiální pohyb;
- m v rozmezí $-l$ až l je počet vln v azimutálním směru (podél souřadnice φ).

Pro dané kvantové číslo l existuje tedy $2l + 1$ módů s různými kvantovými čísly m . Pro nerotující hvězdu mají ale tyto módy všechny stejnou periodu. Pro rotující hvězdu označují módy s $m < 0$ pulsace postupující ve směru rotace hvězdy a módy s $m > 0$ pulsace retrográdní. Pulsační módy, pro něž $|m| = l$ se nazývají *sektorální módy* pulsace. Módy, pro něž $0 \neq |m| \neq l$, se označují jako *teserální* a módy s $m = 0$ jako *zonální* či osově symetrické. Radiální pulsace v tomto pojetí lze chápat jako speciální případ pro $l = 0$. Módy pro různá kvantová čísla m a l jsou znázorněny graficky na obrázku 74. Spočtené profily spektrálních čar pro různé módy s kvantovými čísly m a l a pro různé fáze dané pulsační periody lze nalézt na obrázcích 75 a 76.

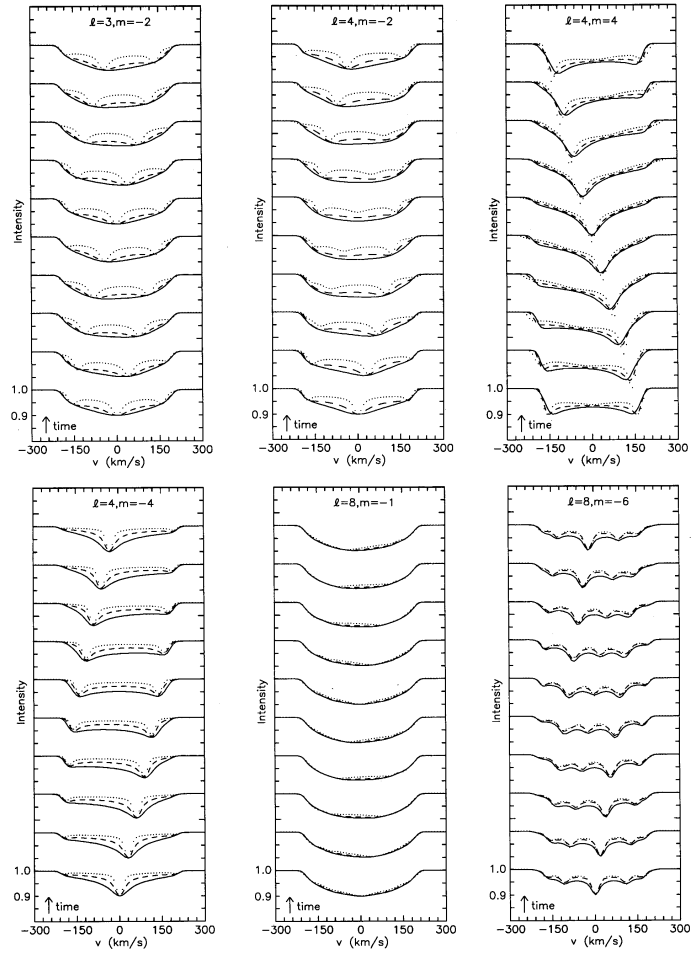
Townsend (1997) publikoval popis dosud asi jednoho z nejdokonalejších programů na výpočet teoretických profilů odpovídajících různým módům pulsace.



Obrázek 74: Příklady neradiálních pulsací s různými kvantovými čísly l a m . Obrázky jsou převzaty z disertačních prací Uytterhoeven(ové) (2004) a Schrijverse (1999).



Obrázek 75: Příklady profilů čar způsobených neradiálními pulsacemi s různými kvantovými čísly l a m . Plné, čárkované a tečkované čáry ukazují profily pro poměr rotační frekvence k pulsační frekvenci v korotující soustavě v hodnotách 0,01, 0,2 a 0,5. Převzato z práce Aerts(ové) a Waelkense (1993).



Obrázek 76: Příklady profilů čar způsobených neradiálními pulsacemi s různými kvantovými čísly l a m pro vyšší hodnoty módů. Legenda a zdroj jsou stejné jako u obrázku 75.

13.2.1 Sektorální pulsace rotujících hvězd

Velmi názorným příkladem neradiálních pulsací, který lze využít k odhadu některých fyzikálních veličin, jsou sektorální pulsace rotujících hvězd. Jak je ukázáno na obrázcích 76 a 77, projeví se sektorální mód v profilech spektrálních čar rozšířených rotací formou vlnek putujících postupně přes profil od fialového k červenému křídlu čar.

Označíme-li σ pulsační frekvenci sektorálního módu pozorovanou pozorovatelem na Zemi, σ_0 skutečnou frekvenci pulsace v referenční soustavě rotující s hvězdou, Δt dobu mezi průchody dvou následujících vlnek přes střed spektrální čáry, P periodu, za kterou se konkrétní putující vlnka vrátí zpět do středu čáry, P_{rot} rotační periodu hvězdy, P_m periodu pulsačního módu m v soustavě rotující s hvězdou a Ω rotační frekvenci hvězdy, pak zřejmě platí

$$\Omega = \frac{1}{P_{\text{rot}}}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{P_m}, \quad \sigma = \frac{1}{\Delta t} = -\frac{m}{P}. \quad (532)$$

Pro okamžitou radiální rychlost putující vlnky $RV_m(t)$, kterou lze v serii pozorovaných profilů přímo měřit, lze psát

$$RV_m(t) = RV + V_e \sin i \sin \left(\frac{2\pi(t - t_0)}{P} \right) + F(t), \quad (533)$$

kde $F(t)$ označuje rychlostní pole pulsace, RV radiální rychlost hvězdy, t_0 okamžik průchodu konkrétní uvažované vlnky středem čáry, a V_e lineární rovňkovou rotační rychlost hvězdy. Rychlostní pole $F(t)$ má typické amplitudy do 10 km s^{-1} , takže je lze pro následující úvahy pro rychleji rotující hvězdy statisticky zanedbat.

Dále platí následující zřejmé vztahy

$$V_a = \frac{2\pi R_e}{mP_m}, \quad P = \frac{2\pi R_e}{V_e + V_a}, \quad P_{\text{rot}} = \frac{2\pi R_e}{V_e} \quad (534)$$

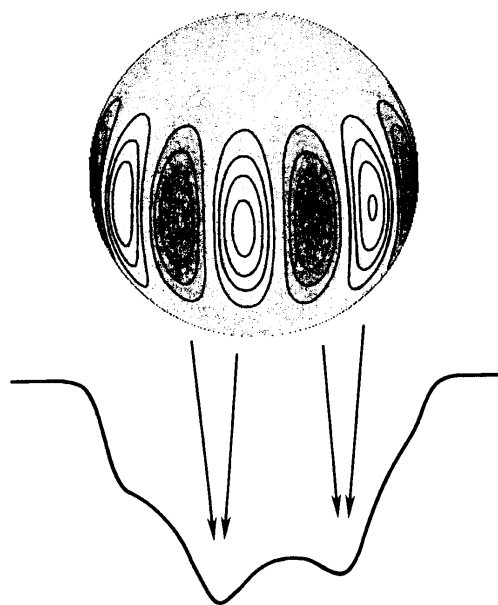
a tudíž

$$P^{-1} = P_{\text{rot}}^{-1} - (mP_m)^{-1}, \quad (535)$$

kde R_e je rovňkový poloměr hvězdy a V_a lineární rovňková fázová rychlost, se kterou postupuje pulsační vlna. Za předpokladu, že radiální rychlost hvězdy se nemění, plyne z derivace rovnice (533) podle času následující výraz pro *zrychlení* a_0 putujících vlnek při přechodu přes střed spektrálních čar vztah

$$a_0 = \frac{2\pi V_e \sin i}{P}. \quad (536)$$

Za předpokladu, že se nám podaří získat serii profilů hvězdy, v nichž bude zřetelně přítomen jeden konkrétní vyšší sektorální mód pulsace ve formě putujících vlnek, lze postupovat následovně:



Obrázek 77: Na příkladu sektorální pulsace modů $l = 8$ a $m = -8$ je ilustrováno, jak vznikají putující vlnky v profilech spektrálních čar rozšířených rotací. Tmavé oblasti se pohybují směrem od pozorovatele. Obrázek je převzat z práce Vogta a Penroda (1983).

1. Z pozorovaných spektrálních profilů studované hvězdy určíme její promítnutou rotační rychlost $V_e \sin i$. Pokud je znám sklon i rotační osy nebo její lze odhadnout, budeme znát i rovníkovou rotační rychlost V_e .
2. Proměřením radiálních rychlostí putujících vlnek v celé serii spekter můžeme metodou nejmenších čtverců určit parametry křivky radiálních rychlosti (533), a tedy i zrychlení a_0 a dobu Δt . Z rovnice (536) tak dostaneme odhad pozorované periody P pulsačního módu.
3. Pro dostatečně hustou a dlouhou sérii spekter se lze pokusit o jednoznačnou identifikaci jednotlivých putujících vlnek, a tím pádem o nezávislý odhad periody P .
4. Se známými hodnotami P a V_e můžeme po vhodné kombinaci předchozích rovnic určit další veličiny, charakterizující pulsace hvězdy

$$V_a = V_e(P_{\text{rot}}/P - 1), \quad (537)$$

$$m = -P/\Delta t \quad \text{pro } P < P_{\text{rot}}, \quad (538)$$

$$m = +P/\Delta t \quad \text{pro } P > P_{\text{rot}}, \quad (539)$$

$$P_m = -P \cdot P_{\text{rot}}/(m(P_{\text{rot}} - P)). \quad (540)$$

Je ovšem třeba si uvědomit, že ke spočtení numerických hodnot všech veličin je třeba znát dvě za tří obecně předem neznámých veličin R_e , P_{rot} a i . Jak jsme si ale ukázali v kapitole o rotaci hvězd,

Ize v některých případech docela dobře odhadnout např. horní a dolní hranici možné rotační periody hvězdy.

Při přesnějších úvahách se uvažuje vztah mezi pozorovanou frekvencí σ a skutečnou pulsační frekvencí σ_0 ve tvaru

$$\sigma = \sigma_0 - m\Omega(1 - C_l) + \frac{m^2\Omega^2 D_l}{\sigma_0}, \quad (541)$$

kde C_l a D_l jsou veličiny, které zahrnují vliv Coriolisovy a odstředivé síly a závisejí na vnitřní stavbě hvězdy. To při dalším zdokonalení teorie a pozorování dává šanci na rozvoj astreroseismologie i pro horké rotující hvězdy.

13.3 Jednoduché vlnění

Možné oscilace v nitru hvězdy se vypočítávají jako řešení hydrodynamických rovnic. Za určitých zjednodušujících předpokladů je možné vyřešit vlnovou rovnici pro poruchy analyticky, což provedeme v této kapitole.

Základní rovnice hydrodynamiky. Nejprve uvedeme vztah mezi lagrangeovskou a eulerovskou derivací funkce $\phi(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi, \quad (542)$$

čili mezi totální časovou derivací sledující pohyb a parciální časovou derivací lokální (ve fixním bodě).

Rovnice kontinuity, pohybová rovnice, Poissonova rovnice a adiabatické přiblížení³² (pro jednoatomový plně ionizovaný plyn $\gamma = \frac{5}{3}$) mají tvar

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{v} = 0, \quad (543)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho\nabla\Phi, \quad (544)$$

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = 4\pi G\rho, \quad (545)$$

$$P = K\rho^\gamma. \quad (546)$$

$$(547)$$

Někdy se tytéž rovnice přepisují jako

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (548)$$

³²Obecně samozřejmě dochází k výměně tepla s okolím během oscilace, ale pro rychlé oscilace můžeme dQ zanedbat. Pak ovšem ze soustavy vypadne teplota T , respektive rovnice tepelné rovnováhy.

v pohybové rovnici se nepíše gravitační potenciál, nýbrž obecné zrychlení \mathbf{f} (respektive gravitační $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla P + \rho \mathbf{f}, \quad (549)$$

místo Poissonovy rovnice lze použít její integrál

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV \quad (550)$$

a místo adiabaty její derivaci

$$\frac{dP}{d\rho} = K \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho}. \quad (551)$$

Rovnovážný stav. Rovnováha znamená, že všechny časové derivace nulové, včetně $\mathbf{v} = 0$. Rovnice kontinuity, pohybová, Poissonova a adiabata se pak značně zjednoduší

$$0 = 0, \quad (552)$$

$$0 = -\nabla P_0 - \rho \nabla \Phi_0, \quad (553)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (554)$$

$$P_0 = K \rho_0^\gamma. \quad (555)$$

Perturbace. Pro malé změny tlaku, hustoty a gravitačního potenciálu v daném místě (\mathbf{r}, t) můžeme psát

$$P = P_0 + P', \quad (556)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad (557)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi'. \quad (558)$$

$$(559)$$

Veličiny se samozřejmě mohou změnit i kvůli přemístění z \mathbf{r}_0 do $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ ($P = P_0 + \delta P$), pak

$$\delta P = P' + \nabla P_0 \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (560)$$

$$\delta\rho = \rho' + \nabla\rho_0 \cdot \delta\mathbf{r}, \quad (561)$$

$$\delta\Phi = \Phi' + \nabla\Phi_0 \cdot \delta\mathbf{r}. \quad (562)$$

$$(563)$$

To je ekvivalentní vztahu (542) pro lagrangeovskou a eulerovskou derivaci. Rychlosti se v tomto případě týkají pouze poruch

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial t}. \quad (564)$$

Rovnice pro perturbace získáme dosazením a odečtením rovnovážného stavu

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_0 \mathbf{v} = 0, \quad (565)$$

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P' - \rho_0 \nabla \Phi' - \rho' \nabla \Phi_0, \quad (566)$$

$$\nabla \cdot \nabla \Phi' = 4\pi G \rho', \quad (567)$$

$$P' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho'. \quad (568)$$

Ověřit to můžeme snadno

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') + \nabla \cdot (\rho_0 + \rho') \mathbf{v} = 0, \quad (569)$$

kde první člen je nulový, neboť jde o derivaci rovnovážného stavu ρ_0 , poslední člen je zanedbatelným součinem dvou poruch $\rho' \mathbf{v}$. Obdobně postupujeme u pohybové rovnice

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho') \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla(p_0 + p') - (\rho_0 + \rho') \nabla(\Phi_0 + \Phi') \\ &= -\nabla p_0 - \nabla p' - \rho_0 \nabla \Phi_0 - \rho' \nabla \Phi_0 - \rho_0 \nabla \Phi' - \rho' \nabla \Phi'. \end{aligned} \quad (570)$$

V případě adiabataty použijeme Taylorův rozvoj

$$P_0 + P' = K(\rho_0 + \rho')^\gamma = K\rho_0^\gamma \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^\gamma \doteq K\rho_0^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\rho'}{\rho_0}\right). \quad (571)$$

13.3.1 Akustické vlny v homogenním prostředí (p-módy)

Jako první vyšetříme vlny v *homogenním* prostředí, bez gravitace. (Tj. poněkud v protikladu se stavbou hvězd a silnou koncentrací ke středu, ale perturbace jsou zde mnohem menší než rovnovážné gradienty!) Nejen časové, ale i *prostorové* gradienty jsou nulové ($\nabla \Phi_0 = 0$), Φ' je malé pro rychle se měnící ρ' , čili zanedbáme i $\rho_0 \nabla \Phi'$. Pohybová rovnice pak přejde na tvar

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta \mathbf{r}}{\partial t^2} = -\nabla P'. \quad (572)$$

Do její divergence

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = -\nabla \cdot \nabla P' \quad (573)$$

dosadíme vlevo časový integrál rovnice kontinuity ($\nabla \rho_0 = 0$)

$$\rho' + \nabla \cdot \rho_0 \delta \mathbf{r} \simeq \rho' + \rho_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (574)$$

a vpravo adiabatické přiblížení (568), tudíž

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{\rho'}{\rho_0} \right) = -\nabla \cdot \nabla \left(\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \rho' \right). \quad (575)$$

Výsledkem je *vlnová rovnice*

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 \rho', \quad (576)$$

kde rychlost zvuku (dle stavové rovnice)

$$c_s \equiv \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma \frac{k_B T_0}{\mu m_H}} > 0. \quad (577)$$

Rovnice (576) má řešení v podobě vln

$$\rho' = a e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (578)$$

po jehož dosazení zjistíme

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a i^2 \omega^2 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \rho' = c_s^2 a i^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (579)$$

tedy musí platit *disperzní vztah*

$$\omega^2 = c_s^2 |\mathbf{k}|^2. \quad (580)$$

Vlny s daným vlnočtem $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ musí mít předepsanou frekvenci $\omega = \frac{2\pi}{P}$.

Šíření takových zvukových vln v nehomogenním prostředí můžeme alespoň kvalitativně odhadnout pomocí geometrické optiky. Teplota T , a tedy i rychlost zvuku c_s , v nitru hvězdy rostou s hloubkou. Podle Snellova zákona lomu

$$\sin \theta_2 = \frac{c_s(R_2)}{c_s(R_1)} \sin \theta_1 \quad (581)$$

se paprsek lomí *od kolmice* a v určité hloubce můžeme očekávat totální odraz.

13.3.2 Vnitřní gravitační vlny (g-módy)

Studujme nyní složitější případ jednorozměrné vrstvy plynu v homogenním gravitačním poli, ve které gradient tlaku vyrovnává gravitační zrychlení ($0 = -\nabla P_0 + \rho_0 \mathbf{g}_0$). Pohybová rovnice je pak složitější

$$\rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P' + \rho' \mathbf{g}_0, \quad (582)$$

protože oscilace jsou udržovány *vztlakovou silou*, nejen gradientem tlaku.

Řešení hydrodynamických rovnic zde neuvedeme. Uvědomíme si jen, že g-módy jsou obecnější a vlastně v sobě zahrnují i p-módy. Navíc totiž existují řešení s mnohem nižšími frekvencemi. Zavádí se Bruntova–Väisäläova (vztlaková) frekvence (Christensen-Dalsgaard 2003)

$$N^2 = g_0 \left(\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln P_0}{dr} - \frac{d \ln \rho_0}{dr} \right), \quad (583)$$

příčmež pro $N^2 > 0$ nastávají oscilace, kdežto pro $N^2 < 0$ konvektivní nestabilita, a disperzní relace má tvar

$$\omega^2 = \frac{N^2}{1 + k_r^2/k_h^2}. \quad (584)$$

Takové vlny se patrně vyskytují v nitru Slunce (pod konvektivní zónou).

13.3.3 Povrchové gravitační vlny (f-módy)

Vlny vznikají i na *diskontinuitě* hustoty, jako vlny na moři. Předpokládejme nestlačitelnou kapalinu ($\rho' = 0$), nekonečnou hloubku, volný povrch a $g = \text{konst.}$ Uvnitř kapaliny platí

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (585)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P'. \quad (586)$$

Divergence pohybové rovnice dává ihned rovnici

$$0 = \nabla \cdot \nabla P'. \quad (587)$$

Řešení hledáme v podobě vln ve směru x (tj. podél hladiny)

$$P' = f(z) \cos(k_h x - \omega t), \quad (588)$$

přítom $f(z)$ musí splňovat diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = k_h^2 f. \quad (589)$$

Snadno nahlédneme, že

$$f(z) = a \exp(-k_h z) + b \exp(k_h z). \quad (590)$$

Podle první hraniční podmínky požadujeme, aby pro $z \rightarrow \infty$ f konvergovalo. Pak musí být $b = 0$.

Jaký je však vztah mezi ω a k (jistě nebudou dovolené všechny vlny)? Využijeme druhou hraniční podmínku: na rozhraní ($z + \delta z$) je vždy $P = \text{konst.}$, neboli $\delta P = 0$. Lagrangeovskou změnu tlaku tedy napíšeme jako

$$\delta P = P' + \nabla P_0 \cdot \delta \mathbf{r} = P' + \rho_0 g_0 \delta z = 0, \quad (591)$$

odkud

$$\delta z = -\frac{1}{\rho_0 g_0} P'. \quad (592)$$

Zároveň však musí pro δz platit pohybová rovnice (586)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta z}{\partial t^2} = -\nabla_z P' = -\frac{df}{dz} \cos(k_h x - \omega t) = k_h a \exp(-k_h z) \cos(k_h t - \omega t), \quad (593)$$

jejíž řešení je nasnadě

$$\delta z = -\frac{k_h}{\rho_0 \omega^2} a \exp(-k_h z) \cos(k_h x - \omega t) = -\frac{k_h}{\rho_0 \omega^2} P'. \quad (594)$$

Proto

$$-\frac{1}{\rho_0 g_0} P' = -\frac{k_h}{\rho_0 \omega^2} P' \quad (595)$$

a disperzní relace je

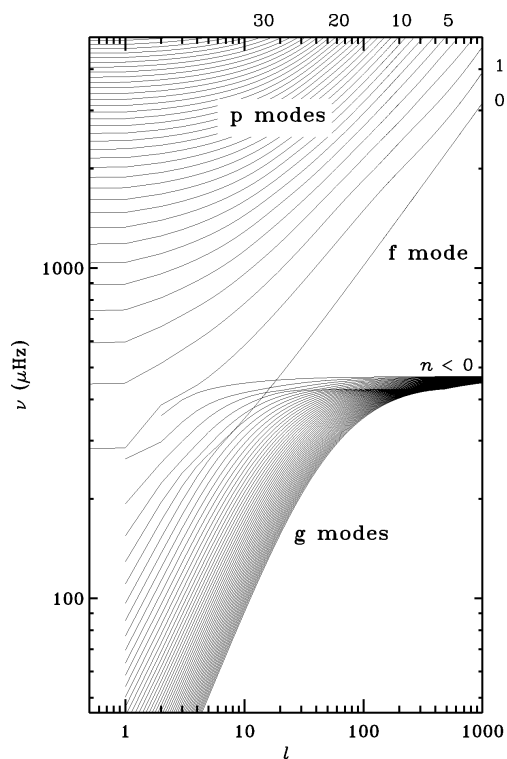
$$\omega^2 = g_0 k_h. \quad (596)$$

Povšimněme si, že ρ_0 se zkrátilo — z povrchových oscilací (f-módů) nelze zjistit nic o vlastnostech nitra hvězdy!

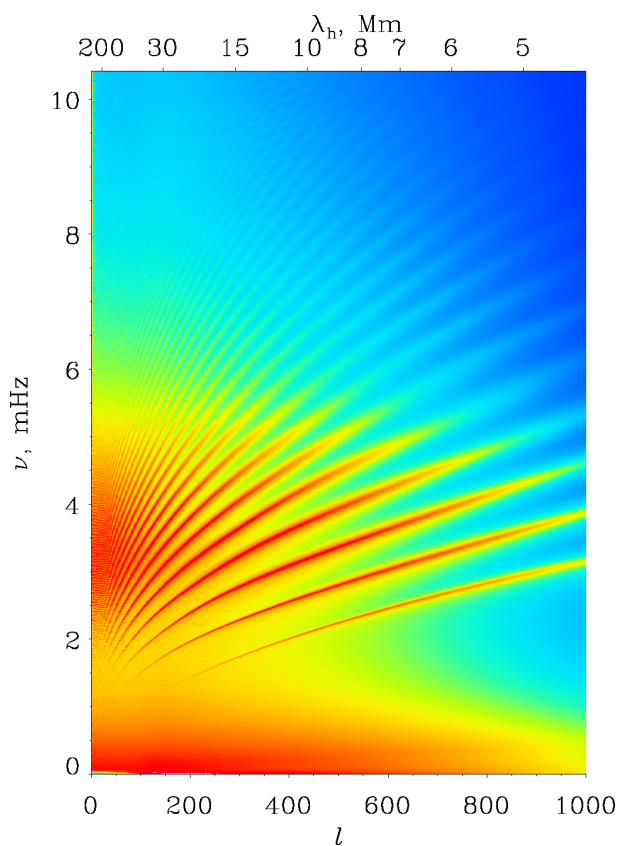
Přesná sférická řešení. Pokud bychom hydrodynamické rovnice řešili za předpokladu kulové symetrie, dostali bychom řešení ve tvaru kulových funkcí; pro nitro Slunce by výsledek vypadal jako na obrázku 78.

Pozor! Lineární teorie nijak neomezuje amplitudy oscilací. Obdobně jako u matematického kyvadla mohou být výchylky teoreticky nekonečně velké, ale v praxi to samozřejmě nenastává. Dopplerovská měření Slunce poskytují amplitudy spolu s frekvencemi (obr. 79), kteréžto s teorií dobře souhlasí.

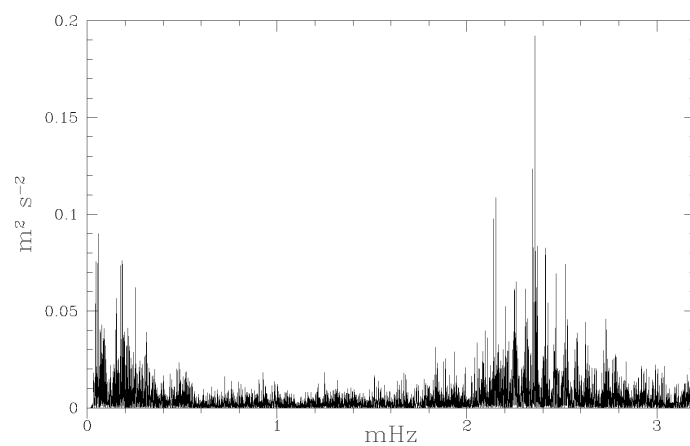
Oscilace podobné jako na Slunci byly pozorovány i na površích několika vzdálených hvězd, například u α Cen A (obr. 80).



Obrázek 78: Teoreticky spočtené frekvence možných stacionárných oscilácií jako funkce stupně l , pro sluneční nitro (tj. s daným průběhem $\rho_0(R)$, $P_0(R)$, $T_0(R)$). Čísla vpravo nahoře popisují radiální řád n . Převzato z Christensen-Dalsgaard (2003).



Obrázek 79: Amplitudy oscilací Slunce (vyznačené barevnou škálou) jako funkce stupně l a frekvence ν , odvozené inverzí z dopplerovských měření slunečního povrchu družicí SOHO/MDI. Nejvýznamnější jsou p-módy s frekvencemi $\nu \simeq 3$ až 4 mHz, což odpovídá periodám okolo 5 min. G-módy s nízkými frekvencemi nejsou na Slunci pozorovatelné, neboť v povrchové konvektivní zóně nemůže k oscilacím tohoto typu docházet. Převzato z <http://soi.stanford.edu/>.



Obrázek 80: Spektrum oscilačních frekvencí hvězdy α Centauri A, odvozené z měření radiálních rychlostí spektrografem CORALIE, středovaných samozřejmě přes celý disk. Převzato z Bouchy a Carrier (2001).

14 Gravitační kolaps protohvězd

Protohvězdy jsou kolabující objekty, které nejsou v hydrostatické rovnováze. Vývoj před dosažením hlavní posloupnosti je předmětem následující kapitoly.

14.1 Průběh kolapsu

Při kolapsu chladného molekulového mračka roste jeho teplota T , neboť část gravitační potenciální energie se disipuje na teplo, a odpovídajícím způsobem roste i gradient tlaku ∇p . Kolaps by se mohl brzy zastavit, kdyby se oblak nějak neochlazoval. Právě podle způsobu ochlazování lze rozlišit tři fáze kontrakce:

1. *ochlazování infračerveným zářením*: při zvýšené kinetické energii částic oblaku dochází ke srážkové excitaci *rotačních* stavů molekul H_2 a jejich zářivé deexcitaci



Zářivá deexcitace probíhá na vlnových délkách okolo 1 mm, na nichž je ale oblak dobře *průhledný*, takže unikající IR záření může oblak účinně ochladit. Při tomto procesu se uplatňují i jiné částice (O, C^+ , CO, H) a také prachová zrna.

2. *disociace a ionizace*: v rámci přeměny E_G na U probíhá také disociace molekuly H_2 ($\epsilon_D = 4,5 \text{ eV}$) a ionizace atomárního H ($\epsilon_I = 13,6 \text{ eV}$). Obojí vede ke snižování teploty, neboť se tím odebrává teplo ze systému. Celkem se na disociaci a ionizaci může spotřebovat energie

$$E_{DI} = \frac{M}{2m_u} \epsilon_D + \frac{M}{m_u} \epsilon_I, \quad (599)$$

čemuž odpovídá změna potenciální energie (vynechali jsme $\frac{3}{5}$, stejně to není homogenní)

$$\Delta E_G \simeq GM^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (600)$$

Zadáme-li počáteční poloměr protohvězdy, můžeme spočítat konečný, po tomto fázovém přechodu. Příklad: $M = 1 M_\odot$, $R_1 = 10^{15} \text{ m} \doteq 6700 \text{ AU}$, $E_{DI} = 3 \cdot 10^{39} \text{ J}$,

$$R_2 \simeq \left(\frac{E_{DI}}{GM^2} - \frac{1}{R_1} \right)^{-1} \simeq 10^{11} \text{ m} \doteq 0,6 \text{ AU}. \quad (601)$$

Časová škála tohoto procesu, respektive volného pádu, je 10^4 roků.

3. *Kelvinova–Helmholtzova kontrakce*: prakticky všechny vodík je nyní plně ionizovaný, čímž značně narostl gradient tlaku a bylo téměř dosaženo hydrostatické rovnováhy. Za tohoto stavu můžeme ovšem aplikovat *virialový teorém*

$$2\langle U \rangle + \langle E_G \rangle = 0. \quad (602)$$

Předpokládáme-li $R_1 \gg R_2$, lze za gravitační potenciální energii dosadit energii disociace a ionizace

$$E_G \simeq -\frac{GM^2}{R_2} \simeq -E_{DI}. \quad (603)$$

Protože plně ionizovaná látka má střední molekulovou hmotnost $\mu \doteq 0,5$, máme místo (602)

$$2\frac{3}{2} \frac{M}{0,5m_{\text{H}}} kT - \frac{M}{m_{\text{H}}} \left(\frac{\epsilon_D}{2} + \epsilon_I \right) = 0, \quad (604)$$

odkud vyjádříme teplotu

$$kT = \frac{1}{12} (\epsilon_D + 2\epsilon_I) \simeq 2,6 \text{ eV}, \quad (605)$$

neboli $T \simeq 30\,000 \text{ K}$. Vidíme, že kolaps hvězdu značně zahřeje. Velkou roli pak hraje *opacita*, která kontroluje rychlost vyzařování (ochlazování). Další kontrakce probíhá na tepelné (Kelvinově–Helmholtzově) škále $\simeq 10 \text{ Myr}$.

14.2 Fragmentace oblaku

Podle virialového teorému musí pro vázaný systém platit $2\langle U \rangle + \langle E_G \rangle \leq 0$. Odtud lze odvodit Jeansovo kritérium, tj. podmínku pro minimální hmotnost M homogenního oblaku, aby kolaboval

$$M > M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_{\text{H}}} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi\bar{\rho}} \right)^{1/2}. \quad (606)$$

Při isotermickém ději ($T = \text{konst.}$) je tedy $M_J \propto \rho^{-1/2}$ klesající funkcí hustoty. V případě adiabatického děje ($dQ = 0$) lze odvodit vztah (353)

$$T = K'' \rho^{\gamma-1} \quad (607)$$

a dosazení do Jeansova kritéria (606) dá úměru

$$M_J \propto \rho^{(3\gamma-4)/2}. \quad (608)$$

Pro atomární vodík je $\gamma = \frac{5}{3}$ a tedy $M_J \propto \rho^{1/2}$ roste s hustotou (pro H_2 by exponent byl $\frac{1}{10}$). Čili musí nutně existovat určitá *minimální* hodnota M_J a tedy i M !

Isotermický kolaps nastává zpočátku, kdy oblak stačí uvolněnou E_G vyzářit (luminozita od volného pádu je menší než luminozita radiační, $L_{\text{ff}} < L_{\text{rad}}$). Adiabatický kolaps se odehrává později, kdy je opacita $\kappa\rho$ vysoká (díky vysoké hustotě ρ) a vyzařování neefektivní ($L_{\text{ff}} > L_{\text{rad}}$). Právě přechod mezi isotermickým a adiabatickým režimem využijeme pro nalezení $M_{\text{J min}}$. Platí při něm

$$L_{\text{ff}} \simeq L_{\text{rad}}, \quad (609)$$

kde

$$L_{\text{ff}} \simeq \frac{\Delta E_G}{t_{\text{ff}}} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} \left(\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}} \right)^{-1/2} \quad (610)$$

a

$$L_{\text{rad}} = 4\pi R^2 \epsilon \sigma T^4, \quad (611)$$

přičemž emisivita bývá velmi malá ($\epsilon \simeq 0,1$). Z (609) vyjádříme hustotu $\rho(M)$, $R^3 = \frac{3M}{4\pi\bar{\rho}}$

$$\rho^{3/2} = 10 \left(\frac{3\pi}{32} \right)^{1/2} G^{-3/2} M^{-1} \epsilon \sigma T^4, \quad (612)$$

dosadíme do (606)

$$M > M_{\text{J min}} \doteq 5,4 \left(\frac{kT}{G\mu m_{\text{H}}} \right)^{3/2} (5,4 G^{-3/2} M_{\text{J min}}^{-1} \epsilon \sigma T^4)^{-1/3}, \quad (613)$$

a nakonec vyjádříme $M_{\text{J min}}$

$$M_{\text{J min}}^{2/3} \doteq 3,1 \left(\frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \right)^{3/2} G^{-1} (\epsilon \sigma)^{-1/3} T^{1/6}, \quad (614)$$

čili

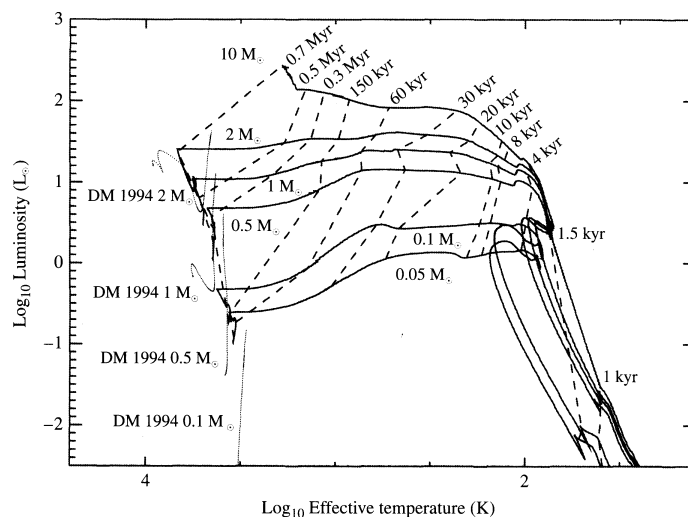
$$M_{\text{J min}} \doteq 5,5 \left(\frac{k}{\mu m_{\text{H}}} \right)^{9/4} G^{-3/2} (\epsilon \sigma)^{-1/2} T^{1/4} \simeq 0,01 M_{\odot} \frac{T^{1/4}}{\epsilon^{1/2} \mu^{9/4}}. \quad (615)$$

Pro $\mu \doteq 1$, $\epsilon = 0,1$, $T = 1\,000\text{ K}$ vychází $M_{\text{min}} \simeq 0,25 M_{\odot}$. Reálná hodnota bude ještě nižší.

Uvědomme si ještě, proč hvězdy 1. generace vznikly hmotnější než ve 2. a 3. generaci? Ve vztahu (615) je pouze závislost na μ , což na vysvětlení nestačí. Při $Z = 0$ je totiž zhoršené ochlazování — malé Z znamená *velkou* opacitu³³ κ ve středních teplotách! Teplota T tak zůstává velká a $M_{\text{J min}}$ také.

Modely vzniku hvězd 1. generace (populace III) z obřích molekulových mračen jsou navíc podstatně složitější — mechanismus ochlazování zářivými deexcitacemi rotačních a vibračních stavů molekuly H_2 zůstává, ale musí se zároveň uvážít rozpínání prostoročasu dle kosmologického modelu (např. CDM) a existence temné hmoty, která vytváří potenciálové jámy, do nichž se přesouvá baryonická látka (Abel a spol. 2002).

³³Důvodem je, že emise probíhá v čarách a při rozlehlém oblaku dochází k samoabsorpci. Kdyby byly přítomné atomy kovů, mohou srážkovou excitací a zářivou deexcitací snadněji vytvořit foton, který unikne.



Obrázek 81: Gravitační kolaps oblaků o hmotnosti 0,05, 0,1, 0,5, 1, 2 a 10 M_{\odot} zobrazený na HR diagramu. Čárkované čáry vyznačují čas, který uplynul od začátku kolapsu. Převzato z Wuchterl a Tscharnuter (2003).

14.3 Vývoj před hlavní posloupností

Kontrahující hvězdy mají v nitru asi 100 krát nižší teplotu — odtud plyne menší stupeň ionizace, vysoká opacita κ velký gradient dT_{rad}/dR a celé nitro je tak konvektivní. Nitro je v této fázi promíchávané „skrz naskrz“, čímž se ustaví homogenní chemické složení.

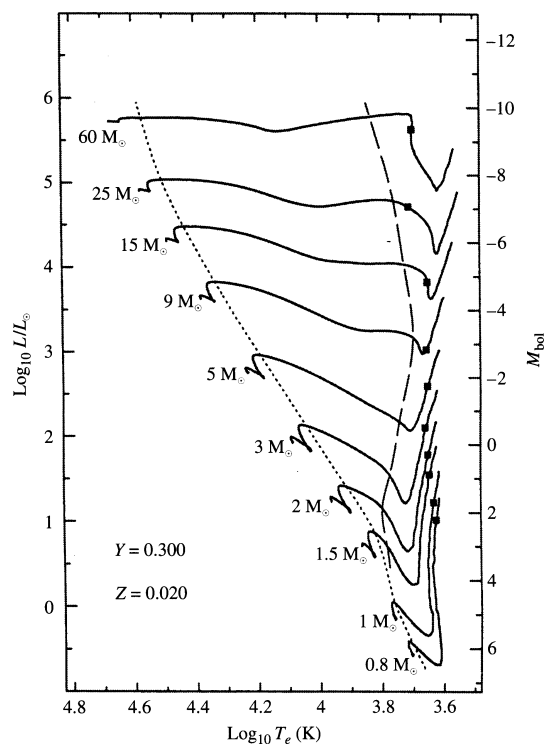
Zahřívání při kolapsu způsobí úplnou ionizaci a tedy pokles opacity. To má dva důsledky: i) záření může z nitra snadno unikat; ii) hvězda přestane být celá konvektivní.

Počáteční kolaps protohvězd (k Hayashiho linii). Všechny protohvězdy zpočátku na HR diagramu stoupají doleva nahoru (T_{eff} i L roste, obr. 81). Zdrojem energie je pouze gravitační smršťování. Významnou hranicí je *Hayashiho linie* — napravo od ní musí být hvězdy nestabilní (neexistují zde řešení stacionárních rovnic hvězdné stavby, kdežto nalevo existují). Nachází se na $T_{\text{eff}} \simeq 3\,500\text{ K}$ a je téměř svislá, což je způsobeno strmou závislostí opacity κ na teplotě T ,

$$\kappa \propto \rho^{0,5} T^9. \quad (616)$$

Případný růst T při kontrakci znamená růst κ a $T_{\text{Hayashi}} \simeq \text{konst.}$ Mimochodem, opacita pod 7 000 K je vysoká zejména kvůli fotoionizaci H^- . Vyšší metalicita Z hodnotu κ ještě zvyšuje, neboť od kovů s malým ionizačním potenciálem je více volných e^- , čili více iontů H^- .

Kolaps ke hlavní posloupnosti (od Hayashiho linie). Záleží na tom, kdy dojde ke zmiňovanému poklesu opacity. Pro masivní hvězdy to nastává brzy, pak je $L \simeq \text{konst.}$ a T_{eff} roste. Pro lehké hvězdy nejprve L klesá, $T_{\text{eff}} \simeq \text{konst.}$ (viz obr. 82).



Obrázek 82: Vývoj před hlavní posloupností pro hvězdy se složením $X = 0,68$, $Y = 0,30$ a $Z = 0,02$. Vývoj směřuje vesměs zprava doleva, od malých efektivních teplot k velkým. Čtverečky vyznačují počátek hoření deuteria. Čárkovaná a tečkovaná linie jsou místa, kde přestala být konvektivní obálka a kde začalo být konvektivní jádro. Převzato z Bernasconi a Maeder (1996).

Případná „vlnka“ na vývojové stopě odpovídá zapálení deuteria nebo lithia. Při $T \gtrsim 1$ až $2 \cdot 10^6$ K nastávají tři reakce spalující deuterium, ale jen první je energeticky významná



Příslušná produkce energie (Maeder, 2009)

$$\epsilon_D = 4,2 \cdot 10^7 \text{ erg s}^{-1} \text{ kg}^{-1} \left[\frac{D}{H} \right] \frac{\rho}{1 \text{ g}} \left(\frac{T}{10^6 \text{ K}} \right)^{11,7}. \tag{618}$$

Při ještě vyšší teplotě $T > 2,5 \cdot 10^6$ K se spaluje lithium reakcí



14.4 Eddingtonova limita

Existuje nějaká *maximální* hmotnost pro hvězdy? Vyjdeme z pohybové rovnice (91) — aby hvězda byla stabilní, nesmí být zrychlení kladné

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GM_R}{R^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dR} \leq 0, \quad (620)$$

kde $P = P_g + P_r$ je součtem tlaku plynu a tlaku záření. V masivních hvězdách je ale $P_r \gg P_g$, a také $\frac{dP_r}{dR} \gg \frac{dP_g}{dR}$, proto lze P_g zanedbat a psát podmínku

$$\frac{dP_r}{dR} \geq -\frac{GM_R \rho}{R^2}, \quad (621)$$

aby se hvězda nerozletěla působením gradientu tlaku záření. Pro absolutně černé těleso platí

$$P_r = \frac{1}{3} a T^4 \quad (622)$$

a

$$\frac{dP_r}{dR} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dR}. \quad (623)$$

Z rovnice zářivého přenosu energie (198) víme, že

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{3\rho\kappa L_R}{16\pi a c R^2 T^3}, \quad (624)$$

tudíž

$$\frac{dP_r}{dR} = -\frac{\rho\kappa L_R}{4\pi c R^2}. \quad (625)$$

Po dosazení

$$L \leq L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi c GM}{\kappa}, \quad (626)$$

což je podmínka pro zářivý výkon hvězdy, nazývaná *Eddingtonova limita*.

Pokud bychom potřebovali dosadit za opacitu κ , tak pro rozptyl na volných elektronech, který se nejvíce uplatňuje u horkých hvězd, platí přibližně

$$\kappa \doteq 0,02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1} (1 + X) \neq \kappa(T). \quad (627)$$

Porovnejme (626) s přibližným vztahem $L(M)$, který odvodíme z následujících úměrností. Z rovnice zářivé rovnováhy máme

$$\frac{dT}{dR} \simeq \frac{T}{R} \propto \frac{\rho\kappa L}{R^2 T^3}, \quad (628)$$

odkud

$$L \propto \frac{RT^4}{\rho\kappa}. \quad (629)$$

Podle hydrostatické rovnováhy

$$\frac{dP}{dR} \simeq \frac{P}{R} \propto \frac{M\rho}{R^2}, \quad (630)$$

ze stavové rovnice

$$P \propto \rho T, \quad (631)$$

takže

$$T \propto \frac{M}{R}. \quad (632)$$

Z definice hustoty plyne

$$\rho \propto \frac{M}{R^3}. \quad (633)$$

Po dosazení všeho do (629) máme úměru (jež přibližně odpovídá hlavní posloupnosti)

$$L \propto \frac{M^3}{\kappa}. \quad (634)$$

Tento vztah ovšem platí pouze na hlavní posloupnosti, nikoli později, neboť v obrech se uplatňuje jiný mechanismus opacity $\kappa = \kappa(\rho, T)$.

Maximální možnou hmotnost hvězdy tedy získáme z trojčlenky $L_{\odot}/M_{\odot}^3 = L_{\text{Ed}}/M_{\text{Ed}}^3$ jako

$$M_{\text{Ed}} \simeq \sqrt{\frac{4\pi c G M_{\odot}^3}{\kappa L_{\odot}}} \simeq 200 M_{\odot}. \quad (635)$$

Podle pozorování hvězdokupy Arches (poblíž galaktického centra) se zdá, že horní limit pro hmotnost hvězd je $130 M_{\odot}$ (Figer 2005). Příkladem velmi hmotné hvězdy může být η Carinae, s $M \simeq 90 M_{\odot}$ (Aerts a spol. 2004).

15 Explosivní stadia ve vývoji hvězd

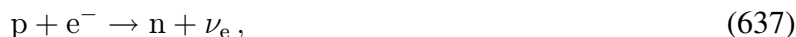
15.1 Supernovy typu II, Ib, Ic

Energetická bilance. Supernovy typů II, Ib a Ic vznikají při *gravitačním kolapsu jádra hmotné hvězdy na neutronovou hvězdu*. Jádro je tvořené především hořčíkem, neonem a kyslíkem; k jeho kolapsu dojde při překročení Chandrasekharovy meze $M_{\text{Ch}} \doteq 1,38 M_{\odot}$, přičemž počáteční poloměr $R_{\text{WD}} \doteq 4\,000$ km, konečný poloměr $R_{\text{NS}} \doteq 15$ km. Pak podle (5) je uvolněná energie řádu³⁴

$$\Delta E \simeq E_{\text{WD}} - E_{\text{NS}} = -\frac{3}{10}G \left(\frac{M_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{WD}}} - \frac{M_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{NS}}} \right) \simeq 1 \cdot 10^{46} \text{ J}. \quad (636)$$

Tato energie se dělí následovně:

- 99 % uvolněné energie odnášejí neutrina, která vznikají při *neutronizaci*



a zvláště pak termalizovaná neutrina všech vlní;

- 1 % je kinetická energie rozpínající se obálky (E_G se nejprve změní na teplo Q , neboli „mikroskopickou E_K “, a posléze na makroskopickou E_K);
- pouze 10^{-4} uniká jako záření.

O této bilanci svědčí přímá pozorování. Celkovou zářivou energii zjistíme integrací světelné křivky. Absolutní hvězdná velikost v maximu bývá okolo $M_V = 18$ mag, barevný index $B - V = +0,5$, bolometrická korekce dle Popperových tabulek $BC = -0,05$ je nepatrná, čili $M_{\text{bol}} = M_V + BC \doteq 18$ mag. Podle Pogsonovy rovnice je zářivý výkon $L_{\gamma} = L_0 10^{\frac{2}{5}(M_0 - M_{\text{bol}})} \simeq 5 \cdot 10^{35}$ W, kde L_0 , M_0 jsou definovány (316). Celková zářivá energie vychází odhadem

$$E_{\gamma} = \int_t L_{\gamma}(t) dt \simeq L_{\gamma} \tau \simeq 5 \cdot 10^{35} \cdot 30 \cdot 86\,400 \text{ J} \doteq 10^{42} \text{ J} \simeq 10^{-4} \Delta E. \quad (638)$$

Pro výpočet kinetické energie obálky vezmeme například data pro Krabí mlhovinu M1: hmotnost filamentů je $m = (4,6 \pm 1,8) M_{\odot}$ (Fessen a spol. 1997) a rychlost rozpínání $v \leq 2\,000$ km/s (tj. relativně málo), pak

$$E_K \simeq \frac{1}{2} m v^2 = 1,8 \cdot 10^{43} \text{ J} \lesssim 10^{-2} \Delta E. \quad (639)$$

Energie supernovy tedy bohatě stačí na odhození obálky hvězdy do mezihvězdného prostoru. Ostatně její vazebná energie je oproti kompaktnímu jádru nepatrná ($E_G \simeq -10^{42}$ J).

³⁴Výpočet je pro homogenní kouli, ve skutečnosti je E_G zápornější. Bílí trpaslíci, respektive degenerovaná jádra, a neutronové hvězdy nicméně nejsou tak koncentrované ke středu jako normální hvězdy.

Pozorování neutrin ze SN 1987 A. Supernova SN 1987 A byla pozorována ve Velkém Magellanově mračnu. Tři detektory, Kamiokande II (Hirata a spol. 1987), IMB (Bionta a spol. 1987) a Baksan, změřily 3 h před optickým vzplanutím tok 25 neutrin za 15 sekund, jejich energie byly mezi 10–40 MeV. Jedná se o detektory čerenkovské, ve kterých neutrino interaguje s částicemi za vzniku rychlých elektronů. Při pohybu elektronu rychlostí nadsvětelnou v daném prostředí vzniká *Čerenkovovo záření* — částice odlétávající v kuželu. Na rozdíl od radiochemických detektorů je tak možné určit směr; v tomto případě kužel směřoval od Magellanova mračna.

Pro rozptyl neutrin na elektronu



je účinný průřez

$$\sigma_{\nu_x e^-} \simeq 9,5 \cdot 10^{-49} \text{ m}^2 \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right) \simeq 1,4 \cdot 10^{-47} \text{ m}^2. \quad (641)$$

Slabá interakce elektronového antineutrina s protonem



má mnohem větší účinný průřez

$$\sigma_{\bar{\nu}_e p} \simeq 9,3 \cdot 10^{-48} \left(\frac{E_\nu}{1 \text{ MeV}} \right)^2 \simeq 2,1 \cdot 10^{-45} \text{ m}^2, \quad (643)$$

ale Čerenkovovo záření je zde skoro izotropické.

Počet elektronů v přístroji Kamiokande, které mohou sloužit jako „terčíky“ pro rozptyl, je $N_e = 10 \cdot M_{\text{H}_2\text{O}} / m_{\text{H}_2\text{O}}$, kde hmotnost vody v detektoru $M_{\text{H}_2\text{O}} = 2\,140 \text{ t}$ a hmotnost molekuly vody $m_{\text{H}_2\text{O}} \doteq 18 m_u$; plocha terčíků je $S = N_e \sigma_{\nu_x e^-}$. Pozorovaný počet takových rozptylů byl $N_{\text{obs e}} = 3$, což při vzdálenosti $d = 51,4 \text{ kpc}$ a průměrné energii neutrina $E_\nu = 15 \text{ MeV}$ dává

$$N_{\text{tot}} = N_{\text{obs e}} \frac{4\pi d^2}{S} \simeq 9 \cdot 10^{57} \text{ neutrin}, \quad (644)$$

$$E_{\text{tot}} \simeq E_\nu N_{\text{tot}} \simeq 2 \cdot 10^{46} \text{ J} \simeq \Delta E. \quad (645)$$

Protože neutrino přiletělo během $t_{\text{obs}} = 13 \text{ s}$ vychází tok

$$\Phi = \frac{N_{\text{obs e}}}{S t_{\text{obs}}} \simeq 2 \cdot 10^{13} \text{ neutrin m}^{-2} \text{ s}^{-1}. \quad (646)$$

Průběh kolapsu a supernovy. Myšlenka „gravitační neutrinové bomby“ pochází od Baadeho a Zwickyho (1934). Jádru hvězdy vlastně kolabuje neustále a zvláště u hmotných hvězd, kde se reakce zapalují průběžně, je zřetelná úměra $\rho_c \propto T_c^3$, která přesně odpovídá Jeansovu kritériu (306) $M \simeq M_J \propto T^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}$. Jádru se v závěrečných fázích ochlazuje třemi způsoby:

1. únikem neutrin;
2. zachycováním e^- v jádrech, což vede ke zmenšování tlaku degenerovaného elektronového plynu;
3. fotodisintegrací železa



což je endogenní reakce s bilancí -100 MeV.

Po volném pádu se ustaví *protoneutronová hvězda* s poloměrem $R \simeq 30$ km, a to díky gradientu tlaku degenerovaného neutronového plynu (neboli krátkodosahové jaderné síle, resp. její odpudivé složce). Hustota látky $\rho = 4$ až $5 \cdot 10^{14}$ g/cm³ je dvojnásobná než má atomové jádro.

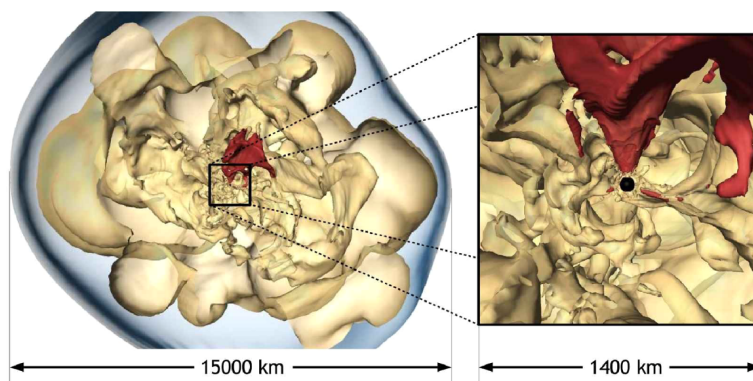
Náhlý konec kolapsu vnitřního jádra vyvolá zpětný ráz a *rázovou vlnu* v okolních vrstvách. Dříve se myslelo, že právě tato vlna způsobuje výbuch supernovy, ale ztráty energie fotodisintegrací a neutrin jsou tak velké, že se vlna za několik milisekund *zastaví!* Protoneutronová hvězda opět akretuje rychlostí $\dot{M} \simeq 0,1 M_\odot/s$ a pokud by akrece pokračovala pod dobu 1 s, vznikla by černá díra.

Neutronová hvězda, o poloměru $R \simeq 10$ km, vznikne po vyzáření obrovského množství neutrin. Jejich energie je více než dostatečná na rozmetání obalu, ale problémem je: i) malý účinný průřez σ_ν ; ii) po zachycení nukleony $p + \bar{\nu}_e \leftrightarrow n + e^+$, $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ je energie vyzařována opět jako neutrina, čili je obtížné uložit energii do baryonické látky.

Uložení části energie neutrin dá vzniknout fotonům γ a párům e^- , e^+ . Od centra se tak rozpíná horká bublina, s rázovou vlnou na vnějším okraji. Vykazuje dva druhy nestabilit (obr. 83): i) konvektivní nestabilitu; ii) neradiální deformace, ve kterých převažuje bipolární mód — chladnější hmota teče z jedné strany, je ohřátá neutrina a odtéká na straně druhé. Neutronové hvězdy bývají tímto procesem „nakopnuté“ a vysvětlují se tak jejich náhodné a vysoké relativní rychlosti 300 až 400 km/s vzhledem ke zbytkům po výbuších supernov.

Numerická řešení radiačně–hydrodynamických rovnic, popisující explozi, stále nedávají jednoznačné výsledky. Jsou navíc nutná vysoká rozlišení, až 10^9 bodů (malé rozlišení vede k velké numerické viskozitě, která by explozi zabránila). Problémy se také liší podle hmotnosti: masivní hvězdy mají velké železné jádra, takže téměř vznikne černá díra. Akrece husté obálky z křemíku a kyslíku je tak rychlá, že obtížně vzniká rázová vlna. Lehké hvězdy ($8-11 M_\odot$) naproti tomu mají slabě vázané vnější vrstvy, takže odhodit je není obtížné, ale vychází příliš malý výhoz prvků středních hmotností (O, Mg, Si, S, Ca).

Záblesky záření gama (GRB). Podle pozorování *některé* supernovy souvisejí s *některými* záblesky záření gama. Konkrétně se jedná o hypernovy (tzn. uvolňující $\simeq 10^{52}$ erg) a dlouhé měkké záblesky; pozorované byly zatím tři kusy. I když nevidíme všechny záblesky kvůli jejich směřování, je supernov produkujících GRB jen pouhých 0,1 %.



Obrázek 83: Model akrece látky na neutronovou hvězdu (černý kotouček uprostřed). Konvektivní nestabilita obvykle probíhá tak, chladná látka (vyznačená červeně) přitéká z jedné strany, je zahřátá neutriny a odtéká na druhou stranu. Tento mechanismus může neutronové hvězdě udělit rychlost řádu 10^2 km/s. Rázová vlna (modře), obepínající konvektivní bubliny, posléze rozmetá celou obálku hvězdy. Převzato z Woosley a Janka (2006).

Pro gama záblesky byly zjištěné vysoce relativistické kolimované výtrysky, s Lorentzovým faktorem $\Gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} > 200$, a vrcholovým úhlem výtrysku asi 5° . Tak vysoké rychlosti a směrovost svědčí o nesférické explozi a souvislosti s *rotací*. V zásadě existují dva možné zdroje

1. neutronová hvězda rotující na hranici rozpadu odstředivou silou;
2. černá díra s akrečním diskem.³⁵

Normálně hvězda ve fázi červeného obra rotuje velmi pomalu, tření mezi obálkou a jádrem (podpořené magnetickým polem) vede ke zpomalení jádra a následně k obyčejné supernově a pomalu rotujícímu pulzaru ($P = 10$ ms). Pro vznik hypernovy, respektive GRB, se ale moment hybnosti musí zachovat. Zřejmě se tak děje některým z následujících procesů:

1. rychlá počáteční rotace, vede k brzké rotační nestabilitě, odhození obálky a obr tak vůbec nevznikne;
2. hvězda ztratí obálku přetokem v těsném dvojhvězdném systému;
3. hvězdný vítr musí být dostatečně slabý, což může fungovat pro WR hvězdy s metalicitou $Z < 0,004$.

Posledně jmenovaný proces funguje spíše v raném vesmíru (a možná souvisí s tím, že GRB jsou pozorované na velkých rudých posuvech).

³⁵Kdyby systém nerotoval a došlo k radiálnímu kolapsu do černé díry, neviděli bychom nic, protože horizont je pouze myšlená hranice, přes kterou látka volně padá do singularity.

Nukleosyntéza r-procesem. R-proces, neboli rychlé zachycování neutronů atomovými jádry, funguje za teplot $T > 10^9$ K a koncentrací $n > 10^{20}$ neutronů/cm³. Takové podmínky můžeme očekávat v těsném okolí neutronové hvězdy (obr. 84):

0. neutronizace a termalizace dá vzniknout toku neutrin i antineutrin, skrz hvězdu složenou z neutronů však snáze pronikají antineutrína;
1. neutrína nastartují tok neutronů a protonů (neboli vítr z atmosféry neutronové hvězdy);
2. vznikne přebytek neutronů kvůli větší energii antineutrin, která pak mají větší účinný průřez (643) při interakci s protony $p + \bar{\nu} \rightarrow n + e^+$;
3. po ochlazení je syntetizováno helium, „ $2p + 2n \rightarrow \alpha$ “, až žádné protony nezbudou; na α částicích se další neutrony nezachycují, protože ${}^5\text{He}$ je velmi nestabilní;
4. po ochlazení na $T < 5 \cdot 10^9$ K vznikne malé množství jader skupiny železa, „ $\alpha + n \rightarrow \text{Fe}$ “;
5. teprve zachycování neutronů na tomto „osivu“ vede ke vzniku prvků těžších než železo.

Všimněme si, že nukleosyntéza proběhla na primární látce, neboť železo, které hvězda vytvořila dříve, zaniklo při fotodisintegraci. Je též zřejmá nezávislost na původní metalicitě Z_* nebo stáří objektu.

Tento proces je jediným vysvětlením pozorovaných abundancí těžkých prvků v atmosféře Slunce — při jedné explozi supernovy bývá vyvrženo $10^{-5} M_\odot$ materiálu větru, z toho 10 až 20 % jsou prvky syntetizované při r-procesu a při 10^8 výbuších supernov v Galaxii za dobu existence Vesmíru dostáváme právě Z_\odot .

Podle detailních modelů však proton-neutronový vítr vychází příliš hustý (asi faktorem 4) — vznikne tak příliš mnoho α částic, málo neutronů zůstane ve větru a je problém se vznikem jader s $A > 200$. Je možné, že se modely ještě musejí doplnit o vliv rotace a magnetických polí.

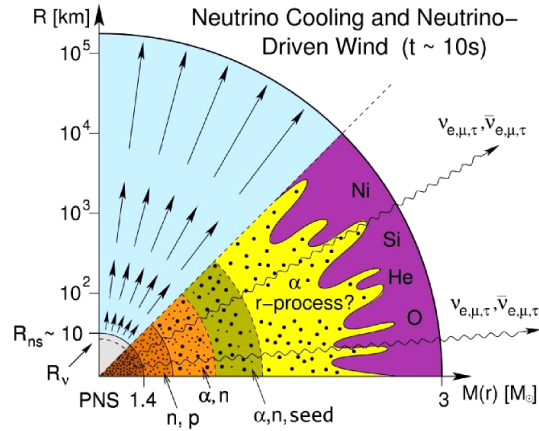
Dosvit a zbytky po supernovách. Tvary světelných křivek lze dobře vysvětlit radioaktivním rozpadem nestabilních nuklidů



s poločasy rozpadu 6,1 dne a 77 dní. Abychom vysvětlili i celkové množství zářivé energie (638), když rozdíl vazebných energií je $E_{\text{Fe}56} - E_{\text{Ni}56} = 492 \text{ MeV} - 484 \text{ MeV} = 8 \text{ MeV}$, potřebujeme řádově $0,1 M_\odot$ nuklidu niklu.

Světelnou křivku samozřejmě ovlivňuje i *opacita obálky*. Například u supernov typu II–P vzniká výrazné plato právě díky opacitnímu mechanismu: rázová vlna ionizuje vodík ve vnější obálce, což podstatně zvýší κ a pokles L je pomalejší. Po ochlazení a rekombinaci je naopak κ malé a pokles L rychlý.

Obvyklým zbytkem po výbuších supernov (angl. supernova remnant, SNR) jsou rozpínající se obálky a rázové vlny interagující s mezihvězdným prostředím. Pozorovatelné jsou po dobu více než 10^5 roků. Znamé jsou třeba Krabí mlhovina, mlhovina Řasy nebo Vela. V centrech takových mlhovin se též nacházejí neutronové hvězdy, případně pulsary.



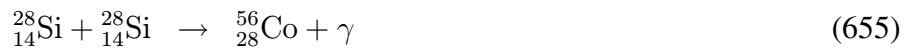
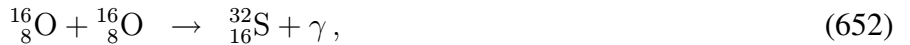
Obrázek 84: Schéma r-procesu v těsném okolí protoneutronové hvězdy: tok neutrín vytvoří vítr protonů a neutronů, jež se po ochlazení slučují na částice α ; syntézou částic α vzniknou jádra prvků skupiny železa a teprve na nich se zachycují neutrony, čímž vznikají těžší prvky. Převzato z Woosley a Janka (2006).

15.2 Supernovy typu Ia

Progenitory supernov SN Ia bohužel přímo nepozorujeme. Pravděpodobně se ale jedná o explozi uhlíko-kyslíkového bílého trpaslíka ve dvojhvězdě, který při postupné akreci překročil Chandrasekharovu mez. Během následné kontrakce se zažehne nukleární přeměna C a O až na prvky skupiny železa, což uvolní takové množství tepelné energie, které převyšuje gravitační vazebnou energii bílého trpaslíka

$$E_{\text{WD}} \simeq \frac{3}{10} \frac{GM_{\text{Ch}}^2}{R_{\text{WD}}} \doteq -3,8 \cdot 10^{43} \text{ J}. \quad (650)$$

Již z první reakce této série



máme, při vazebných energiích $E_{\text{C12}} = 92 \text{ MeV}$, $E_{\text{Mg24}} = 198 \text{ MeV}$,

$$E_{\text{nukl}} \simeq \frac{M}{m_{\text{C12}}} (E_{\text{Mg24}} - 2 E_{\text{C12}}) \doteq 3,0 \cdot 10^{44} \text{ J} \gg |E_{\text{WD}}|. \quad (656)$$

Poznamenejme, že se nemůže jednat o heliového trpaslíka, protože pak by exploze vycházela mnohem větší než se pozoruje.

Důležitá je vhodná *rychlost akrece* látky na bílého trpaslíka. Podmínkou je, že před explozí se musí spotřebovat vodík a hélium (neboť je nevidíme ve spektru):

1. malé \dot{M} vede obvykle k erupci novy, při které bílý trpaslík ztratí více hmoty než předtím akreoval;
2. při středním \dot{M} vznikne degenerovaná vrstva helia a záblesk neodpovídající supernově;
3. vyšší $\dot{M} \simeq 10^{-7} M_{\odot}/\text{yr}$ je provázené relativně poklidným, hydrostatickým hořením H, He — může tedy vést až k supernově;³⁶
4. velmi vysoké \dot{M} dá vzniknout vodíkové obálce jako u červeného obra, což je v rozporu se spektry.

Existují dva základní způsoby, jak poté může exploze proběhnout:

1. *detonace*, při které *nadzvuková rázová vlna* zvýší tlak natolik, že komprese materiálu vede k jeho vznícení, přičemž exotermická reakce za vlnou podporuje další šíření vlny;
2. *deflagrace*, kde je šíření zajišťováno *tepelnou vodivostí* materiálu, čili ohřev okolních vrstev způsobuje jejich zapálení.

Podle modelů supernov Ia (Hillebrandt a Niemeyer 2000) je jasné, že *okamžitá detonace nefunguje!* Vytvoří se při ní sice prvky skupiny železa, ale nikoli dostatek prvků středních hmotností. Proto se uvažuje o následujících třech modelech:

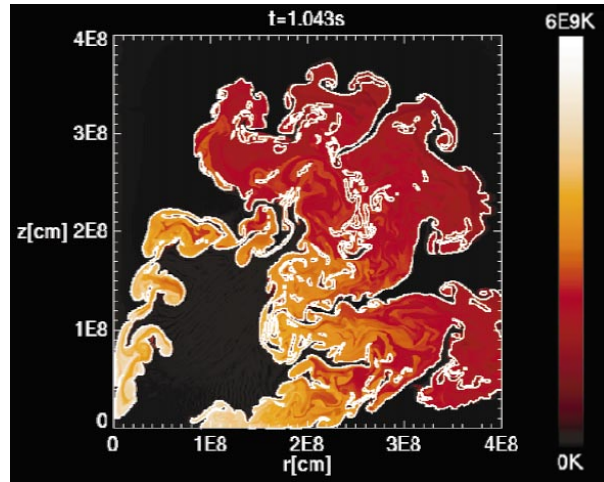
1. podzvuková nukleární deflagrace, které je silně turbulentní;
2. turbulentní deflagrace následovaná opožděnou detonací;
3. totéž doprovázené jedním nebo vícero pulzy.

Turbulence zde hraje roli zcela zásadní. Deflagrační vlna je totiž „zprohýbaná“ (obr. 85) a na první pohled by se zdálo, že rychlost turbulentní vlny je menší než rychlost laminární ($S_t < S_l$). Ale právě zmiňované zprohýbání zvětší plochu, na níž deflagrace probíhá, takže nakonec je

$$S_t > S_l \quad (657)$$

a dosahuje hodnoty až $S_t \simeq 0,3 c$.

³⁶Možná jsou progenitory SN Ia kataklyzmatické proměnné, konkrétně superměkké rentgenové zdroje. Akrece $10^{-1} M_{\odot}$ by však musela probíhat dlouho, navzdory tomu, že v rentgenovém oboru pozorujeme proměnnost na škále týdnů.



Obrázek 85: Prostorové rozložení teploty a tvar deflagrační vlny v bílém trpaslíkovi o Chandrasekharově hmotnosti. Převzato z Hillebrandt a Niemeyer (2000).

Laminární rychlost deflagrace. Jakou rychlostí deflagrace probíhá? Označme δ tloušťku vrstvy, ve které probíhá termonukleární hoření i vedení. Časová škála pro vedení tepla je pak

$$\tau_d \simeq \frac{\delta^2}{\chi}, \quad (658)$$

kde $\chi = \frac{K}{\rho C}$ je tepelná difuzivita. Časovou škálu pro hoření můžeme vyjádřit pomocí

$$\tau_b \simeq \frac{\alpha}{\epsilon} \propto \exp \frac{\Delta U}{kT_f}, \quad (659)$$

kde α označuje energii obsaženou v 1 g látky, ϵ měrný výkon termonukleárních reakcí, ΔU se nazývá aktivační bariéra, T_f teplota plamene (při které probíhá reakce).

Při stacionární deflagraci je energie uvolněná reakcemi odvedená pryč, čili jsou si časové škály rovny,

$$\tau_d \simeq \tau_b. \quad (660)$$

Můžeme pak odvodit tloušťku hořící vrstvy

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\chi \alpha}{\epsilon}} \quad (661)$$

i laminární rychlost postupu deflagrační fronty

$$S_1 \simeq \frac{\delta}{\tau_b} \simeq \sqrt{\frac{\chi \epsilon}{\alpha}}. \quad (662)$$

Obvyklé hodnoty pro termionukleární plamen v prostředí $X_C = X_O = 0,5$ a $\rho = 10^9$ až 10^7 g cm⁻³ vycházejí $\epsilon \propto T^{12}$, $S_1 = 10^7$ až 10^4 cm s⁻¹, $\delta = 10^{-4}$ až 1 cm, $\Delta\rho/\rho = 0,2$ až 0,5.

Vzhledem k hodnotě δ jde o mikroskopický proces. Při makroskopickém modelování se proto používá přiblížení tenkého plamene, jakožto nekonečně tenké vlny zředění, postupující rychlostí S_1 .

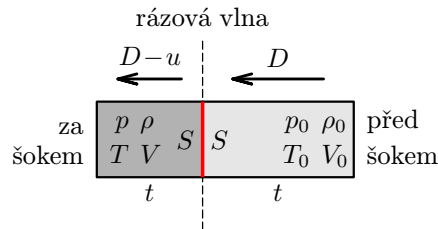
Chapmanova–Jougetova rychlost detonace. Pro popis detonace použijeme *Rankinovy–Hugoniotovy rovnice*. Jedná se o jednoduché zákony zachování hmoty, hybnosti a energie, zapsané v souřadnicové soustavě pohybující se spolu s rázovou vlnou. Rozhraní, na kterém se *skokově* mění stavové veličiny, je v takovém případě stacionární (obr. 86). Označíme-li D rychlost detonační vlny, kterou látka teče směrem k rozhraní, a $D - u$ rychlost za tímto rozhraním, máme

$$\rho_0 D = \rho(D - u), \quad (663)$$

$$\rho_0 D^2 + p_0 = \rho(D - u)^2 + p, \quad (664)$$

$$U(p_0, \rho_0, \lambda = 0) + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} D^2 = U(p, \rho, \lambda = 1) + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} (D - u)^2, \quad (665)$$

kde ρ , p označuje hustotu a tlak před detonací, totéž s indexem nula je stav po detonaci, U je vnitřní energie na jednotku hmoty a λ stupeň proběhnutí reakce (viz např. Fickett a Davis 2000).



Obrázek 86: Detonační fronta nahlížená v soustavě pohybující se s frontou a stav látky před ní (s indexem 0) a za ní.

Nejprve eliminujeme u z (663) a (664)

$$u = D \frac{\rho - \rho_0}{\rho}, \quad (666)$$

pak

$$\rho_0 D^2 + p_0 = \overbrace{\rho(D - u)}^{\rho_0 D} (D - u) + p = \rho_0 D(D - u) + p, \quad (667)$$

$$p - p_0 = \rho_0 u D, \quad (668)$$

$$p - p_0 = \rho_0 D^2 \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \rho_0^2 D \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right). \quad (669)$$

Zavedeme ještě specifické objemy $v = \frac{1}{\rho}$, $v_0 = \frac{1}{\rho_0}$ a označíme

$$\mathcal{R} \equiv \frac{D^2}{v_0^2} - \frac{p - p_0}{v_0 - v} = 0, \quad (670)$$

což je rovnice pro *Rayleighovu linii* ($\mathcal{R} = 0$), neboli přímku na grafu (v, p) .

Eliminace D z týchž rovnic dává

$$D = u \frac{\rho}{\rho - \rho_0}, \quad (671)$$

$$p - p_0 = u^2 \frac{\rho \rho_0}{\rho - \rho_0}, \quad (672)$$

čili

$$(p - p_0)(v_0 - v) = u^2. \quad (673)$$

Jedná se o linii konstantní částicové rychlosti ($u = \text{konst.}$), přesněji řečeno hyperbolu. Zadáme-li u , D , je řešením Rankinových–Hugoniotových rovnic průsečík zmiňovaných linií na grafu (v, p) .

Nakonec eliminace u i D z (665)

$$U(p, v, \lambda = 0) + p_0 v_0 + \frac{1}{2} D^2 = U(p, v, \lambda = 1) + pv + \frac{1}{2} (D^2 - 2 \overbrace{Du}^{(p-p_0)v_0} + \overbrace{u^2}^{(p-p_0)(v-v_0)}) \quad (674)$$

dává

$$\mathcal{H} \equiv U(p, v, \lambda = 1) - U(p, v, \lambda = 0) - \frac{1}{2}(p + p_0)(v_0 - v) = 0, \quad (675)$$

což je křivka nazývaná *hugoniota* ($\mathcal{H} = 0$). Leží na ní všechny možné konečné stavy (pro všechny detonace); pokud zadáme D , je stav určen průsečíkem hugonioty a Rayleighovy linie.

Pro polytropický plyn (ideální s konstantní tepelnou kapacitou), s reakcí s konstantním měrným teplem q , můžeme snadno vyjádřit měrnou vnitřní energii

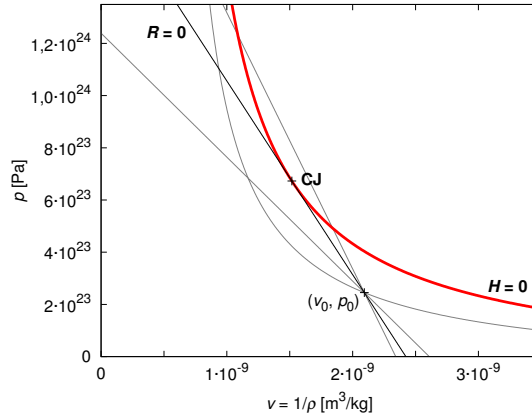
$$U = \frac{\alpha N k T}{m} - \lambda q = \frac{pv}{\gamma - 1} - \lambda q \quad (676)$$

a dosadit ji do (675)

$$\frac{pv}{\gamma - 1} - q - \frac{p_0 v_0}{\gamma - 1} - \frac{1}{2}(pv_0 - pv + p_0 v_0 - p_0 v) = 0. \quad (677)$$

Vyjádříme tlak

$$p = \frac{p_0(v_0 - \mu^2 v) + 2\mu^2 q}{v - \mu^2 v_0}, \quad (678)$$



Obrázek 87: Hugoniota ($\mathcal{H} = 0$) a Rayleighovy linie ($\mathcal{R} = 0$) pro různé hodnoty detonační rychlosti D , na grafu tlak p versus specifický objem $v = \frac{1}{\rho}$. Počáteční hodnoty p_0 a v_0 odpovídají degenerovanému nitru bílého trpaslíka. Chapmanova–Jouguetova rychlost je v tomto případě $D_{\text{CJ}} \simeq 0,2 c$.

kde $\mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, a obdržíme rovnici hugonioty pro polytropický plyn (s reakcí).

Stav látky (v, p) po detonaci rychlostí D je určen průsečíkem s Rayleighovou linií (670). Z obrázku 87 je zřetelné, že pro určitou hodnotu rychlosti D_{CJ} , nazývanou *Chapmanova–Jouguetova rychlost*, existuje pouze jediné řešení. Vypočítali bychom ji z podmínky, že tečna k hugoniotě, alias Rayleighova linie, musí procházet počátečním stavem

$$p + \left(\frac{dp}{dv} \right)_{\mathcal{H}} (v_0 - v) = p_0, \quad (679)$$

kam dosadíme z (678), vyřešíme vzhledem k v a vypočteme p , D_{CJ} podle (670).

Chapmanova–Jouguetova rychlost je dobrým odhadem rychlosti šíření rázové vlny v daném prostředí, a zároveň je to minimální možná rychlost detonace. Pro $D < D_{\text{CJ}}$ totiž neexistuje žádné řešení R.–H. rovnic. Platí také $D - u = c_s$, čili od rozhraní se látka pohybuje rychlostí zvuku c_s , jak se můžeme snadno přesvědčit z definice

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dv} \frac{dv}{d\rho} = \frac{dp}{dv} (-v^2) = -\frac{D^2}{v_0^2} (-v^2) = (D - u)^2. \quad (680)$$

Například pro hodnoty v centru hvězdy $20 M_{\odot}$ — tedy $\rho_0 = 4,8 \cdot 10^8 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 2,5 \cdot 10^{23} \text{ Pa}$, $T_0 = 9,2 \cdot 10^8 \text{ K}$ — a nukleární přeměnu uhlíku ($q = 5,0 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}$) vychází $D_{\text{CJ}} \simeq 5,7 \cdot 10^7 \text{ m/s} \simeq 0,19 c$, $D - u = c_s = 0,14 c$, $\rho = 1,4 \rho_0$, $p = 2,7 p_0$, $T = 2,0 T_0$.

Rayleighova–Taylorova nestabilita. Rayleighova–Taylorova nestabilita vzniká například v situaci, kdy je hustší kapalina *nad* řidší v homogenním gravitačním poli (obr. 88)³⁷

$$\rho_2 > \rho_1 \quad (681)$$

Obdobná je i situace při pohybu řidší látky směrem do hustšího prostředí. (V souvislosti se supernovami připomeňme, že látka uvnitř, ve které již proběhla nukleární přeměna, má vyšší T a tedy *nižší* ρ než okolí, do kterého se rozpíná.)

Popišme takovou nestabilitu v nejjednodušším možném případě. V neporušeném stavu jsou na rozhraní kapalin tlaky $p_1 = p_2 = p_0$. Ovšem při malém vychýlení hladiny o ξ se těsně pod a těsně nad rozhraním objeví hydrostatické tlaky $p'_1 = p_0 + \xi\rho_1g$, $p'_2 = p_0 + \xi\rho_2g$. Tlaková síla působící na rozhraní s plochou A je pak

$$F_t = A(p'_1 - p'_2) = A\xi(\rho_1 - \rho_2)g \quad (682)$$

a pohybová rovnice

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = F_t. \quad (683)$$

Kolik je ale m , tedy hmotnost *pohybující* se kapaliny? Pro jednoduchost předpokládejme, že perturbace má tvar harmonické vlny, s vlnovým číslem $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Pro nestlačitelnou a bezvírovou kapalinu ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) pak platí (bez důkazu), že perturbace musí klesat se vzdáleností od rozhraní jako $\exp(-k|z|)$. Typicky tedy sahá do vzdálenosti $\frac{1}{k}$ a příslušná hmotnost

$$m = m_1 + m_2 = \rho_1 A \frac{1}{k} + \rho_2 A \frac{1}{k}. \quad (684)$$

Dosazením do (683)

$$(\rho_1 + \rho_2) A \frac{1}{k} \frac{d^2\xi}{dt^2} = (\rho_2 - \rho_1) g \xi A \quad (685)$$

dostáváme jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} k g \xi = \gamma^2 \xi, \quad (686)$$

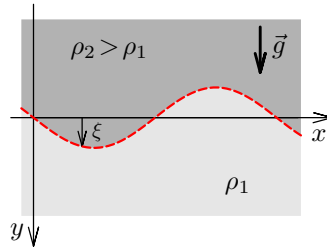
kde

$$\gamma = \sqrt{A_T k g} \quad (687)$$

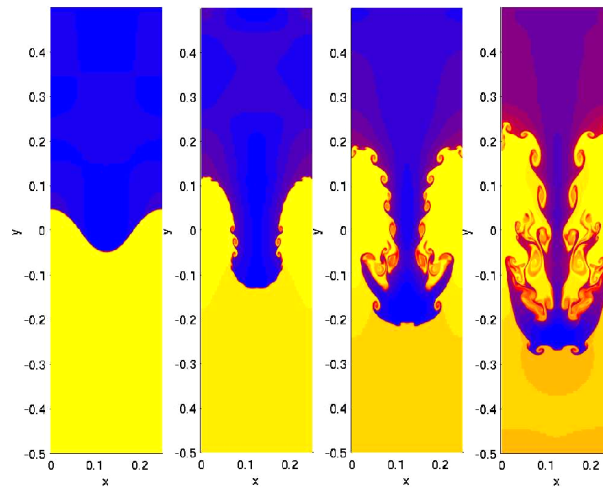
a Atwoodovo číslo

$$A_T = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (688)$$

³⁷Kdyby tomu bylo naopak, měl by systém menší potenciální energii. Není pak divu, že vznikne nějaká nestabilita.



Obrázek 88: Počáteční perturbace rozhraní dvou kapalin.



Obrázek 89: Projev Rayleighovy–Taylorovy nestability v numerickém řešení hydrodynamických rovnic. Menší vlny, které vznikají na rozhraní pohybujících se kapalin různých hustot, jsou projevem Kelvinovy–Helmholtzovy nestability. V pozdějších fázích se tvoří charakteristický „hřib“. Převzato z <http://math.lanl.gov/Research/Highlights/amrmhd.shtml>.

Protože naše $A_T > 0$ je řešení ve tvaru³⁸

$$\xi = \xi_0 \cosh(\gamma t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\gamma} \sinh(\gamma t), \quad (689)$$

což je s časem divergující exponenciála. To je sice obvyklé u lineárních teorií, ale ve skutečnosti vývoj nestability omezí nelineární členy (obr. 89).

³⁸Kdyby bylo $A_T < 0$ (hustší kapalina dole), dostali bychom naopak řešení v podobě vln (sinů a kosinů).

16 Typy pozorovaných hvězd a jejich vývojová stadia

16.1 Horké hvězdy spektrálního typu O a Wolfovy–Rayetovy hvězdy

Fenomenologicky jsou hvězdy spektrálního typu O definovány přítomností ionizovaného helia He II v jejich čárových spektrech. To odpovídá efektivním teplotám zhruba nad 30 000 K. Pro objekty na hlavní posloupnosti se podle měření dobře pozorovaných dvojhvězd jedná o rozsah hmotností od 15 do více než $60 M_{\odot}$ a poloměrů od 6 do více než $10 R_{\odot}$.

Většina pozorovaných O hvězd se nachází v blízkosti galaktické roviny, patří k první populaci a jedná se zřejmě o mladé hvězdy. Řada hvězd spektrálního typu O se však nachází i ve sférické složce Galaxie. Mají rozložení energie podobné normálním mladým O hvězdám, jejich jasnost je však mnohem menší a jsou označovány jako podtrpaslíci spektrálního typu O, t.j. O VI hvězdy. Tyto objekty jsou zřejmě málo hmotné a musí se svým vývojovým stadiem zásadně lišit od normálních O hvězd. Zarážejícím faktem je, že atmosféry těchto hvězd se svými spektrálními projevy velmi podobají atmosférám normálních O hvězd. Hvězdy typu O byly dále klasifikovány do podtříd O3 až O9.5 podle klesajícího stupně ionizace absorpčních čar pozorovaných v jejich spektrech. Walborn a kol. (2002) zavedli novou spektrální podtřídu O2. Ve spektrech mnoha O hvězd jsou pozorovány emisní čáry helia He II 4686 a též dusíku N III 4634, 4640 a 4641. Tyto hvězdy bývají označovány jako Of hvězdy. U některých Of hvězd se pozoruje i emise C III 5696 a též $H\alpha$ emise. Frost a Conti (1976) zavedli klasifikaci Oe pro O hvězdy s $H\alpha$ emisí, upozornili na to, že tato emise bývá časově proměnná podobně jako pro chladnější hvězdy spektrálního typu Be (viz dále) a vyslovili názor, že Oe hvězdy se zásadně liší od Of hvězd, pro něž u emisních čar podle nich nedochází k časovým změnám. To ale nemusí být pravda, jak ukazuje např. studie Of hvězdy ζ Pup, pro níž Conti a Niemela (1976) pozorovali zcela prokazatelné změny profilu čáry $H\alpha$. Conti (1974) udělal přehlídku osamocených O hvězd a Thaller(ová) (1997) publikovala podobnou přehlídku O hvězd ve dvojhvězdách. Oba zjistili, že $H\alpha$ emise se prakticky nevyskytuje u hvězd hlavní posloupnosti, ale pouze pro hvězdy obří a veleobří.

Pro některé O hvězdy v pásu hlavní posloupnosti byly také pozorovány rychlé změny profilů absorpčních čar, které byly interpretovány jako projev atmosferických pulsací. Podle rovnice (518) lze pulsační periodu horkého O veleobra o hmotnosti $50 M_{\odot}$ a poloměru $20 R_{\odot}$ odhadnout na pouhých 0,25 dne. Baade objevil změny profilů čar O4If hvězdy ζ Pup s pravděpodobnou periodou $0^d,356$, kterou interpretoval jako projev neradiální pulsace. Lze odhadnout, že pravděpodobná rotační perioda ζ Pup musí být delší než 4 dny, tedy podstatně delší, než zjištěná perioda změn profilů čar. Není ale dosud znám mechanismus, který by v této části HR diagramu vedl k pulsační nestabilitě.

Konečně *Wolfovy–Rayetovy hvězdy* (dále WR hvězdy) jsou definovány přítomností velmi silných a širokých emisních čar ve spektru, které svým rozložením energie odpovídá spektru hvězdy spektrálního typu O. Název těchto hvězd je odvozen od jmen dvou astronomů, kteří jako první pomocí vizuálního spektroskopu podobné spektrum pozorovali při přehlídce hvězd v souhvězdí Labutě (viz Wolf a Rayet 1867). Čárové spektrum WR hvězd je patrně čistě emisní. Pro WR hvězdy se používá rovněž podrobnější spektrální klasifikace na podtřídy, přičemž se podtřídy definují opět sestupně podle přítomnosti emisních čar s klesajícím stupněm ionizace pozorovaných v optickém spektru. Navíc se WR hvězdy rozpadají do dvou paralelních skupin:

1. *WC hvězdy*, pro něž jsou pro ně charakteristické silné emisní čáry iontů uhlíku C a kyslíku O.
2. *WN hvězdy*, v jejichž čárových spektrech dominují emisní čáry iontů dusíku N.

Obě skupiny mají silné emisní čáry helia He II. Neexistuje žádné kritérium luminositní třídy a v zásadě není vůbec jasné, zda takto zavedené spektrální klasifikaci lze přiřadit monotonně se měnící efektivní teplotu. Dosud byly zavedeny spektrální podtřídy WC5 až WC9 a WN2 až WN9. Bylo ovšem zjištěno, že WR hvězdy se podobně jako O hvězdy nacházejí v diskové složce Galaxie, hlavně ve spirálních ramenech. Odhady jejich základních fyzikálních vlastností naznačují rozsah efektivních teplot mezi 30 000 a 90 000 K a hmotností mezi 10 a 40 M_{\odot} .

Normální O hvězdy jsou zřejmě hvězdami vyvíjejícími se od hlavní posloupnosti nulového věku, jejichž vývoj je však ovlivněn i ztrátou hmoty ve formě hvězdného větru.

O vývojové stadium WR hvězd se dosud vedou určité spory. Mohou to být objekty ve stadiu hoření helia v jádru, soudí se, že atmosféry WN hvězd jsou obohaceny produkty hoření vodíku a WC hvězdy produkty hoření helia. Vzhledem k jejich menším hmotnostem a stejnému prostorovému rozložení se někteří badatelé domnívají, že WR hvězdy vznikají během vývoje z O hvězd. Roli v jejich vývoji zřejmě hraje velmi silný hvězdný vítr a snad i rotace a v některých případech i jejich podvojnost. Rozsáhlé obaly WR hvězd se někdy mohou v čase měnit, což dokazuje případ dvojhvězdy CV Ser, u níž došlo ke zmizení fotometrických zákrytů.

Pro úplnost je třeba uvést, že WR spektrum se pozoruje také pro některé velmi hmotné O hvězdy s mohutným hvězdným větrem, který pozorované WR spektrum způsobuje. V těchto případech se zřejmě jedná o mladé a nevyvinuté hvězdy, bohaté na vodík. Tato WR spektra bývají klasifikována WN5h až WN7h, kde přípona „h“ (někdy též „ha“) označuje bohaté zastoupení vodíku. Jde vesměs o objekty ve dvojhvězdách – viz Schnurr a kol. (2009) a citace tam uvedené.

Pokud jde o podtrpaslíky O, jejich vývojové stadium je méně jasné, musí se ale zřejmě jednat o hvězdy v pozdním vývojovém stadiu po vypálení vodíku a patrně v období hoření helia ve slupce. Zdá se, že v HR diagramu se kupí kolem vertikální linie u efektivní teploty asi 40 000 K, od hlavní posloupnosti až k bílým trpaslíkům. Podle hrubých odhadů jsou hmotnosti O podtrpaslíků menší než hmotnost Slunce. V jediném případě, kdy byl pozorován O podtrpaslík ve dvojhvězdě spolu s hvězdou spektrálního typu G, existuje odhad jeho hmotnosti na 0,55 M_{\odot} .

16.2 Hvězdy spektrálního typu B

Hvězdy spektrálního typu B se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku a neutrálního helia, chybí již čáry He II a jsou přítomny čáry lehčích ionizovaných prvků jako C II, O II, N II atd. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 2,2 do 15 M_{\odot} , poloměrů od 2,1 do 6 R_{\odot} a efektivních teplot od 9 400 do 30 000 K. Kromě normálních B hvězd se pozorují pulsující hvězdy, několik typů chemicky pekuliárních hvězd a též hvězdy se závojem, které se vyznačují přítomností emisních čar vodíku. Mnohé B hvězdy rychle rotují a nejkratší rotační periody jsou 0^d,3–0^d,5.

16.2.1 Chemicky pekulární Bp hvězdy

Mezi B hvězdami a hvězdami spektrálního typu A (viz níže) se pozorují hvězdy se zřetelně anomálním zastoupením některých chemických prvků. Preston (1974) zavedl zkratku CP k označení chemicky pekulárních hvězd horní části hlavní posloupnosti a rozlišil čtyři základní typy:

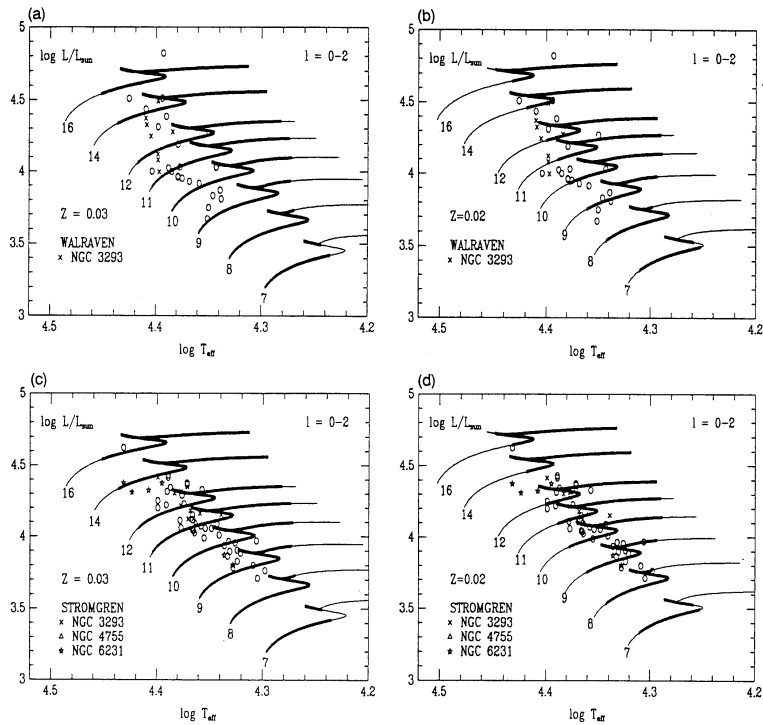
1. CP1 = Am hvězdy (dle novějšího označení),
2. CP2 = magnetické Bp a Ap hvězdy,
3. CP3 = HgMn hvězdy,
4. CP4 = B hvězdy se slabými čarami helia (He-weak stars).

Silná, zhruba dipólová magnetická pole se pozorují pro hvězdy spektrálních typů B1–B2 s anomálně silnými čarami helia (He-strong stars) a pro některé B3p–B7p hvězdy se slabými čarami helia a anomálně silnými čarami Si a Ti. Pro tyto objekty se pozorují periodické změny jasnosti, intensity spektrálních čar a intensity magnetického pole s periodou rovnou rotační periodě hvězdy. Osa magnetického dipólu není obecně totožná s osou rotace hvězdy a lze ji z pozorování určit. Některé Bp hvězdy se silnými čarami helia jsou současně hvězdami se závojem, neboť se u nich pozoruje $H\alpha$ emise, která se rovněž mění periodicky s rotační periodou hvězdy. Jedna z těchto hvězd, V1046 Ori, je primární složkou dvojhvězdy s periodou 18,^d6 a s výrazně výstřednou dráhou. Existence silných makroskopických magnetických polí u některých B a A hvězd zůstává nevysvětlenou záhadou. Existují hvězdy, které jsou ve všech základních fyzikálních parametrech, jež v současnosti dovedeme určit, těmto magnetickým hvězdám velmi podobné, ale žádné měřitelné magnetické pole nemají.

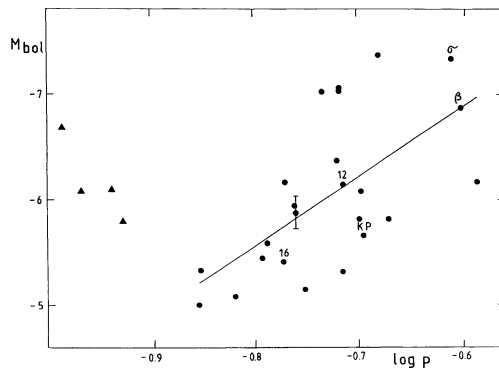
CP3 hvězdy s anomálně silnými čarami Hg a Mn se vyskytují u spektrálních podtříd B6–B9, zatímco nemagnetické B4–B5 s anomálně slabými čarami helia mají ve spektrech nadbytek P a Ga. Rovněž pro obě tyto skupiny lze pozorovat změny jasnosti s rotační periodou.

16.2.2 Pulsující β Cep hvězdy

β Cep hvězdy se vyznačují periodickými – a často multiperiodickými – změnami jasnosti a radiální rychlosti s periodami pod 0,^d3 (typické periody jsou mezi 0,^d1 a 0,^d25). Jsou to hvězdy spektrálních podtříd B0–B2 a luminositních tříd III–IV, tedy hvězdy, které se již vyvinuly podél hlavní posloupnosti. Jejich pulsace se poměrně nedávno podařilo objasnit pomocí *opacitního mechanismu*, který souvisí s prvky skupiny železa a je účinný při teplotách kolem $2 \cdot 10^5$ K. Novější studie ukazují, že pro β Cep hvězdy neexistuje dobře definovaný vztah mezi periodou, barvou a zářivým výkonem, což patrně souvisí s tím, že pulsace mnohých β Cep hvězd nejsou radiální, ale neradiální. Dziembowski a Pamyatnykh (1993) ukázali, že pulsační nestabilita typu β Cep nastává skutečně v té oblasti HR diagramu, kde se β Cep hvězdy nacházejí. Je třeba se zmínit, že samotný prototyp skupiny, hvězda β Cep je rovněž hvězdou se závojem, má magnetické pole, které se mění s rotační periodou hvězdy a je složkou dlouhoperiodické dvojhvězdy ve výstředné dráze, což m.j. vede ke zdánlivým změnám její pulsační periody.



Obrázek 90: Teoreticky spočtené vývojové stopy hvězd na HR diagramu, s tučně vyznačenými obdobími, kdy se u nich vyskytují pulsační nestability (módy $l = 0, 1, 2$). Symboly jsou vyneseny pro pozorované pulsující hvězdy z vybraných hvězdokup. Převzato z práce Dziembowski a Pamyatnykh (1993).



Obrázek 91: Diagram absolutní hvězdná velikost – perioda pro hvězdy typu β Cep, který ukazuje, že vztah perioda – zářivý výkon pro tento typ pulsujících hvězd neexistuje. Převzato z práce Sterken a Jerzykiewicz (1993).

16.2.3 Pomalu pulsující B hvězdy (Slowly pulsating B stars, SPB)

Asi od počátku osmdesátých let dvacátého století byly objevovány malé periodické (a často také multi-periodické) světelné změny u hvězd středních spektrálních B podtypů kolem B5 s periodami delšími než β Cep hvězdy: asi od 1 do 3 dnů. Dziembowski a spol. (1993) teoreticky dokázali, že opacitní mechanismus, který způsobuje pulsační nestabilitu β Cep hvězd, vede rovněž k nestabilitě hvězd středních B podtypů s periodami od $0,4^d$ do $3,5^d$, a to se zdá existenci pomalu pulsujících teoreticky vysvětlovat. Spolehlivé zařazení konkrétního objektu do této skupiny vyžaduje systematická a pečlivá pozorování. Podobně dlouhé periody jsou totiž běžnými rotačními periodami B hvězd. Harmanec (1981) navíc ukázal, že největší počet známých dvojhvězd s B složkami má oběžné periody mezi 1 a 3 dny. Hmotnosti pomalu pulsujících hvězd jsou asi mezi 3 a $9 M_{\odot}$.

Zajímavé závěry přinesla práce Briquet(ové) a kol. (2007). Tito autoři provedli srovnávací studii 24 jasných pomalu pulsujících hvězd a 24 jasných magnetických Bp hvězd. Studovali hvězdy, pro které existují přesné paralaxy z družice Hipparcos, takže bylo možné značně spolehlivě určovat i vývojový věk obou skupin. Ukázalo se, že pomalu pulsující hvězdy jsou starší než Bp hvězdy a mají také měřitelná magnetická pole, ale mnohem slabší než Bp hvězdy. Asi třetina pomalu pulsujících hvězd jsou dvojhvězdy, zatímco mezi Bp hvězdami byla podvojnost dosud nalezena jen v několika málo případech. Mezi studovanými 24 Bp hvězdami je známa pouze jedna dvojhvězda. Většina Bp hvězd i pomalu pulsujících hvězd rotuje pomalu, ale pro obě skupiny jsou nejtýpickejší rotační periody mezi 1 a 2 dny. Systematická analýza měření jasnosti za delší období ukazuje, že Bp hvězdy mají jedinou (rotační) periodu změn a světelná křivka je zpravidla modulována jak rotační periodou, tak i periodou poloviční. Naproti tomu pomalu pulsující hvězdy jsou modulovány několika periodami a fázová změna s každou z nich je sinusová.

16.2.4 Hvězdy se závojem (Be stars)

Hvězdy se závojem (anglicky: Be stars) jsou hvězdy spektrálních typů O, B či A, v jejichž spektru byly alespoň někdy za dobu jejich spektroskopických pozorování zjištěny emise v čarách vodíku Balmerovy serie. První dvě byly objeveny již při prvních pozorováních vizuálním spektroskopem roku 1867. Jejich charakteristickou vlastností je velká časová proměnnost na nejrůznějších časových škálách. V současné době lze pokládat za dobře prokázané, že emisní čáry v jejich spektrech vznikají v rozsáhlých obálkách – závojích – které je obklopují a které zřejmě nepravidelně mizí a po čase se obnovují. Jde o plynné obaly, jejichž rozměry alespoň o řád převyšují rozměry samotných hvězd. Příčina vzniku závoje a některé typy zjištěné proměnnosti hvězd se závojem zůstávají i po půldruhém století jejich studia záhadou.

Co je o hvězdách se závojem v současnosti známo? Samotné hvězdy se v naprosté většině případů vyznačují velkými rotačními rychlostmi a statisticky vzato se lze domnívat, že rychle rotují všechny, t.j. že ty, pro něž pozorujeme nízkou hodnotu promítnuté rotační rychlosti $v \sin i$, vidíme zhruba od pólu jejich rotace.

Jsou známy následující typy jejich časové proměnnosti:

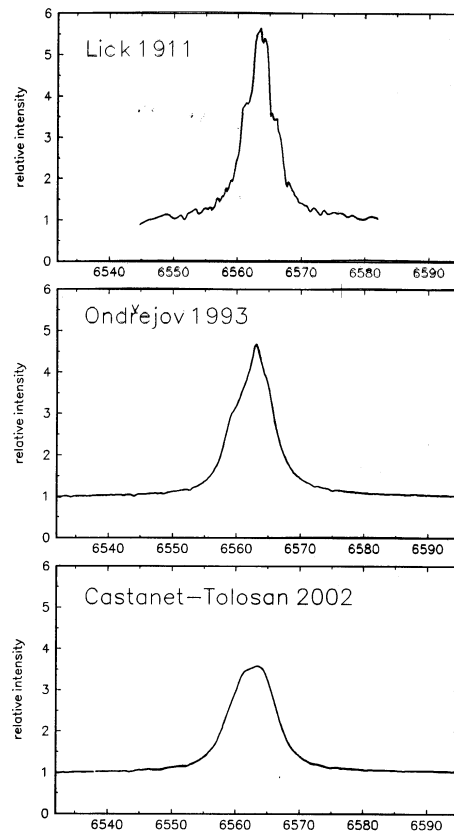
1. *Dlouhodobé spektrální změny a změny jasnosti.* Dlouhodobé spektrální změny hvězd se závojem jsou velmi nápadným jevem, který od počátku přitahoval pozornost mnoha pozorovatelů. Na časové škále

let až desetiletí (horní hranice není známa vzhledem k tomu, že máme pozorování jen za 130 let) se ve spektrech objevují a mizí emisní čáry. V obdobích bez emisních čar se hvězdy podobají normálním O, B či A hvězdám. Naopak v době silných emisí se ve spektrech mohou objevit ještě dodatečné absorpční čáry, které jsou užší než čáry fotosferické. Tyto čáry vznikají zřejmě dodatečnou absorbcí záření v těch částech závoje, které se promítají na disk samotné hvězdy. V anglické literatuře se jim proto říká „shell lines“, t.j. čáry obálky.

Pokud pozorujeme hvězdu spíše od jejího rovníku, jsou emisní čáry zpravidla dvojité, neboť obálky, ve kterých vznikají, rotují, a my pozorujeme zachycené a znovu vyzážené záření jak z části obálky, která se k nám přibližuje, tak z té, která se od nás vzdaluje. Intenzity do fialova a do červena posunutých dvojitých vrcholků emisních čar se obvykle označují V a R a v obdobích, kdy je emise přítomna, lze někdy pozorovat cyklické změny poměru jejich intenzit, zvané V/R změny. Odehrávají se v cyklech nestejně dlouhých, dlouhých několik let. Pokud měříme i radiální rychlost celé emisní čáry na jejích křídlech, zjistíme, že se mění souběžně s cyklickou V/R změnou, a to s amplitudou několika desítek km s^{-1} .

Současně se spektrálními změnami dochází i ke změnám jasnosti a barvy objektu, přičemž lze rozlišit dva možné případy: (a) Postupné objevování se emisních čar ve spektru a vznik nového závoje jsou doprovázeny zjasněním objektu a pohybem od hlavní posloupnosti k veleobrům v barevném diagramu $U - B$ vs. $B - V$. V tom případě hovoříme o *pozitivní korelaci*. (b) Vznik závoje je doprovázen poklesem jasnosti objektu a jeho pohybem podél hlavní posloupnosti ke chladnější spektrální podtřídě v $U - B$ vs. $B - V$ diagramu. To je *inverzní korelace*. Pokud jsou pro danou hvězdu k dispozici údaje z více období vzniku a zániku závoje, je známo, že nastává vždy stejný typ korelace. To podporuje domněnku o tom, že výskyt dvou typů korelací je geometrickým efektem: inverzní korelace nastává tehdy, pozorujeme-li danou hvězdu zhruba od rovníku. Vznikající chladnější obálka v tom případě hvězdu zčásti stíní a činí ji zdánlivě chladnější. Pokud hvězdu vidíme více od pólu, simulují vnitřní opticky tlusté části vznikající obálky zdánlivé narůstání poloměru hvězdy.

2. *Střednědobé spektrální změny a změny jasnosti.* Střednědobé změny se obvykle odehrávají na škále týdnů a měsíců. V některých případech jde o změny, které jsou jakousi miniaturní obdobou změn dlouhodobých, které mohou mít i stejnou příčinu — dočasný vznik slabé obálky. Často se však pozorují *periodické* změny radiální rychlosti, poměru V/R , intenzity spektrálních čar i jasnosti. Ty obvykle souvisejí s dvojhvězdností dané hvězdy se závojem.
3. *Rychlé spektrální změny a změny jasnosti.* Rychlé změny se odehrávají na škále od několika málo desetin dne do asi 2–3 dnů, mají zpravidla velmi malé amplitudy a jsou intenzivně studovány teprve od konce sedmdesátých let 20. století. Jedná se jednak o změny profilů spektrálních čar ve formě měnící se asymetrie a také ve formě putujících vlnek, pohybujících se od fialového k červenému křídlu čáry. Změny jasnosti mají amplitudy zpravidla menší než $0^m 1$. Zdá se, že světelné změny jsou periodické, s periodami blízkými k rotačním periodám příslušných hvězd. Světelné křivky jsou nesinusové a jejich amplituda a tvar se dlouhodobě mění. Změny profilů jsou rovněž periodické nebo možná i multiperiodické. Významnou charakteristikou rychlých změn je to, že jsou pozorovatelné

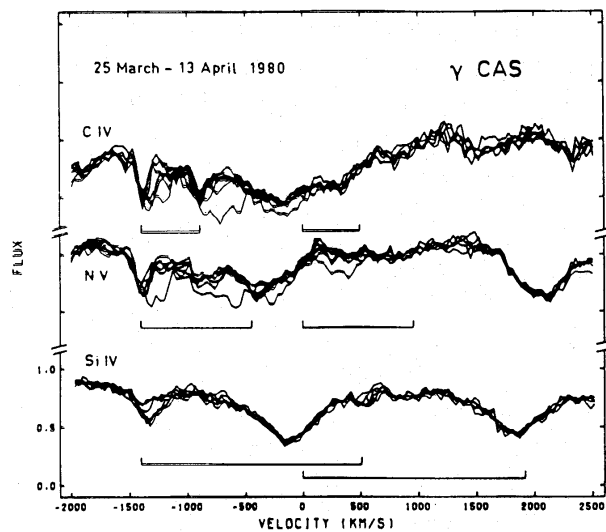


Obrázek 92: Dlouhodobé změny profilu čáry $H\alpha$ u hvězdy se závojem γ Cas mezi lety 1911, 1993 a 2002. Převzato z práce Harmanec (2002c).

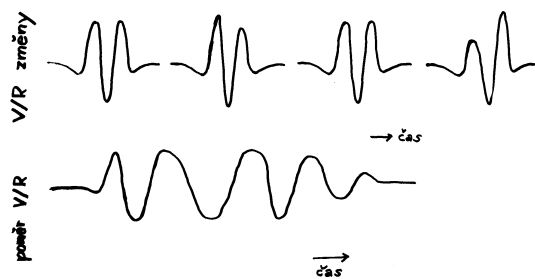
i v době, kdy je daná hvězda zcela bez emisních čar. O původu rychlých změn nepanuje dosud shoda. Část badatelů je vysvětluje jako projev neradiálních pulsací, jiní se domnívají, že jde o projev korotujících struktur v plynu nad fotosférou hvězdy.

Pokud jde o samotný vznik obálek, existuje celá řada hypotéz, které se je pokoušejí vysvětlit. Všechny se ale dosud setkávají s problémy a žádná z nich nebyla dosud universálně přijata. Uvedme si alespoň čtyři pracovní modely, které se v současnosti nejčastěji uvažují:

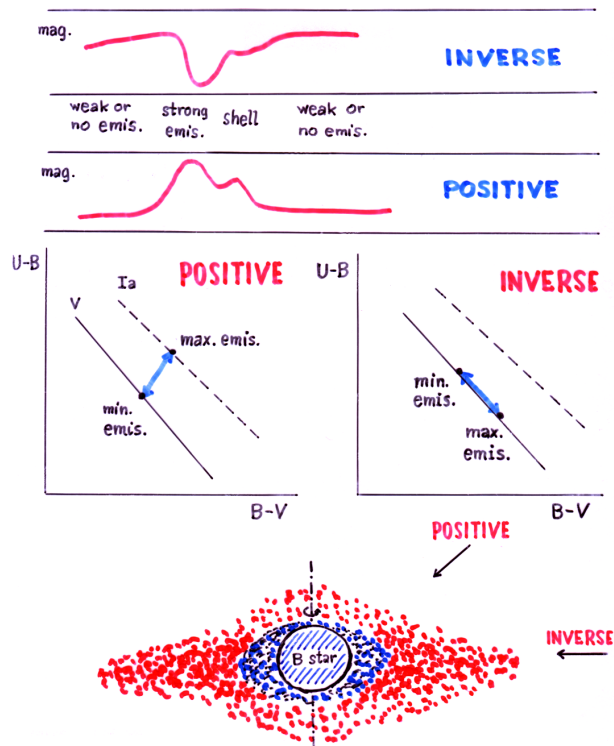
- *Model rotační nestability.* Struve (1931) poukázal na existenci korelace mezi šířkou emisních čar a pozorovanou hodnotou $v \sin i$ (obr. 98) a vyslovil domněnku, že obálky vznikají rotační nestabilitou na rovníku hvězd se závojem. Jeho hypotéza ale nevysvětluje dlouhodobou časovou proměnnost závoje. Kromě toho se zdá, že hvězdy se závojem dosahují jen asi 70 % kritické rotační rychlosti — viz Porter (1996). Nedávné studie konkrétních hvězd i teoretické studie Owockého však naznačují, že rotace může být velmi blízká kritické rotaci.



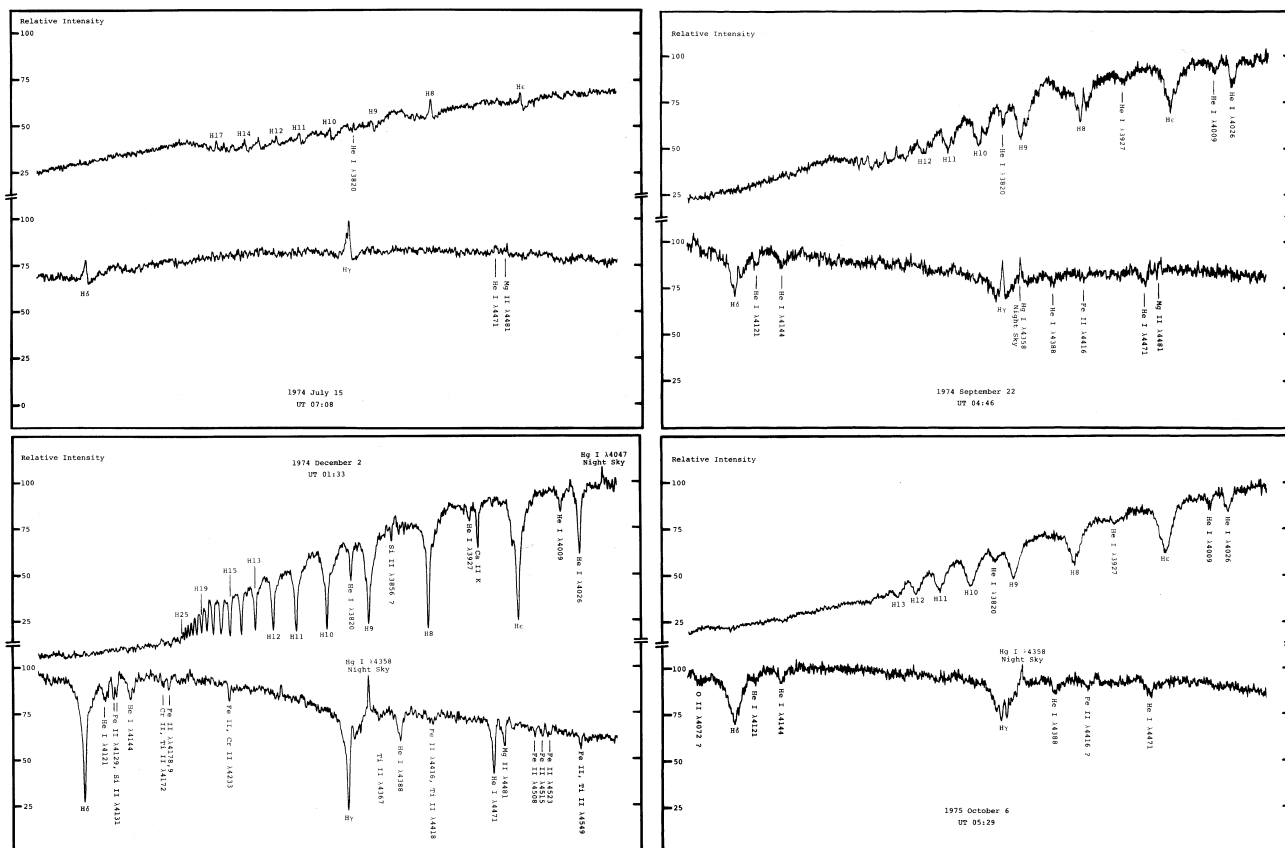
Obrázek 93: Rychlé změny úzkých absorpčních komponent v silných rezonančních spektrálních čarách v UV oboru pro hvězdu se závojem γ Cas v období 25. 3. až 13. 4. 1980. Převzato z práce Henrichs a spol. (1983).



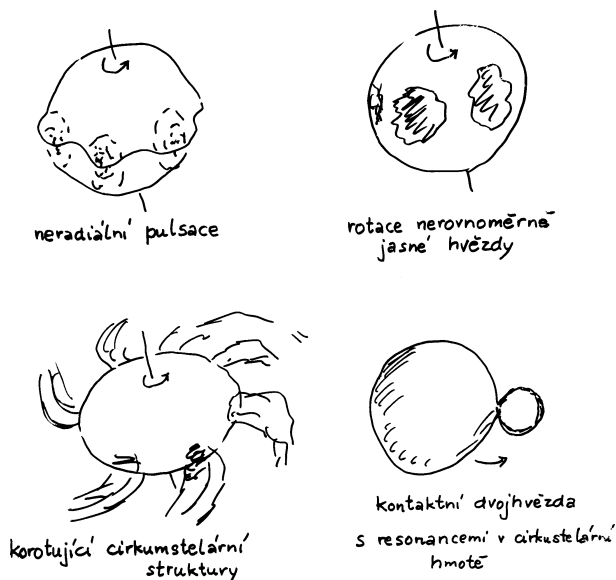
Obrázek 94: Schematicky znázorněné V/R změny, tj. poměru fialové a červené složky dvojité emisní čáry.



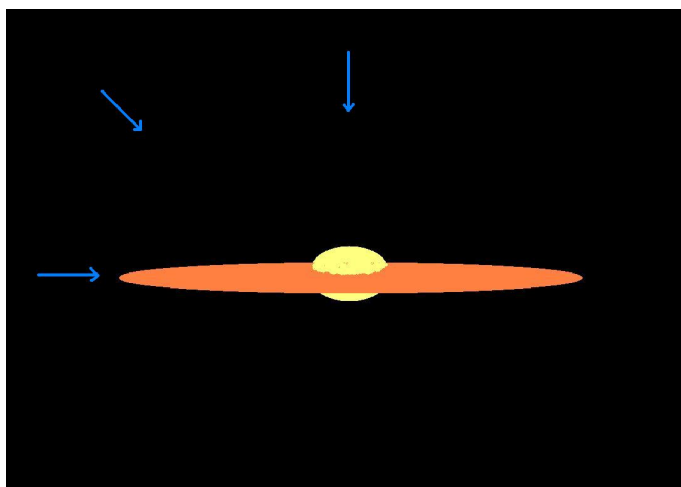
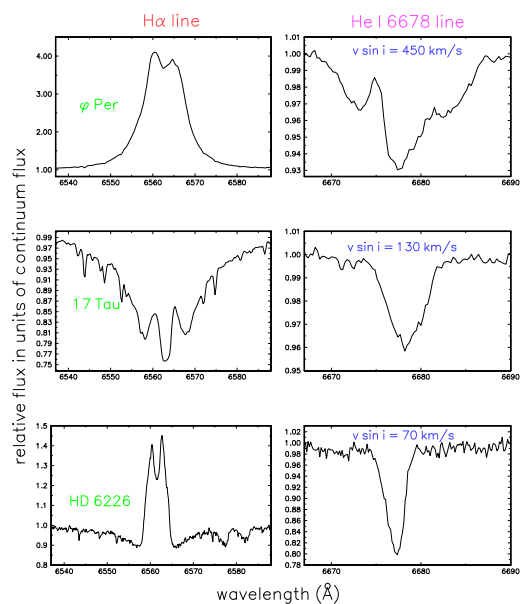
Obrázek 95: Schema pozitivní a negativní korelace ve vývoji obálky hvězdy se závojem, kdy je vznik obálky doprovázen zjasněním nebo zeslabením objektu.



Obrázek 96: Příklad výrazných dlouhodobých spektrálních změn u hvězd se závojem: Spektra hvězdy V832 Cyg = HD 200120 pořízená 15. 7. 1974, 22. 9. 1974, 2. 12. 1974 a o rok později 6. 10. 1975. Je vidět, že vznik nové obálky se projevil nejprve přítomností emisních čar v Balmerově serii vodíku a postupně — jak obálka mohutněla a zvětšovala se — objevily se absorpční čary z obálky, které jsou velmi výrazné na třetím spektru. O rok později se již hvězda jevila jako zcela normální hvězda spektrálního typu B. Převzato z práce Barkera (1982).



Obrázek 97: Schematické znázornění čtyř možných interpretací rychlých změn spektrálních profilů a jasnosti hvězd se závojem: neradiální pulsace, skvrny na povrchu hvězdy unášené rotací, korotující struktury v cirkumstelárním prostředí a dvojhvězdný model.



Obrázek 98: Pozorovaná korelace mezi pološířkou emisních profilů obálky a pološířkou profilů absorpčních čar (hodnotou $v \sin i$) pro hvězdy se závojem. Emise je měřena v čáře $H\alpha$, absorpce v He I (667,8 nm). Vpravo je zobrazeno pravděpodobné vysvětlení — zploštělá obálka, na kterou se díváme z různých směrů.

- *Dvojhvězdný model.* Kříž a Harmanec (1975) přišli s domněnkou, že závoje jsou ve skutečnosti akrečními disky a vznikají přítokem plynu z druhé složky ve dvojhvězdách. Jejich hypotéza vysvětluje přirozeným způsobem vysoké rotační rychlosti hvězd se závojem jako důsledek přenosu úhlového momentu dopadající hmoty, dále střednědobé změny a může vysvětlit i změny dlouhodobé. Podvojnost mnoha hvězd se závojem se ale nepodařilo prokázat a u některých dobře studovaných objektů lze dokonce přítomnost sekundáru, který by zaplňoval Rocheovu mez, zcela vyloučit. Harmanec a kol. (2002) předložili proto novou hypotézu: ukázali, že je-li rychle rotující hvězda složkou dvojhvězdy, může u ní docházet ke ztrátě hmoty a vzniku disku formou výtoku pouze z té oblasti rovníku, která je přivrácena ke druhé složce soustavy. Přítomnost druhého tělesa podmínky pro vznik takové rotační nestability poněkud zlepšuje.
- *Hypotéza rotací stlačovaného hvězdného větru.* Bjorkman a Cassinelli (1993) přišli s domněnkou, že závoje vznikají z hvězdného větru, který je u rychle rotujících hvězd podle jejich výpočtů stlačován do roviny rovníku. Podrobnější výpočty ale ukazují, že jejich mechanismus nedává dostatečně husté závoje, které by mohly vést ke vzniku pozorovaných emisních čar.
- *Pulsační hypotéza.* Zastánci pulsačního modelu rychlých změn vyslovili domněnkou, že k vyvrhování plynu by v rovníkových oblastech hvězd se závojem mohlo docházet ve chvílích, kdy se sejde ve fázi několik módů neradiálních pulsací, takže dodají kinetickou energii potřebnou k dosažení kritické rychlosti — viz např. Rivinius a spol. (1998). Jejich argument je založen na analýze dat hvězdy μ Cen pozorovatelné pouze z jižní oblohy. O to, zda jsou rychlé změny této hvězdy skutečně multiperiodické, se ale dosud vedou určité spory a jejich hypotézu je poněkud brzo hodnotit.

Vývojové stadium hvězd se závojem není vyjasněno. Zdá se dokonce, že celý jev není vázán na konkrétní vývojové stadium. Hvězdy se závojem se vyskytují jak mezi mladými hvězdami v blízkosti hlavní posloupnosti nulového věku, tak mezi vyvinutými obry a veleobry. To by do určité míry nasvědčovalo tomu, že mechanismus vzniku závoje je externí — jak to předpokládá např. dvojhvězdná hypotéza.

Podle nedávných pozorování hvězd se závojem v různých hvězdokupách se však zdá, že existuje korelace mezi procentuálním zastoupením hvězd se závojem v kupě a obsahem těžkých prvků. Více hvězd se závojem se pozoruje v kupách s nízkým obsahem těžkých prvků. Maeder a Meynet (2001) zjistili, že pro rotující modely s nízkým obsahem kovů se podmínky pro dosažení kritické rotace během vývoje zlepšují — na rozdíl od modelů spočítaných pro $Z = 0,02$. To by mohlo výše zmíněnou korelaci vysvětlit a naznačovat, že závoje vznikají vyvrhováním materiálu hvězdy samotné.

16.2.5 Svítivé modré proměnné (Luminous Blue Variables, LBV)

Za svítivé modré proměnné bývají označovány hmotné hvězdy s vysokou jasností, pro něž se pozorují změny jasnosti a barvy na několika časových škálách, od rychlé mikroproměnnosti až po vzácné výbuchy, vyznačující se zjasněním o několik hvězdných velikostí a velmi pravděpodobně značnou ztrátou hmoty. Soudí se, že představují vzácné, velmi krátce trvající stadium vývoje hmotných hvězd (trvající snad jen 40 000 let) předcházející stadiu WR hvězd. Pod tento název se nyní zahrnují proměnné typu P Cyg, S Dor a Hubbleovy–Sandageovy proměnné.

Ve spektrech těchto hvězd se pozorují výrazné emisní čáry vodíku, neutrálního helia a jednou ionizovaného železa, které v mnoha případech vykazují *P Cyg profily* (tzn. absorpce ve fialové části profilu, vedoucí k poměru dvojitě emise $V/R < 1$). Je zřejmé, že zde existuje určitá fenomenologická příbuznost s hvězdami se závojem.

Spektra, jasnost a tedy i povrchová či efektivní teplota těchto hvězd jsou značně proměnné. V klidných obdobích s minimem jasnosti se tyto objekty zpravidla jeví jako veleobří spektrálního typu B s efektivními teplotami nad 15 000 K a s emisními čarami vodíku a helia. V obdobích silných zjasnění se spektra mění na veleobry typu A až F a zesilují Fe II a zakázané [Fe II] emise. Soudí se ale, že bolometrický zářivý výkon zůstává i během velkých zjasnění nezměněný. Zdánlivý pokles teploty je důsledkem absorpce ve vyvržené plynové obálce a záření z krátkovlnné a optické oblasti je přerozděleno do záření delších vlnových délek. Bolometrické magnitudy těchto hvězd se pohybují kolem -10^m0 .

Pro hvězdy studované soustavněji se pozorují změny jasnosti na nejméně třech časových škálách:

1. Rychlé změny na škále dnů, s amplitudami 0^m1 až 0^m2 .
2. Cyklické změny o 1^m0 až 2^m0 , s délkami cyklů na škále let až několika desítek let, přičemž střední délka cyklu je pro daný objekt charakteristická.
3. Vzácně se objevující zjasnění o více než 3^m0 , která se u daného objektu vyskytnou zpravidla jednou za několik století. Tato zjasnění zjevně souvisí s vyvržením plynové obálky, která byla v některých případech následně i pozorována jako plošný útvar.

Stothers a Chin (1995) předložili důkazy ve prospěch hypotézy, že cyklická zjasnění jsou projevem opakující se dynamické nestability těchto hvězd v pozdních vývojových stadiích a spočetli i příslušné vývojové modely na podporu této hypotézy. Ukázali, že pro střední cykly pozorovaných zjasnění existuje slušně definovaný vztah perioda – svítivost ve tvaru

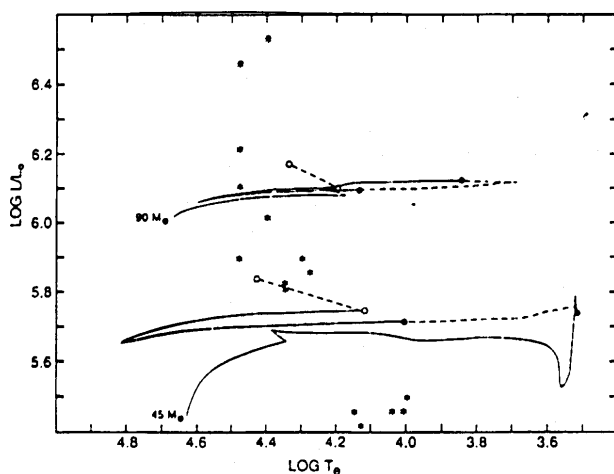
$$M_{\text{bol}} = (-12,9 \pm 0,5) + (2,4 \pm 0,5) \log P. \quad (690)$$

16.3 Hvězdy spektrálních typů A a F

Hvězdy spektrálního typu A se vyznačují optickými spektry, v nichž dominují silné čáry vodíku, chybí již čáry helia a jsou přítomny čáry mnoha ionizovaných kovů (Fe II, Ti II, Cr II atd.). Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,5 do 2,2 M_{\odot} , poloměrů od 1,6 do 2,1 R_{\odot} a efektivních teplot od 6950 do 9400 K.

Hvězdy spektrálního typu F se vyznačují optickými spektry, u nichž jsou čáry vodíku podstatně slabší, než u A hvězd, i když stále ve spektrech dominují. V jejich spektrech se pozoruje oproti A hvězdám také daleko více čar kovů. Pro objekty na hlavní posloupnosti se jedná o rozsah hmotností od 1,15 do 1,5 M_{\odot} , poloměrů od 1,25 do 1,6 R_{\odot} a efektivních teplot od 5900 do 6950 K.

Rozsah těchto parametrů pro hvězdy tříd A a F je tedy ve srovnání s teplejšími hvězdami B a O podstatně menší.



Obrázek 99: HR diagram pro hmotné hvězdy (45 a $90 M_{\odot}$) s vyznačenými polohami svítivých modrých proměnných v klidné fázi. Převzato z práce Stotherse a China (1995).

Mezi hvězdami typu A nalézáme kromě ‘normálních’ hvězd hlavní posloupnosti hvězdy výrazně chemicky pekuliární a také významné třídy pulsačně nestabilních hvězd, které mají přesah i do spektrálního typu F. Velmi dobrý přehled fenomenologicky zavedených tříd a jejich vzájemné souvislosti publikoval Kurtz (2000).

16.3.1 Am hvězdy (CP1 hvězdy)

Am hvězdy či metalické A hvězdy představují jednu z významných skupin *chemicky pekuliárních hvězd*. Jejich výskyt je omezen právě na spektrální typ A a jejich charakteristikou je, že zatímco čáry ionizovaného vápníku Ca II odpovídají rané spektrální podtřídě A, ostatní čáry kovů odpovídají pozdní A podtřídě nebo dokonce spektrálnímu typu F a čáry vodíku odpovídají nějaké střední podtřídě mezi oběma extrémami. Barevné indexy Am hvězd v $(U - B)$ vs. $(B - V)$ diagramu odpovídají zhruba stejné podtřídě jako čáry vodíku a rovněž efektivní teplota Am hvězd odpovídá nejlépe jejich spektrálnímu typu podle H I čar. Am hvězdy tvoří skupinu pekuliárních hvězd, pro něž se nepozoruje přítomnost globálního magnetického pole. Při studiu vysokodispersních spekter bylo zjištěno, že „horkou Am“ hvězdou je také Sirius A se spektrálním typem A0.

Někteří autoři zavedli rovněž popisný typ δ Del hvězdy k označení vývojově starších Am hvězd s luminositními třídami IV a III. Jiní badatelé upozornili na to, že tato třída je značně nehomogenní. Vyskytuje se rovněž označení ρ Pup hvězdy pro podobří a obří A5m až F5m hvězdy. U některých z těchto hvězd byly nalezeny změny jasnosti svědčící o pulsacích.

Conti (1970) shrnul vlastnosti Am hvězd a navrhl použít fyzikálnější definici. Podle něj se jedná o hvězdy chemicky pekuliární a to takové, které mají ve svých atmosférách buď nedostatek Ca (či také Sc) nebo přebytek prvků skupiny železa a těžších. Jedná se zásadně o objekty na hlavní posloupnosti a bylo rovněž

zjištěno, že u nich nedochází k žádným fyzikálním změnám jasnosti. Zejména díky Abtovým systematickým studiím bylo rovněž zjištěno, že většina, a možná i všechny Am hvězdy jsou dvojhvězdami. Naopak všechny dvojhvězdy se složkami spektrálního typu A a s periodami pod 2^d5 jsou Am hvězdami. Debernardi a spol. (2000) systematicky hledali spektroskopické dvojhvězdy mezi Am hvězdami ve hvězdokupách Hyády a Praesepe a publikovali pro celou řadu z nich dráhové elementy. Dvojhvězdy s oběžnými periodami pod 8^d5 mají všechny kruhové dráhy. Je také zajímavé, že v HR diagramu leží všechny Am hvězdy z těchto hvězdokup v dobře definovaném pásu nad hlavní posloupností samotné hvězdokupy. Am hvězdy vesměs pomalu rotují, což může být v řadě případů způsobeno právě jejich podvojností.

Zatím nejslibnějším vysvětlením jejich vzniku se zdá *teorie zářivé difuze* publikovaná Michaudem (1970). Michaud ukázal, že v atmosférách hvězd s velmi stabilními atmosférami může během vývojové krátké doby (asi 10^4 až 10^6 let) dojít k diferenciální separaci chemických elementů. Ty ionty, jejichž zrychlení tlakem záření je větší než jejich váha v dané atmosféře, se udržují na povrchu hvězdy, zatímco jiné, např. helium, klesnou do nitra hvězdy. Obecně řečeno jsou gradientem tlaku záření nadlehčovány těžší prvky s velkým počtem spektrálních čar a naopak lehké a relativně hodně v atmosféře zastoupené prvky s malým počtem čar v atmosféře postupně klesají. Tomu, aby se zářivá difuze mohla uplatnit, může u Am hvězd napomoci jejich pomalá rotace a fakt, že u nich neexistují hluboké podpovrchové konvektivní zóny, tedy procesy, které v jiných případech vedou k systematickému promíchávání chemických elementů. K vysvětlení pulsací ρ Pup hvězd se předpokládá, že během vývoje od hlavní posloupnosti nulového věku se i přes vliv zářivé difuze dostala postupně zóna ionizace He II do oblastí, kde znovu mohla vyvolat dostatečně účinně pulsační nestabilitu.

16.3.2 Ap hvězdy

Toto označení se používá pro hvězdy spektrálního typu A na hlavní posloupnosti, které mají neobvykle silné čáry některých kovů a zpravidla též měřitelné globální (často zhruba dipólové) magnetické pole o síle stovek až desetitisíc G. Jsou známy Ap SrCrEu hvězdy, které se vyskytují v rozsahu spektrálních typů od A3 do F0, a Ap Si hvězdy, pozorované mezi B8 a A2. Pro tyto hvězdy se obvykle pozorují periodické – ale obecně nesinusové – změny jasnosti, intensity magnetického pole a intensity čar kovů s periodou rovnou rotační periodě dané hvězdy. Metodami dopplerovské tomografie pro ně bylo zjištěno nerovnoměrné rozložení chemických elementů po povrchu hvězdy, a to ve vazbě na magnetické pole. Je zajímavé, že orientace magnetického dipólu je obecně jiná, než orientace rotační osy hvězdy. Modelováním změn s rotační periodou je možno zjišťovat základní fyzikální vlastnosti Ap hvězd. Jejich anomální chemické složení bývá nejčastěji opět vysvětlováno vlivem zářivé difuze při stabilizujícím účinku globálního magnetického pole. Hypotéza zářivé difuze vysvětluje i to, že Ap hvězdy nejsou zpravidla pulsačně nestabilní, helium totiž klesne hluboko do nitra hvězdy a opacitní mechanismus vzniku pulsací v zónách ionizace helia tak ztrácí svou účinnost.

Kurtz (1982) však přišel s objevem tak zvaných roAp hvězd, chladných Ap SrCrEu hvězd, které pulsují s velmi krátkými periodami mezi asi 6 až 15 minutami a s malými amplitudami světelných změn pod 0^m016 . U některých z nich jsou tyto pulsace multiperiodické. Jde o neradiální pulsace vysokých harmonických módů podél osy magnetického pole. V důsledku toho jsou pozorované amplitudy pulsací modulovány s rotační periodou hvězdy. Tyto pulsace jsou pravděpodobně vybuzeny v zóně ionizace vodíku.

Nověji zavedenou skupinou chemicky pekulárních hvězd jsou λ Boo hvězdy, které mají spektrální typ podle čar vodíku mezi A0 a F0, čára vápníku Ca II K odpovídá typu A0 nebo o něco pozdnějšímu, a čáry kovů, zejména Mg II 448,1 nm, jsou velmi slabé. Nízké zastoupení mají prvky skupiny železa, zatímco lehké elementy mají prakticky normální poměrné zastoupení. Detailní NLTE studie ukazují, že uhlík je zastoupen méně než kyslík a že existuje antikorelace mezi zastoupením uhlíku a kyslíku na jedné, a křemíku na druhé straně. To se zdá být ve shodě s teorií difuze obohacené o myšlenku akrece mezihvězdné látky. Na druhé straně bylo ale zjištěno, že mnoho λ Boo hvězd patří mezi pulsující δ Sct hvězdy – viz níže.

16.3.3 δ Scuti hvězdy

Jednotné označení pro skupinu pulsujících hvězd spektrálních typů A a F, které se nacházejí v pásu nestability v HR diagramu a mají pulsační periody kratší než 0^d3 , zavedl Breger (1979), který ukázal, že rozlišování na různé dříve zavedené a popisně definované kategorie nemá fyzikální opodstatnění.³⁹ Vzhledem ke krátkosti period těchto hvězd a malé jasnosti většiny z nich nebylo snadné pro ně v éře fotografické spektroskopie pořádit spektra s dostatečným fázovým rozlišením a proto byla většina z nich objevena díky fotometricky nalezeným změnám jasnosti. Amplitudy změn jasnosti se pohybují v širokém rozmezí od prahu detekce (asi 0^m01) až po 0^m8 a někdy jsou v čase proměnné. Světelné křivky jsou buď zhruba sinusové nebo s více maximy. Pro mnohé δ Sct hvězdy byla nalezena multiperiodicita – pozorované změny jsou výslednicí více periodických změn s různými periodami. V případech, kdy se podařilo pozorovat i změny radiální rychlosti, existuje mezi maximem světelné křivky a minimem křivky radiální rychlosti fázový posun asi 0^p1 . typický poměr amplitud obou křivek činí $92 \text{ km s}^{-1} \text{ mag}^{-1}$. δ Sct hvězdy na hlavní posloupnosti mají periody kolem 1 hodiny a amplitudy jejich světelných křivek jsou malé, 0^m02 nebo menší. δ Sct hvězdy s větší svítivostí, podobří a obří, mají delší periody a často i větší amplitudy světelných změn. Je ovšem třeba říci, že pouze asi jedna třetina hvězd, které se nacházejí v dolní části pásu pulsační nestability v HR diagramu jsou δ Sct hvězdy. Detekce pulsací závisí i na rotační rychlosti a chemickém složení hvězd, přesto se zdá, že musí existovat ještě další faktory, které ovlivňují, zda daná hvězda bude pozorovatelným způsobem pulsačně nestabilní nebo ne, abychom pozorovaný poměr mezi pulsujícími a nepulsujícími hvězdy v pásu nestability mohli beze zbytku vysvětlit. Meze pásu nestability v efektivní teplotě jsou 7500-8800 K na hlavní posloupnosti nulového věku a 6950 K pro $M_V = 1^m7$ až 8400 K pro $M_V = 0^m65$.

Breger (1979) a Breger, Stockenhuber (1983) a nejnověji Rodríguez a Breger (2001) shromáždili údaje o jasnostech, pulsačních periodách a dalších fyzikálních vlastnostech δ Sct hvězd a příbuzných objektů. Nalezli m.j. dobře definovaný vztah zářivý výkon – barva – perioda ve tvaru

$$M_V = -3,052 \log P + 8,456(b - y) - 3,121 . \quad (691)$$

S použitím podobného pozorovacího materiálu odvodili López de Coca a spol. (1990) empirický vztah pro

³⁹V literatuře existovala v této oblasti dosti značná pestrost pojmosloví. Někteří autoři nazývali krátkoperiodické proměnné *trpasličími cefeidami*, jiní tento název užívali pouze pro proměnné s amplitudou změn větší než 0^m3 . Jiní označovali proměnné s velkými amplitudami jako RRs hvězdy či hvězdy typu AI Vel. Objevilo se i označení ultrakrátkoperiodické proměnné, to ale vede k nedorozumění, neboť tak jsou označovány proměnné se sekundovými periodami změn. Původní označení trpasličí cefeidy se také nezdá vhodné, neboť jde v řadě případů o podobří či obří hvězdy.

periodu základního módu ve tvaru

$$\log P = -0,300M_{\text{bol}} - 3,195 \log T_{\text{eff}} + 11,90. \quad (692)$$

Odhadneme-li pulsační periodu A5 hvězdy na hlavní posloupnosti podle základního vztahu (511), dostaneme hodnotu 1,98 hodiny, podle zpřesněného vztahu (518) vyjde 1,10 hodiny, opět ve velmi dobré shodě s pozorováním.

Breger (1983) došel rovněž k závěru, že ve statistickém smyslu existuje dobrá shoda mezi pozorováními δ Sct hvězd ve hvězdokupách o známém vývojovém stáří a jejich průměrnými periodami. Jak totiž plyne z rovnic (511) či (518), je pulsační perioda přímo úměrná poloměru pulsující hvězdy. Protože během vývoje na hlavní posloupnosti poloměr hvězdy pozvolna roste, lze očekávat, že průměrné pulsační periody δ Sct hvězd v jednotlivých kupách budou tím delší, čím je hvězdokupa starší. To se statisticky skutečně pozoruje. Breger a Pamyatnykh (1998) se pokusili zjistit, zda lze nalézt shodu mezi předpovědí teorie hvězdného vývoje a pozorováním *sekulárních změn period* jednotlivých δ Sct hvězd. Zjistili, že pozorované změny period vykazují statisticky podobný počet pozvolného narůstání a pozvolného poklesu pulsační periody, přičemž rychlost změny je asi o řád vyšší, než očekávaný sekulární růst periody v důsledku vývojových změn. Jinak řečeno, pozorované změny jsou důsledkem jiných procesů, které patrně nesouvisí s vývojem δ Sct hvězd a na podobný test vývojové teorie jsou stávající řady pozorování ještě příliš krátké.

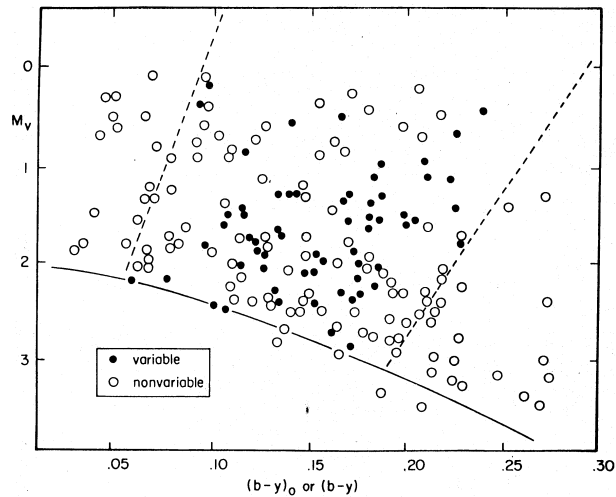
Celkově můžeme říci, že δ Sct hvězdy lze při současných znalostech kvalitativně dobře vysvětlit jako objekty vyvíjející se od hlavní posloupnosti v dolní části pásu nestability, který souvisí s ionizačními zónami vodíku a helia. Jistou část z nich mohou tvořit i hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku. To však nemůže plně vysvětlit, proč se v příslušné části HR diagramu pozoruje kromě δ Sct hvězd také tak velký počet nepulsujících A a F hvězd. Konkrétně pro δ Sct hvězdy je podle nejnovějších studií pro vznik pulsací rozhodující zóna ionizace He II.

16.3.4 SX Phe hvězdy

Hvězdy typu SX Phe jsou patrně analogií δ Sct hvězd pro objekty populace II, t.j. starší generace hvězd. Mají nižší obsah těžkých prvků, patří ke kulové složce Galaxie a vyznačují se velkými prostorovými rychlostmi. Jejich pulsační periody jsou krátké, ve většině případů kratší než $0^{\text{d}}08$. Jejich vývojové stadium však v současnosti zůstává záhadou. Takto staré hvězdy s efektivními teplotami kolem 8500 K by totiž měly být už dávno vyvinuty mimo oblast hlavní posloupnosti v HR diagramu. Existují proto dohady, že může jít o objekty ve vývojovém stadiu pozdějším než stadium obrů nebo že se jedná o dvojhvězdy, které se slily v jednu hvězdu.

16.3.5 γ Dor hvězdy

γ Dor hvězdy jsou velmi nově objevenou skupinou hvězd. Jde o hvězdy spektrálního typu F, které vykazují změny jasnosti a radiálních rychlostí s periodami delšími, než δ Sct hvězdy: od $0^{\text{d}}3$ do $2^{\text{d}}0$, přičemž obě křivky jsou prakticky ve fázi. Amplituda světelných změn je zpravidla pouze několik málo setin hvězdné velikosti. γ Dor hvězdy se nacházejí zčásti na chladném konci dolní části pásu nestability, zčásti vně něj



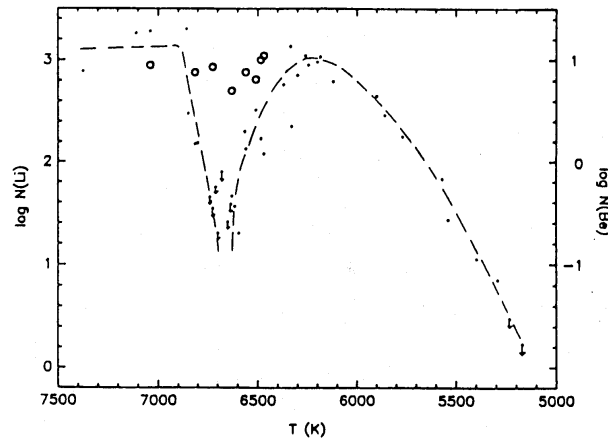
Obrázek 100: Polohy proměnných hvězd typu δ Scu na HR diagramu. Ve stejné oblasti se však nacházejí také hvězdy neproměnné. Převzato z práce Bregera (1979).

směrem k nižším efektivním teplotám. Spektrálně jde o hvězdy luminositních tříd V–IV. Většina badatelů se nyní kloní k tomu, že se jedná o pulsující hvězdy, neboť u některých byly nalezeny multiperiodické změny, mechanismus vzniku pulsací však dosud nebyl objasněn.

16.3.6 Lithium a berylium u F a G hvězd

Lithium a berylium jsou velmi citlivým indikátorem toho, jak hluboko směrem do centra hvězdy zasahují podpovrchové konvektivní zóny u F a G hvězd. Slučovací reakce lithia probíhají již při teplotě asi $2,5 \cdot 10^6$ K, berylia při asi $3,5 \cdot 10^6$ K. Pokud tedy konvektivní zóna dosahuje až do hloubek, kde jsou ve hvězdě potřebné vysoké teploty, bude obsah Li a Be v atmosférách takových hvězd značně nízký. K analýze ve spektrech se nejčastěji užívají rezonanční dvojice čar Li I 670,776 a 670,791 nm a Be II 313,042 a 313,107 nm. V atmosféře Slunce je poměrný obsah Li nízký, $\text{Li}/\text{H} = 10^{-11}$, zatímco typické maximum pro hvězdy populace I je $\text{Li}/\text{H} = 10^{-9}$. Poměrný obsah berylia je nízký shodně pro Slunce i hvězdy populace I: $\text{Be}/\text{H} \sim 10^{-11}$.

Studium obsahu lithia ve hvězdokupách ukazuje některé zajímavé souvislosti. Pro celou řadu hvězdokup byla nalezena zřetelná závislost obsahu lithia na efektivní teplotě, pro hvězdy kolem F5 je patrný silný pokles s minimem u efektivní teploty asi 6700 K, poté růst k nižším teplotám s maximem kolem 6300 K a poté opět plynulý pokles směrem ke chladnějším hvězdám. Lokální minimum kolem 6700 K se však nevyskytuje u mladých hvězdokup jako jsou Plejády či α Per a zdá se tak, že k dramatickému poklesu v obsahu lithia v atmosférách F hvězd kolem podtřídy F5 dochází mezi vývojovým věkem $5 \cdot 10^7$ a $5 \cdot 10^8$ let. Celá věc je ale zřejmě složitější, neboť asi pro polovinu F hvězd, které se nenacházejí ve hvězdokupách, je obsah lithia $\text{Li}/\text{H} = 10^{-9}$ a k žádnému poklesu u nich nedochází, ačkoliv jejich vývojový věk se odhaduje asi na



Obrázek 101: Abundance lithia (levá osa, tečky) a berylia (pravá osa, kroužky) v závislosti na teplotě, pro členy hvězdokupy Hyády. Čárkovanou čarou je vyneseno teoreticky spočtená teplotní závislost pro lithium. Převzato z ???.

$1-2 \cdot 10^9$ let. To znamená, že na rozsah konvektivní zóny musí mít vliv ještě jiné faktory, než jen vývojový věk. Pro Hyády existuje náznak souvislosti mezi vyčerpáním lithia a rotační rychlostí příslušných F hvězd. Michaud se snažil objasnit nedostatek lithia kolem spektrálního typu F5 teorií zářivé difuze. Jeho výpočty skutečně ukazují, že u těchto hvězd může docházet ke klesání lithia směrem do nitra hvězdy, ale celý proces probíhá příliš pomalu, než aby se mohl projevit už v Hyádách. Existují též úvahy o možné roli malé ztráty hmoty z atmosfér F hvězd a o roli meridionální cirkulace.

Studium berylia u stejných F hvězd v Hyádách ukázalo shodný a normální obsah berylia, z čehož lze vyvodit, že dolní hranice konvektivních zón u těchto hvězd zasahuje do oblastí s teplotami nad $2,5 \cdot 10^6$ K, ale nedosahují až k teplotám $3,5 \cdot 10^6$ K.

16.4 G, K a M hvězdy

Společným znakem chladných hvězd spektrálních typů G, K a M je existence hlubokých podpovrchových konvektivních zón, které vedou m.j. ke vzniku chromosfér a korón. Rozsah základních charakteristik pro hvězdy hlavní posloupnosti je následující:

- G hvězdy: $M = 0,91-1,16 M_{\odot}$, $R = 1,01-1,25 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 5\,200-5\,900$ K;
- K hvězdy: $M = 0,45-0,91 M_{\odot}$, $R = 0,52-1,01 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 3\,900-5\,200$ K;
- M hvězdy: $M = 0,10-0,45 M_{\odot}$, $R = 0,12-0,52 R_{\odot}$, $T_{\text{eff}} = 2\,600-3\,900$ K.

16.4.1 Projevy a časová proměnnost hvězdných chromosfér

Chromosféra byla objevena nejprve u Slunce a později na základě různých typů pozorování i u chladných hvězd. Jedná se o poměrně řídkou – a alespoň v případě Slunce i nepříliš rozsáhlou – vrstvu, která se vyznačuje vyšší teplotou, než je teplota pod ní ležící fotosféry. Tloušťka sluneční chromosféry činí asi 10^4 km. Vzhledem k vyšší teplotě se chromosféra projevuje podobně jako rozsáhlé plynové závoje horkých hvězd: přítomností emisních čar ve spektru. Nad chromosférou se nachází ještě mnohem řidší a geometricky rozsáhlejší koróna, která plynule přechází do prostoru. Záření koróny je nepatrné proti záření slunečního disku a proto lze korónu přímo pozorovat buď při úplných slunečních zatměních nebo z kosmického prostoru. V části sluneční koróny se pozorují emisní čáry železa a dalších prvků ve velmi vysokých stupních ionizace, což svědčí o tom, že ionizační teplota v koróně dosahuje teploty až 10^6 K. Existence teplotní inverze s rostoucí vzdáleností od středu hvězdy se vysvětluje dynamickým zahříváním v důsledku mohutných konvektivních pohybů. Konvektivní proudy vyvolávají rázové zvukové vlny, jejichž kinetická energie je úměrná hustotě a čtverci rychlosti. Hustota se vzdáleností klesá, rychlost roste a do chromosféry a koróny se tak dostává velké množství kinetické energie, z níž se jen nepatrná část vyzáří a většina se použije na silné zvýšení teploty.

Experimentální důkazy existence chromosfér a korón lze podle rostoucí vzdálenosti od středu hvězdy shrnout takto:

1. *Na I D čáry 588,9 a 589,5 nm:* V této dvojici absorpčních čar lze ve slunečním spektru pozorovat rychlostní strukturu spodní části chromosféry. Také u některých jasných veleobrů třídy G a K se pozorují dodatečné, do fialova posunuté absorpce u této dvojice sodíkových čar, svědčící o jejich okolohvězdném původu.
2. *Trojice Ca II čar v infračervené oblasti u 849,8, 854,2 a 866,2 nm:* V této trojici absorpčních čar se u hvězd s chromosférami pozorují asymetrie či slabé zaplnění jader čar emisí. Radiální rychlost se liší od radiální rychlosti fotosferických čar. (Pro zajímavost: tato trojice čar se pozoruje v emisi pro řadu silně interagujících dvojhvězd, jejichž primáry jsou hvězdy se závojem.)
3. *Čáry vodíku Balmerovy serie:* U chladných hvězd s chromosférami se pozorují nečekaně silné a široké čáry vodíku, odpovídající vyšší teplotě než je efektivní teplota příslušných hvězd. Kromě toho je např. u M1Ia hvězdy α Ori $H\alpha$ profil posunut vůči fotosféře do fialova. U veleobrů třídy K a zvláště jasných veleobrů tříd F a G se pozoruje i do fialova posunutá a časově proměnná $H\alpha$ emise. U obřích hvězd populace II se pozorují asymetrické dvojité $H\alpha$ emise.
4. *Emisní jádra čar Ca II K a H u 393,3 a 396,8 nm:* Čáry ionizovaného vápníku jsou u chladných hvězd silné a široké a v jejich jádru lze i na fotografických spektrech pozorovat emisní složku, zpravidla u hvězd, které se v HR diagramu nacházejí vpravo od pásu nestability cefeid. Pozorují se u hvězd spektrálního typu F a chladnějších.
5. *Emisní jádra dvojic čar Mg II u 279,55 a 280,27 nm a u 279,08 a 279,80 nm:* Čáry ionizovaného hořčíku v blízké ultrafialové oblasti mají obvykle vůči fotosféře lepší kontrast a emise v jejich jádrech

jsou tak lépe patrné. Pozorují se prakticky pro všechny hvězdy hlavní posloupnosti chladnější než F2 a dokonce pro Altair se spektrem A7IV–V a pro všechny obry a veleobry vpravo od pásu nestability.

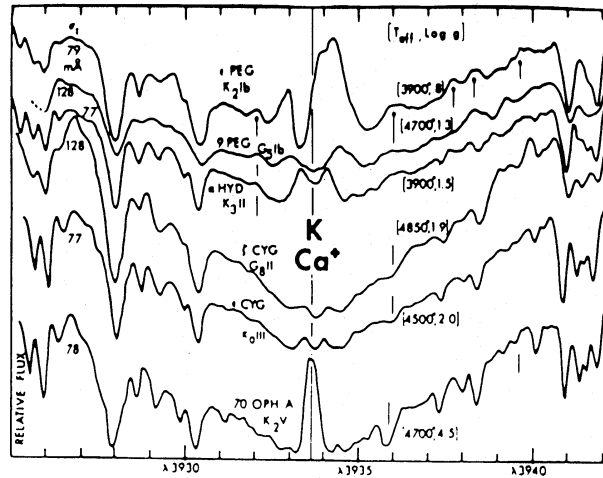
6. *Emisní jádra čáry Ly α u 121,57 nm:* Emisní profily vodíkové čáry Ly α byly poprvé pozorovány pomocí družice OAO3 – jde opět o centrální emisní jádro.
7. *Emisní čáry O I, C II, C IV a Si IV v UV oboru:* Emisní profily těchto čar se pozorují pro řadu chladných hvězd a svědčí o teplotách 10^4 až $2 \cdot 10^5$ K.
8. *Měřitelné záření v rentgenovém oboru spektra:* Rentgenové záření bylo družicí Einstein (HEAO-2) zjištěno pro hvězdy hlavní posloupnosti všech spektrálních typů a pro některé G a K obry. Naprosto se ale nedaří nalézt měřitelné rentgenové záření pro nejchladnější obry a veleobry v pravé horní části HR diagramu, pro G až M veleobry a obry chladnější než K2. Zdá se, že tyto hvězdy nemají horké koróny. Zároveň bylo ale zjištěno, že intenzita záření v rentgenovém oboru není jednoznačně dána spektrálním typem a luminositní třídou dané hvězdy. Zdá se, že rentgenové záření souvisí s přítomností magnetických polí podobných slunečním. Vznik magnetických polí u Slunce a chladných hvězd se vysvětluje obvykle mechanismem dynama působícího v konvektivních zonách. Cirkulace může být přirozeně ovlivněna i rotací hvězd. Pozorování svědčící o zřetelné korelaci mezi intenzitou rentgenového záření a rotační rychlostí hvězd v rozmezí spektrálních typů F7 až M5 se zdají tuto domněnku potvrzovat.

Pozorování hvězdným větrem rozšířených chromosfér u některých zákrytových dvojhvězd s chladnou veleobří složkou ukazují, že jde o geometricky rozsáhlé obálky o rozměrech několikrát převyšujících rozměry samotných hvězd.

Nejdelší pozorovací řady svědčící o časové proměnnosti hvězdných chromosfér existují celkem přirozeně pro Ca II K emise v jádře. Ukazuje se, že patrně všechny chromosféry jsou časově proměnné na časových škálách od minut až po staletí. Krátkodobé změny zvětšují zpravidla amplitudu změn s růstem intenzity emisní čáry. Pro několik desítek hvězd spektrálních typů G2 a pozdějších byly pozorovány několikaleté cykly ve změnách intenzity emise, připomínající jedenactiletý cyklus sluneční. Rychlé změny souvisejí v mnoha případech s rotací příslušných hvězd, což svědčí o přítomnosti skvrn. Dlouhé cykly podobné slunečním se zřejmě pozorují pouze u hvězd s rotačními periodami delšími než 20 dní.

Výskyt chromosférické aktivity lze posuzovat i podle typu hvězd, pro něž se pozoruje. Jedná se o následující třídy hvězd.

Hvězdy typu UV Cet. Tyto hvězdy byly definovány jako skupina M3Ve až M6Ve hvězd, u kterých dochází k občasným prudkým zjasněním o 1 až 6 hvězdných velikostí, přičemž zjasnění nastane během několika sekund či nejvýše několika málo desítek sekund a celé zjasnění trvá 10 až 50 minut. Mnozí autoři však pojímali tuto definici volněji a zařazovali mezi typ UV Cet všechny chladné hvězdy, u nichž dochází k občasným eruptivním zjasněním připomínajícím sluneční erupce ve velkém. Fotometrická pozorování těchto hvězd mimo období zjasnění v některých případech prokázala přítomnost světelných změn s periodou rotace, tedy opět cosi připomínající hvězdné skvrny.

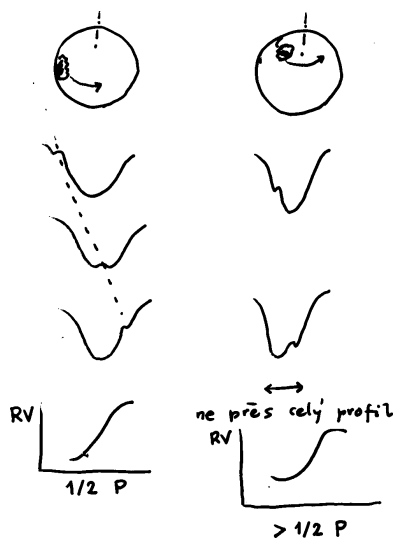


Obrázek 102: Profil chromosférické čáry Ca II pro šest chladných hvězd. Převzato z práce Stencel (1977).

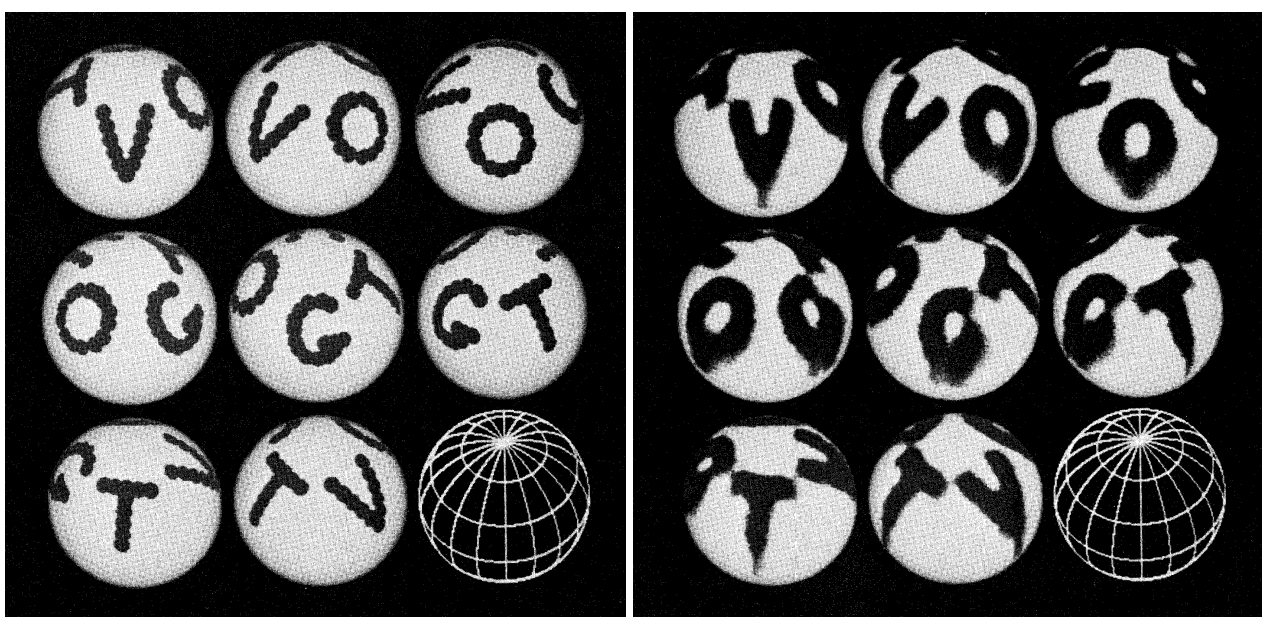
Hvězdy typu BY Dra. Tyto hvězdy byly definovány jako podskupina hvězd typu UV Cet (v obecnějším pojetí). Zařazují se mezi ně hvězdy hlavní posloupnosti spektrálních typů K a M s emisemi jak v čarách vodíku, tak v čarách Ca II a s periodickými světelnými změnami o malé amplitudě do $0^m,1$ a s periodami několik dní. Je známo asi 20 takových hvězd. Bopp a Fekel (1977) zjistili, že u zhruba poloviny všech známých BY Dra hvězd (včetně BY Dra samotné) lze prokázat, že se jedná o spektroskopické dvojhvězdy, ve většině případů s oběma složkami pozorovatelnými ve spektru. U většiny známých dvojhvězd je perioda rotace a oběhu synchronizována. BY Dra sama se pohybuje ve výstředné dráze a pozoruje se u ní t.zv. pseudosynchronizace vlivem větší přitažlivé síly v periastru.

Hvězdy typu RS CVn. Jedná se o dvojhvězdy s oběžnými periodami od 1 do 14 dnů se synchronizovanými periodami rotace a oběhu a s teplejšími složkami spektrálních typů F či G v blízkosti hlavní posloupnosti, u kterých se aspoň mimo zákryty pozorují silné emisní čáry Ca II a světelné změny s rotační periodou způsobené přítomností skvrn na jejich povrchu. V případě zákrytových dvojhvězd se tyto světelné změny sčítají se změnami v důsledku zákrytů a projevují se deformacemi zákrytových křivek. Dlouhodobá pozorování těchto hvězd prokázala, že skvrny postupně migrují jako u Slunce, takže fázování i sám vzhled světelných křivek se dlouhodobě mění.

Jednou z nejvíce studovaných RS CVn hvězd je zákrytová dvojhvězda AR Lac, u které se chromosférická aktivita pozoruje pro obě složky dvojhvězdy, jejichž spektrální typy jsou K0IV a G2IV. Existují i velmi detailní pozorování rentgenového záření z obou složek a model lokalizace korón u nich. Jinou hojně studovanou RS CVn hvězdou je V711 Tau, pro níž byly objeveny rychlé změny profilů čar, podobné putujícím vlnkám u horkých hvězd, a pro níž byla poprvé použita metoda dopplerovské inverze pozorovaných změn profilů čar (Doppler imaging). Pomocí ní lze nezávisle v různých obdobích sledovat migraci skvrn na povrchu podobných hvězd.



Obrázek 103: Schematicky znázorněné putování „vlnky“ ve spektrální čáře, v závislosti na poloze tmavé skvrny na povrchu hvězdy.



Obrázek 104: Uměle vytvořený povrch hvězdy s nápisem „VOGT“ a vpravo jeho úspěšná rekonstrukce z dopplerovských měření syntetických profilů čar. Převzato z práce Vogt, Penrod a Hatzes (1987).

Těsné dvojhvězdy typu W UMa. Jedná se o dotykové dvojhvězdy s krátkými oběžnými periodami a se složkami obvykle podobných a pozdních spektrálních typů a se světelnými křivkami, které se mění plynule během celé oběžné periody.

Hvězdy typu FK Com. Jedná se o osamocené hvězdy spektrálních typů G – K s promítnutými rotačními rychlostmi kolem 100 km s^{-1} , což je u tak chladných hvězd velice vysoká hodnota. Jejich hlavní charakteristikou je přítomnost emisních čar, často silnějších, než jaké se pozorují pro RS CVn dvojhvězdy. Pozorují se u nich rovněž světelné změny s amplitudou $0^m 1 - 0^m 2$ a s periodami několik dnů, patrně opět jejich rotačními periodami. Nevykazují žádné změny radiální rychlosti. Změny jejich dvojitých $H\alpha$ emisních profilů vykazují V/R změny s periodou světelných změn, čímž se podobají horkým hvězdám se závojem. Vzájemné fázování změn naznačuje, že fotometrické změny mohou souviset spíše s horkou, než s chladnou skvrnou. Při studiu vysokodispersních spekter byly u FK Com nalezeny malé změny radiální rychlosti $H\alpha$ emise s periodou světelných změn a po jistou dobu byl proto zvažován model interagující dvojhvězdy s velmi rozdílnými složkami. Vývojové stadium zůstává záhadou, snad by mohlo jít o hvězdy, které vznikly postupným slítním dvojhvězdy typu W UMa v jediné těleso. To by vysvětlovalo velkou rotační rychlost.

16.4.2 Pulsující hvězdy: Cefeidy, Miry a AGB hvězdy

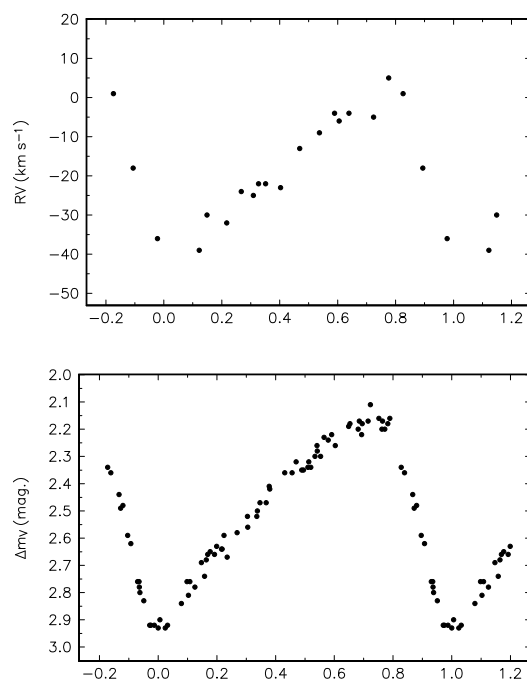
Cefeidy. Cefeidy dostaly svůj název podle druhé objevené proměnné tohoto typu, δ Cep, jejíž změny jasnosti objevil roku 1784 anglický amatér John Goodricke. (Vůbec první objevenou cefeidou byla η Aql, kterou 10. září 1784 objevil Edward Pigott.) Jsou to veleobří spektrálních tříd F, G a K s periodickými změnami jasnosti a radiálních rychlostí (viz obr. 105). Jejich periody se pohybují v rozmezí od několika dní do skoro 100 dní a amplitudy světelných změn činí $0^m 1 - 2^m 0$. Jedná se o vyvinuté hvězdy v pásu pulsační nestability, které již spálily i helium ve svých jádrech. Podle stáří se rozlišují cefeidy třídy I a II, což odpovídá objektům první a druhé populace hvězd. Typickým představitelem třídy I je právě δ Cep (spektrální typ F5Iab), cefeidám typu II se podle typické představitelky říká také hvězdy typu W Vir. Vztah perioda – zářivý výkon se pro cefeidy typu I a II liší, cefeidy typu I jsou pro danou pulsační periodu asi o $1^m 5$ jasnější než cefeidy typu II.

Kervella a kol. (2004) využili interferometrická určení poloměrů sedmi klasických cefeid k nové kalibraci nulového bodu vztahu perioda – zářivý výkon, přičemž sklon přímky přijali z dřívější studie Gierena a kol. (1998) založené na cefeidách z Velkého Magellanova mráčka. Jejich nejnovější vztah má tedy tvar

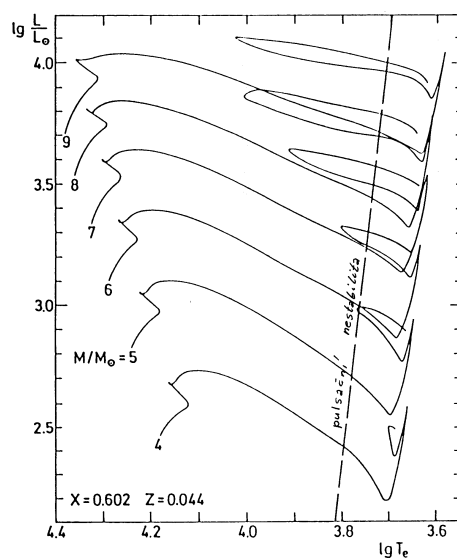
$$M_V = -(2,769 \pm 0,073) \log P - (1,440 \pm 0,075). \quad (693)$$

Miry Miry patří k nejnápadnějším proměnným hvězdám. Jejich periody změn jasnosti a radiálních rychlostí jsou vesměs delší než 100 dní a amplitudy světelných změn jsou větší než $1^m 0$ a nezdědká dosahují i více než $10^m 0$. Ve spektrech těchto hvězd se vyskytují i silné emisní čáry. Klasické vysvětlení je, že se jedná o obří hvězdy v pozdních vývojových stadiích.

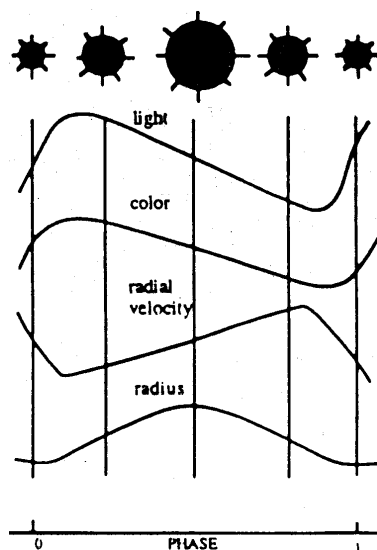
Prototyp skupiny Mira Ceti (omikron Ceti) je hvězdou spektrální třídy M7IIIe, jejíž jasnost se mění s periodou $331^m 65$ od $2^m 0$ do $10^m 1$. Sekundární složkou Miry Ceti je bílý trpaslík a snímky z Hubbleova



Obrázek 105: Srovnání první křivky radiálních rychlostí δ Cep (Bélopolsky 1895) s její první fotoelektrickou světelnou křivkou (Stebbins 1908). Na ose x je fáze od minima jasnosti s periodou $5^d,366316$.



Obrázek 106: HR diagram s čárkovaně vyznačeným pásem nestability, ve kterém se vyskytují cefeidy. Převzato z ???.



Obrázek 107: Schema pulsací cefeidy a odpovídajících změn luminosity, barvy, radiální rychlosti a poloměru. Převzato z ???.

kosmického dalekohledu naznačují interakci mezi oběma hvězdami a vedou k odhadu poloměru Miry: $700 R_{\odot}$.

Hvězdy asymptotické větve obrů (Asymptotic Giant Branch Stars, AGB). Jedná se o relativně krátké pozdní vývojové stadium cyklických tepelných pulsů souvisejících s hořením helia v heliové slupce a s hluboko zasahující povrchovou konvektivní zónou. Tímto stadiem projdou hvězdy o počátečních hmotnostech asi $0,8$ až $8 M_{\odot}$. Vyvine se u nich i silný hvězdný vítr, který vede k odvrhování hmoty do prostoru rychlostmi 10^{-8} – $10^{-4} M_{\odot}$ za rok a v chladných obálkách kolem nich se tvoří komplexní molekuly. Následující vývoj vede ke vzniku planetárních mlhovin a končí stadiem bílého trpaslíka. Existuje ale i domněnka, že jev souvisí s podvojností těchto objektů a konkrétně s pohybem sekundární složky uvnitř atmosféry obra. Mezi AGB hvězdy se zahrnují Miry, polopravidelné a nepravidelné proměnné.

16.5 Hvězdy v raných vývojových stádiích

Upozorníme, že může být obtížné rozlišit kontrahující objekty od objektů vyvinutých od hlavní posloupnosti — nacházejí se totiž na stejném místě na HR diagramu. Napovědět může členství ve hvězdokupě známého věku nebo chemické složení atmosfér, například čára lithia (na $670,7$ nm), jakožto prvku, který se spotřebuje ještě během smršťování.⁴⁰

⁴⁰Další z možností je molekula ^{13}CO pozorovaná v emisi v cirkumstelární látce. Obohacení tímto izotopem uhlíku má totiž původ v termonukleárních reakcích vyvinutých objektů, kdežto objekty před dosažením hlavní posloupnosti mají poměr $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$ stejný jako mezihvězdná látka.

Hvězdy typu T Tau. Jedná se o osamocené hvězdy spektrálních typů F5 – G5, u nichž se pozorují chromosferické emisní čáry (zejména Ca II) a rychlé a zcela nepravidelné změny jasnosti s amplitudami až 3^m0 . Mají nízký zářivý výkon a zpravidla se vyskytují uvnitř zářící či temné mlhoviny. Později se ukázalo, že v případech, kdy se u těchto hvězd pozoruje absorbní čárové spektrum, odpovídá zpravidla spektrálním typům mezi pozdním typem F a typem M, přičemž je ve spektru přítomna silná absorbní čára lithia 670,7 nm. Poměrně nedávno se podařilo prokázat, že mnohé T Tau hvězdy jsou složkami visuálních dvojhvězd s dlouhými oběžnými periodami. Dnes se většina badatelů shoduje v názoru, že hvězdy T Tau jsou mladé hvězdy, které teprve kontrahují k hlavní posloupnosti nulového věku (obr. 108) a dosud u nich probíhá i akrece hmoty z okolní mlhoviny (rychlostí $\dot{M} \leq 10^{-7} M_{\odot}/\text{yr}$). Tomu odpovídá i přítomnost silné čáry lithia. Jejich nepravidelné světelné změny se vysvětlují nehomogenitami v rozsáhlých obálkách, které je obklopují. Jejich trvání se odhaduje na 1 až 10 Myr.

V okolí těchto mladých hvězd se často vyskytují *Herbigovy–Harovy objekty* — zhuštěniny, vznikající při interakci výtrysků s okolní mezihvězdnou látkou.

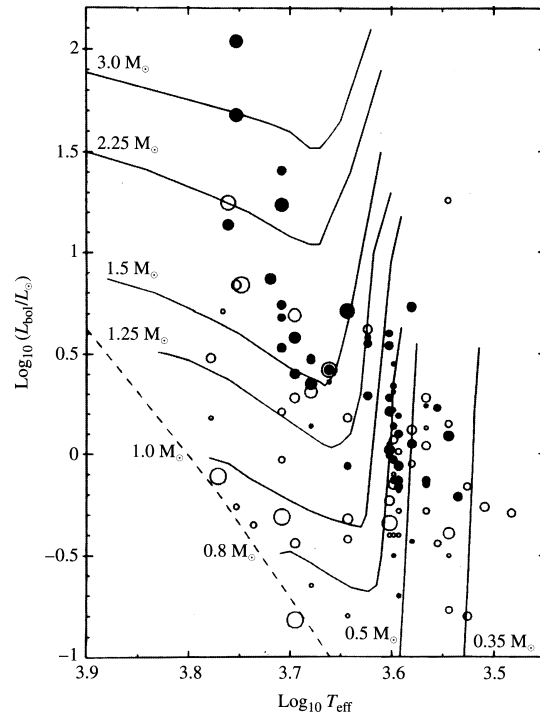
Mezi mladé hvězdné objekty (angl. young stellar objects, YSO) patří také hvězdy typu *FU Orionis* (nazývané též *fuory*). Jejich velká proměnnost se interpretuje tak, že na hvězdu ještě padá jádro velkého molekulového mračka, čímž vznikají opakovaná vzplanutí, trvající $\simeq 10$ roků, s $\dot{M} \geq 10^{-6} M_{\odot}/\text{yr}$. V systému je přítomen horký disk, s teplotou asi 1 000 K na 1 AU. Mezi vzplanutími bývají intervaly klidu, trvající 100 roků, a celkem fáze FU Ori trvá 0,1 Myr.

16.6 Hvězdy v pozdních vývojových stádiích

16.6.1 Bílí trpaslíci a ZZ Ceti hvězdy

Bílí trpaslíci se v dvourozměrné klasifikaci popisují luminositní třídou VII, mnohem častěji se však v astronomické literatuře objevuje označení DA, DB, DO a podobně, označující bílé trpaslíky se spektry spektrálních tříd A, B, O atd. Třída DA je charakterizována přítomností čar vodíku v atmosféře příslušných hvězd, u třídy DB jsou přítomny čáry neutrálního helia. Podrobnějším studiem se ukázalo, že DA a DB trpaslíci tvoří dvě odlišné skupiny objektů a dvě sekvence v HR diagramu. Relativní obsah helia v atmosférách DA trpaslíků je nepatrný ($\text{He}/\text{H} < 10^{-3}$). Naopak v atmosférách DB hvězd prakticky chybí vodík ($\text{He}/\text{H} > 10^5$). Byly nalezeny i některé přechodné případy DB hvězd, označované DBA, u nichž lze slabé čáry vodíku ve spektrech pozorovat ($\text{He}/\text{H} \sim 3\text{—}10 \cdot 10^3$). Bílí trpaslíci klasifikovaní DO jsou pokračováním sekvence DB směrem k vyšším teplotám. Statistické studie relativní četnosti obou sekvencí ukazují, že trpaslíci typu DA převažují, je jich asi 80 procent. Pomocí modelů atmosfér složených buď z čistého vodíku nebo helia byl odhadnut rozsah efektivních teplot DA trpaslíků v rozmezí od 7 000 do 30 000 K, pro DB hvězdy je to 12 000 až 30 000 K.

Rozložení prostorových rychlostí ukazuje, že naprostá většina bílých trpaslíků pochází ze starší populace II. Existence dvou sekvencí se vysvětluje tím, že u některých objektů dojde na konci stadia asymptotické větve obrů k tak mohutným *tepelným pulsům*, že se při nich nukleárním hořením spotřebuje zbyvající atmosferický vodík a zbudou jen těžší prvky. U trpaslíků typu DA, kde se vodík takto nespotebue, dojde ke zmizení helia v důsledku zářivé difuze.



Obrázek 108: Polohy hvězd T Tauri na HR diagramu. Velikosti symbolů odpovídají rychlosti rotace. Plné symboly zvýrazňují hvězdy se silnými emisními čarami. Křivky jsou teoretické vývojové stopy (před hlavní posloupností). Převzato z práce Bertout (1989).

ZZ *Cet* hvězdy jsou bílí trpaslíci typu DA, u nichž dochází k měřitelným změnám jejich jasnosti. Změny jasnosti jsou zřejmě periodické a často multiperiodické, a velmi rychlé. Periody známých ZZ *Cet* hvězd jsou mezi 100 a 1 200 sekundami, což je ale o hodně delší, než by odpovídalo jejich radiálním pulsacím, takže se dosti všeobecně soudí, že pozorované změny jasnosti jsou projevem pulsací neradiálních. Byla nalezena určitá korelace mezi amplitudou pozorovaných změn a složitostí světelných křivek. ZZ *Cet* hvězdy s malými amplitudami do $0^m,05$ mají zpravidla periodické sinusové změny jasnosti, jejichž perioda je velmi stálá. V posledních desetiletích je pulsacím ZZ *Cet* hvězd věnovaná značná pozornost, neboť existuje oprávněná naděje, že se s jejich pomocí lze dozvědět hodně o skutečné vnitřní stavbě bílých trpaslíků, podobně jako v případě našeho Slunce. Soudí se, že možná všichni bílí trpaslíci typu DA se stávají pulsačně nestabilními, když se během svého vývoje a postupného chladnutí dostávají do oblasti s efektivní teplotou mezi 13 000 a 11 000 K.

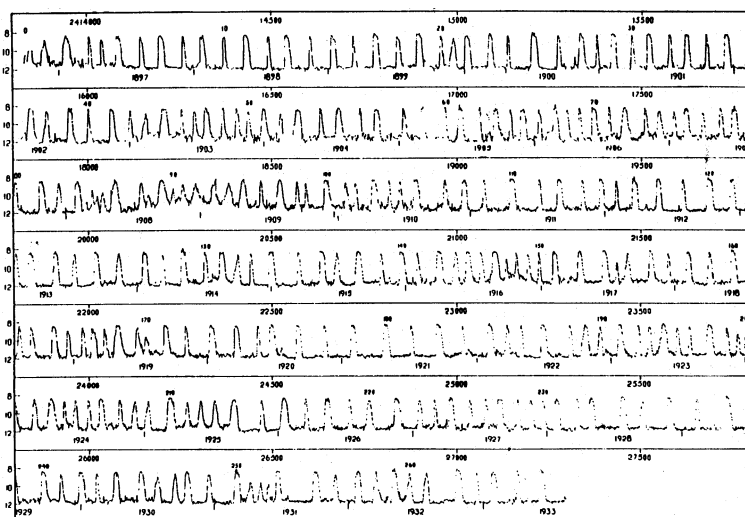
Pulsace byly ovšem objeveny a studovány i u několika trpaslíků DB a jejich analýzou a porovnáním s modely prokázali Metcalfe a kol. (2005), že čistě heliová atmosféra DB trpaslíků je patrně důsledkem zářivé difuze. Na přechodu od hvězd asymptotické větve obrů k bílým trpaslíkům existují teplejší hvězdy typu PG 1159, které mají v atmosféře zastoupení helia, uhlíku i kyslíku, coby zbytku jádra původní hvězdy. Výpočty ukázaly, že zářivá difuze vynese helium k povrchu, a nechá tak vzniknout čistě heliové horní atmosféře.

K lepšímu pochopení vývojového stadia bílých trpaslíků a souvislosti s hvězdami asymptotické větve obrů a novami (viz níže) pomáhá i studium bílých trpaslíků, kteří jsou složkami dvojhvězd. Např. Kawka a Vennes (2003) určili dráhové elementy a studovali i elipsoidální proměnnost dvojice BMP 71214 složené s bílého trpaslíka DA a červeného trpaslíka dMe, který téměř zaplňuje Rocheovu mez. V této dvojhvězdě zřejmě v budoucnu nastane přenos hmoty a eruptivní zjasnění. Dráhové elementy několika horkých bílých trpaslíků určili Kawka a kol. (2008) na dalekých UV spektrech z družice FUSE. Jde vesměs o soustavy, které prošly stadiem asymptotické větve obrů se společnou obálkou. Analýza chemického složení ukazuje, že dochází k akreci hmoty na povrchu bílých trpaslíků z hvězdného větru jejich průvodců. O tom, že se jedná skutečně o kompaktní objekty, svědčí i výrazný rozdíl ve střední (systémové) radiální rychlosti bílých trpaslíků a jejich průvodců způsobený větším gravitačním rudým posuvem bílých trpaslíků.

16.6.2 Novy

Pokud je bílý trpaslík složkou dvojhvězdy a dojde k přenosu hmoty bohaté na vodík z druhé složky na povrch bílého trpaslíka, může docházet k velmi nápadným zjasněním soustavy. Na povrchu bílého trpaslíka může nastat velmi bouřlivé jaderné slučování vodíku na helium, což vede k výbuchu a odvržení obálky do okolního prostoru. Pohyb hmoty velkými rychlostmi se skutečně u nov po výbuchu pozoruje, prostřednictvím dopplerovského rozšíření čar.

Známy jsou rovněž *trpasličí novy*, dvojhvězdy složené z bílého trpaslíka a červeného trpaslíka (normální hvězdy), jejichž oběžné periody činí jen několik hodin a u nichž dochází k opakovaným zjasněním o 3 až 5 hvězdných velikostí během týdnů až několika let. Soudí se, že i tyto objekty se zjasňují v důsledku přenosu hmoty mezi složkami, mechanismus ale patrně nesouvisí s nukleárním hořením, ale s *nestabilitou akrečního disku* kolem bílého trpaslíka, jehož opacita se v důsledku akrece po dosažení určité kritické hodnoty může



Obrázek 109: Světelná křivka rekurentní novy SS Cyg, od roku 1897 do roku 1933; jasnost se polopravidelně mění mezi 12 mag a 8 mag. Převzato z práce Bath a van Paradijs (1983).

velmi prudce změnit.

Zdá se jisté, že výbuchy nov vedou jen k relativně *malé* ztrátě hmoty ze soustavy, poměřováno celkovou hmotností hvězd. U některých trpasličích nov s mnoha pozorovanými zjasněními byla nalezena korelace mezi mohutností zjasnění a dobou do následujícího zjasnění.

16.6.3 Supernovy

Klasifikace supernov je tradičně závislá na jejich spektrech. Spektrální čáry mívají profily typu P Cygni, což svědčí o rozpínající se obálce, a jsou silně rozšířené díky radiálním rychlostem řádu 10^3 až 10^4 km/s; příklady typických spekter uvádí obr. 110.

V tab. 7 vidíme základní kritérium klasifikace, kterým je přítomnost spektrálních čar vodíku. Jestliže jsou patrné, jedná se o typ II, v opačném případě typ I. Další rozdělení SN II je podle intenzity čar hélia na typy IIa a IIb a nakonec se typ IIa dělí podle tvaru světelné křivky na typy IIP (s přítomností plata po maximu) a IIL (s přibližně lineárním poklesem v magnitudách). Supernovy SN I se dále třídí podle přítomnosti čar křemíku a hélia na podtypy Ia, Ib, Ic.

Ve spektrech samozřejmě nejsou pouze zmiňované diagnostické čáry, ale i další. Například supernovy SNIa mají v raném spektru čáry Si II, Ca II, Mg II, S II, O II, po 2 týdnech se objevují dovolené čáry Fe II a zhruba po šesti měsících, v *nebulární* fázi, zakázané čáry [Fe II], [Fe III], [Co III]. Relativní intenzita [Co III]/[Fe III] přitom klesá s časem, což naznačuje radioaktivní rozpad kobaltu. Spektra supernov SNII jsou v maximu často téměř spojitá, bez spektrálních čar, později se objevují emisní čáry vodíku a ještě později zakázané čáry kovů (obr. 111).

Světelné křivky vykazují velmi rychlý vzestup, většinou během několika dní. Následný pokles je pozvo-

Tabulka 7: Klasifikace supernov podle spekter. Horní tabulka je pro spektra pořízená v maximu, dolní pro pozdní — pořízená 6 měsíců po maximu (supernebulární spektra). Kurzívou jsou vždy vyznačena kritéria (přítomnost nebo nepřítomnost spektrálních čar určitých prvků, příp. tvar světelné křivky), antikvou je označení typů.

<i>H / bez H</i>			
SN II		SN I	
<i>převažuje H / He</i>		<i>Si / bez Si</i>	
IIn	IIf	Ia	<i>mnoho He / málo He</i>
<i>sv. křivka lineární / plato</i>		Ib	Ic
IIL	IIP		

<i>H / bez H</i>			
SN II		SN I	
<i>převažuje H / O</i>		<i>O / bez O</i>	
IIn (H, Ca)	IIf (H, O, Ca)	Ib, c (O, Ca)	Ia (Fe, Co)

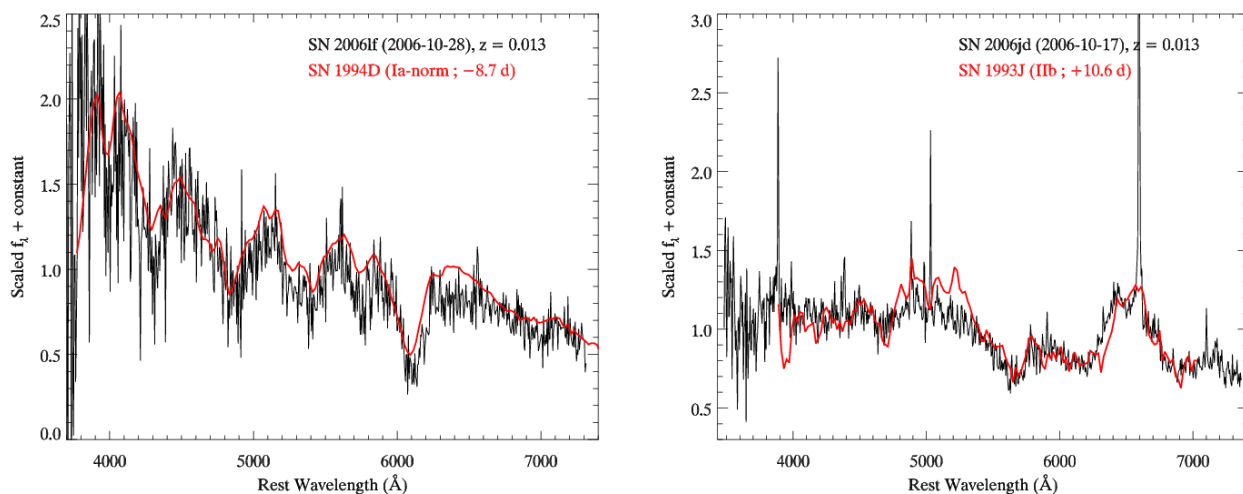
rovatelný po dva roky. Rozdíly mezi jednotlivými typy jsou patrné na obr. 112. Svítivost je největší pro typ Ia, v maximu jasnosti dosahuje

$$M_V \simeq -19,30 \text{ mag} + 5 \log \left(\frac{H_0}{60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \right), \quad (694)$$

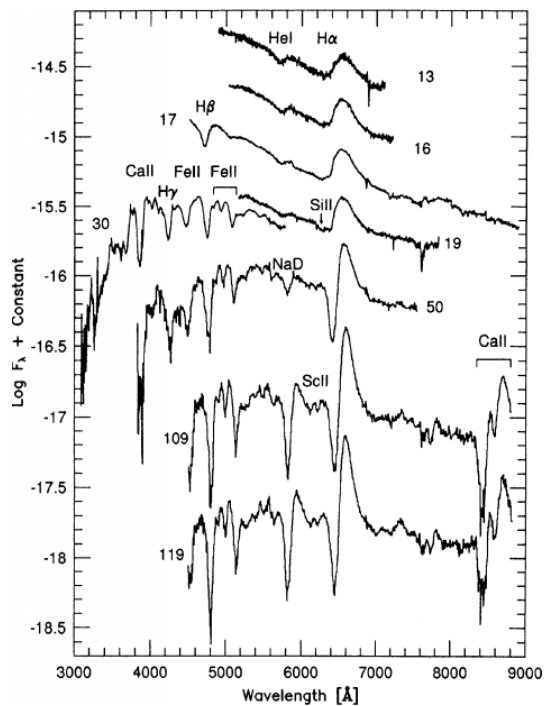
kde H_0 je hodnota Hubbleova parametru. Rozptyl této závislosti je velmi malý ($\sigma_M \simeq 0,3 \text{ mag}$) a může být ještě zlepšen parametrizací šířky maxima a rychlosti poklesu světelné křivky (široké, resp. pomalu klesající vycházejí jasnější; Perlmutter a spol. 1997). Supernovy tohoto typu jsou tedy vhodné jako „standardní svíčky“ pro určování vzdáleností ve vesmíru. Typy Ib a Ic jsou asi čtyřikrát (o 1 až 2 mag) slabší. Pro typ II je charakteristický velký rozptyl svítivosti, nejčastěji se však pohybuje na úrovni typů Ib a Ic.

Typy Ib, Ic a II se vždy nacházejí ve spirálních nebo nepravidelných galaxiích, obvykle ve spirálních ramenech v blízkosti oblastí H II, tj. v místech intenzivního zrodu hvězd. Odtud plyne, že progenitory jsou mladé masivní hvězdy, které na hlavní posloupnosti setrvávají přibližně deset milionů let. Supernovy Ia jsou však pozorovány ve všech typech galaxií, nevykazují koncentraci do spirálních ramen. Vznikají tedy z hvězd starších, méně hmotných.

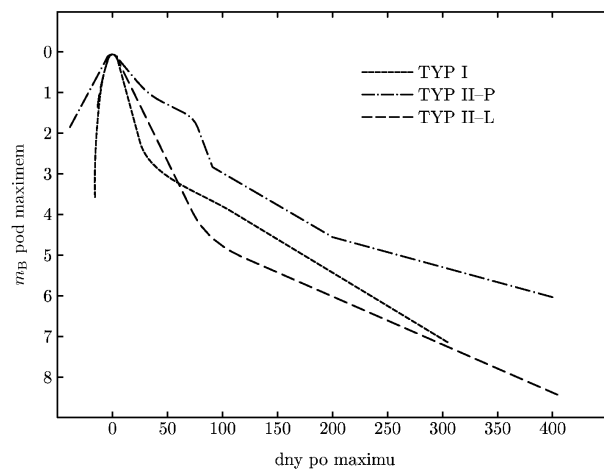
Pozorování předcházející výbuchům supernov svědčí o tom, že původci supernov typů II, Ib a Ic jsou červení veleobří, svítivé modré proměnné nebo Wolfovy–Rayetovy hvězdy (Langer a kol. 1994, Meynet a Maeder 2003, Kotak a Vink 2006). Progenitory supernov Ia se nepodařilo přímo identifikovat.



Obrázek 110: Spektra supernov typu Ia (SN 2006 LF, nahoře) a Ib (SN 2006 JD, dole). Zřetelný je rozdíl v přítomnosti vodíkové čáry H_{α} ($\lambda = 653$ nm). Převzato z <http://www.cfa.harvard.edu/supernova/RecentSN.html>.



Obrázek 111: Příklad raného spektra supernovy typu II v oboru 300 až 900 nm, zachycen je časový vývoj spektra od 13 do 119 dní po explozi (SN 1992 H v galaxii NGC 5377). Šířky čar dosahují $2\Delta\lambda \simeq 50$ nm, což odpovídá dopplerovským rychlostem řádu $v/c = \Delta\lambda/\lambda \simeq 0,1$. Převzato z práce Clocchiatti a spol. (1996).



Obrázek 112: Světelné křivky tří typů supernov (normalizované na maximum jasnosti). Na vodorovné ose jsou dny po maximu, na svislé hvězdné velikosti pod maximumem.

Poděkování

Za velmi užitečné připomínky k předchozím verzím tohoto textu děkujeme Dr. Ivanovi Hubenému. Naše poděkování patří rovněž studentům slečnám Marii Hrudkové a Ivaně Stoklasové a pánům Janovi Libichovi, Tomášovi Proseckému, Stanislavu Poddanému, Lukášovi Shrbenému a Vojtěchovi Sidorínovi za jejich cenné připomínky a za nalezení chyb a překlepů. Tento učební text vzniknul za podpory grantu MŠMT 34/2003.

Rejstřík

- α Cen A, 164
- α Ori, 207
- β Lyr, 133
- β Cep hvězdy, 190
- δ Cep, 211
- δ Del hvězdy, 201
- δ Scuti hvězdy, 203
- η Aql, 211
- η Car, 174
- γ Dor hvězdy, 204
- λ Boo hvězdy, 203
- μ Cen, 199
- o Cet, 211
- ρ Pup hvězdy, 201
- ζ Pup, 188

- absolutně černé těleso, 45
- absolutní hvězdná velikost, 80
- absolutní teplota, 17
- absorpční koeficient, 80
- adiabatické přiblížení, 159
- adiabatický děj, 93, 169
- AGB, 71
- AGB hvězdy, 213
- akrece, 181
- akreční disk, 133, 178, 216
- akustické vlny, 161
- Am hvězdy, 201
- Anaxagorás, 5
- Ap hvězdy, 202
- apsidální pohyb, 88
- AR Lac, 209
- Arches, 174
- Archimédův zákon, 46
- asteroseismologie, 146
- asymptotická větev obrů, 71, 114, 213
- atomová hmotnost, 13

- Atwoodovo číslo, 186
- Avogadrovo číslo, 14

- B hvězdy, 189
- Be hvězdy, 192
- Bernoulliho rovnice, 107
- beryllium, 205
- bílý trpaslík, 73, 96, 102, 180, 214
- binární pulsar, 90, 145
- bolometrická hvězdná velikost, 81
- bolometrická korekce, 81
- Boltzmannova konstanta, 18
- Boyleův–Mariottův zákon, 16
- Bp hvězdy, 190
- Bruntova–Väisäläova frekvence, 163
- BY Dra, 209

- CAK teorie, 108
- Carsonovy opacity, 151
- cefeidy, 27, 211
- CIR, 112
- cirkumstelární čáry, 103
- CNO cyklus, 31
- Coriolisova síla, 133
- coulombovská bariéra, 29
- Coxovy tabulky, 37
- CP1 hvězdy, 201
- CV Ser, 189

- Čerenkovovo záření, 176
- černá díra, 73, 178
- červený veleobr, 218

- Daltonův zákon, 18
- deflagrace, 181
- deflagrační vlna, 182
- degenerace, 19
- detonace, 181

deuterium, 28, 172
 diferenciální rotace, 120, 124
 diferenční rovnice, 60
 difuze, 46
 diskretizace, 60
 disociace, 168
 disperzní vztah, 162–164
 dosvit, 179
 dusík, 33
 dvojhvězdy, 85
 dynamická časová škála, 148
 dynamická škála, 54
 dynamický model, 54

 Eddingtonova limita, 173
 efektivní tíhové zrychlení, 58
 elektronová degenerace, 71
 entropie, 35
 Eulerova integrace, 99, 108
 eulerovská derivace, 159
 EX Hydrae, 145
 exploze, 181

 f-módy, 163
 Fermiho–Diracovy funkce, 21
 FK Com, 211
 fotodisintegrace, 177
 fotosféra, 57
 fragmentace oblaku, 169
 FU Orionis, 214
 fuory, 214

 g-módy, 9, 162
 Gamowův vrchol, 29
 Gayův–Lussacův zákon, 16
 Goodricke, J., 211
 gramatom, 14
 grammolekula, 14
 gravitační kolaps, 65, 168
 gravitační potenciální energie, 6
 GRB, 177

 Hayashiho linie, 171
 HD 200120, 197
 heliová slupka, 70
 Helmholtz, H., 6
 Henyeova metoda, 60
 Herbigovy–Harovy objekty, 214
 Herschel, J., 5
 Hertzsprungův–Russellův diagram, 67, 74, 83
 Hipparcos, 81
 hlavní posloupnost, 83
 hlavní posloupnost nulového věku, 65, 78
 hmotový poměr, 129
 hnědý trpaslík, 71, 96
 homogenizace, 54
 horký pás, 133
 Hubbleovy–Sandageovy proměnné, 199
 Hubbleův parametr, 218
 hugoniota, 184
 hustota zářivé energie, 40
 hvězda se závojem, 127, 144
 hvězdný vítr, 8, 73, 103, 127, 178
 hvězdný vítr řízený zářením, 108
 hvězdokupy, 82, 84
 hvězdy se závojem, 192
 Hyády, 206
 hybnost, 13
 hydrodynamické rovnice, 107, 159
 hydrostatická rovnováha, 53
 hypernova, 177

 Chandrasekharova mez, 102, 175, 180
 Chapmanova–Jouguetova rychlost, 185
 chemické složení, 88
 chemicky pekuliární hvězdy, 190, 201
 chladnutí, 5
 chromosféra, 207

 ideální plyn, 16
 interferometrie, 82
 ionizace, 6, 148, 168
 isobarický děj, 93

isochorický děj, 93
 isotermální atmosféra, 106
 isotermický děj, 93, 169

 Jeansovo kritérium, 65, 169, 177
 Johnsonův systém *UBV*, 80
 Jupiter, 71

 Kamiokande II, 176
 kataklyzmatické proměnné, 181
 Kelvinova–Helmholtzova kontrakce, 169
 Kelvinova–Helmholtzova nestabilita, 187
 Kelvinova–Helmholtzova škála, 6, 169
 Keplerova rychlost, 119
 Keplerův zákon, 54
 Kirchhoffův zákon, 43
 konvekce, 8
 konvektivní nestabilia, 177
 konvektivní nestabilita, 163
 konvektivní přestřelování, 8, 73
 konvektivní zóna, 54, 65, 69, 88, 206
 korotující interakční oblast, 112
 Krabí mlhovina, 175
 Kramersovy opacity, 147

 lagrangeovská derivace, 159
 laminární rychlost deflagrace, 182
 látkové množství, 14
 LBV, 199
 Legendrův polynom, 121
 linearizace, 62
 linie konstantní částicové rychlosti, 184
 lithiový problém, 9
 lithium, 172, 205
 lokální termodynamická rovnováha, 43
 Lorentzův faktor, 178

 M 1, 175
 magická jádra, 27
 Malé Magellanovo mračno, 56, 111
 matematické kyvadlo, 164

 Maxwelllovo rozdělení, 19, 29
 Mayer, J. R., 5
 meridionální cirkulace, 120
 metalicita, 111, 178
 metoda úplné linearizace, 60
 mezihvězdná absorpce, 81
 Mira Ceti, 211
 miry, 211
 mladé hvězdné objekty, 214
 modul vzdálenosti, 84
 mol, 14
 molární hmotnost, 14
 molekulová hmotnost, 14

 nebulární čáry, 217
 neradiální pulsace, 152
 neutrino, 28, 175, 176
 neutrinový problém, 11
 neutronizace, 175
 neutronová degenerace, 177
 neutronová hvězda, 73, 96, 175, 178
 novy, 216
 nukleární škála, 7
 nukleosyntéza, 179

 O hvězdy, 188
 obálková rotace, 123
 obří molekulová mračna, 65, 170
 ochlazování, 168
 opacita, 37, 179
 opacitní mechanismus, 147, 190
 optická hloubka, 57

 P Cyg, 199
 p-módy, 9, 161
 parametr degenerace, 21
 Parkerova rovnice, 108
 Pauliho vylučovací princip, 19
 Piggot, E., 211
 Planckova funkce, 44
 Plejády, 84, 205

počáteční podmínky, 55
 podfotosférické vrstvy, 57
 Pogsonova rovnice, 80, 175
 pohybová rovnice, 26, 107
 Poissonova rovnice, 121, 159
 polytropický plyn, 184
 polytropní děj, 93
 polytropní model, 99
 Popperovy tabulky, 175
 populace I, 56
 populace II, 56
 populace III, 56, 170
 povrchové gravitační vlny, 163
 primární složka, 138
 profil P Cygni, 103, 200, 217
 program EZ, 10
 prostorový úhel, 40
 protohvězda, 168
 proton–protonový řetězec, 28
 protoneutronová hvězda, 177
 případ A, 138, 140
 případ B, 138
 pulsace, 146
 pulsační konstanta, 150
 pulsační perioda, 150

 r-proces, 179, 180
 R Geminorum, 88
 radiální pulsace, 146
 radioaktivita, 88
 radioaktivní rozpad, 217
 Rankinovy–Hugoniotovy rovnice, 183
 Rayleighova linie, 184
 Rayleighova–Taylorova nestabilita, 185, 187
 rázová vlna, 177, 181
 reakce 3α , 33
 Reimersův vítr, 114
 rekombinace, 6
 rekurentní nova, 217
 relativistický apsidální pohyb, 90

 roAp hvězdy, 202
 Rocheova mez, 132
 Rocheův model, 116, 129
 Rosselandova střední opacita, 44
 rovnice hydrostatické rovnováhy, 26, 121, 122
 rovnice kontinuity, 107, 121
 rovnice přenosu záření, 39
 rovnice tepelné rovnováhy, 27, 121
 rovnice zachování hmoty, 26
 rovnice zářivého přenosu energie, 37, 121
 RS CVn, 209
 rychlost zvuku, 149, 162

 S Dor, 199
 Sahova rovnice, 23
 Salpeterova reakce, 33
 samoabsorpce, 170
 sektorální módy, 153
 semiempirická teorie konvekce, 51
 semikonvektivní zóna, 73
 setrvačný člen, 54
 Sirius A, 201
 Sirius B, 150
 Slunce, 150, 163, 164
 sluneční vítr, 103
 SN 1987 A, 176
 SN 1992 H, 219
 SN 2006 JD, 219
 SN 2006 LF, 219
 Snellův zákon lomu, 162
 SNR, 179
 SOHO, 166
 SPB hvězdy, 192
 specifický objem, 16
 spektroskopická paralaxa, 81
 Spika, 151
 SS Cyg, 217
 stacionární model, 53
 standardní model Slunce, 8, 101
 stavová rovnice, 15

Strömgrenův systém *ubvy*, 80
 střední molekulová hmotnost, 14
 střední volná dráha, 45
 superiterace, 137
 supernova, 73, 175, 217
 supervítr, 114
 svítivé modré proměnné, 199, 218
 SX Phe hvězdy, 204

T Tau, 214
 TAMS, 87
 technecium, 88
 tepelná škála, 169
 tepelná vodivost, 181
 teplota, 13
 teplotní škála, 16
 teserální módy, 153
 tlak záření, 40
 tlaková škála, 8
 tok záření, 40
 trpasličí cefeidy, 203
 trpasličí novy, 216
 tunelový jev, 29
 turbulence, 181

účinný průřez, 176
 úniková rychlost, 104
 universální plynová konstanta, 17
 úplná degenerace, 22
 UV Cet, 208

V/R změny, 193
 V1046 Ori, 190
 V711 Tau, 209
 V832 Cyg, 197
 Velké Magellanovo mračno, 176
 velké molekulové mračno, 214
 viriálový teorém, 6, 149, 169
 vizuální hvězdná velikost, 81
 vlnová rovnice, 162
 vnitřní gravitační vlny, 162

vodíková slupka, 68, 140
 volné parametry, 55
 volný pád, 54, 170
 vynesení, 88
 vývojový model, 53
 vývojový paradox, 144
 vztlková síla, 46, 163

W UMa, 211
 W Vir, 211
 WC hvězdy, 189
 WN hvězdy, 189
 Wolfovy–Rayetovy hvězdy, 188, 218
 WR hvězdy, 178, 188

YSO, 214

záblesk záření gama, 177
 zákrytové dvojhvězdy, 82
 zářivá difuze, 202
 zbytek po výbuchu supernovy, 179
 zčervenání, 81
 zdánlivá hvězdná velikost, 80
 zóna zářivé rovnováhy, 88
 zonální módy, 153
 ZZ Cet hvězdy, 216

Literatura

Obecná literatura, učebnice

- [1] Carrol, B.W., Ostlie, D.A 2007 An Introduction to Modern Astrophysics, Pearson, Addison Wesley, San Francisco, ISBN 0-321-44284-9
- [2] de Loore C.W.H., Doom C. 1992 Structure and Evolution of of Single and Binary Stars, Astrophysics and Space Science Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-1768-8
- [3] Kippenhahn R., Weigert A. 1990 Stellar Structure and Evolution, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-50211-4
- [4] Kleczek J. 1957 Nitro hvězd, Nakladatelství Československé akademie věd
- [5] Rose, W.K. 1998 Advanced Stellar Astrophysics, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-58833-2
- [6] Schatzman E.L., Praderie F. 1993 The Stars, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-54196-9
- [7] Shore, S.N. 2003 The Tapestry of Modern Astrophysics, John Wiley & Sons, New Jersey
- [8] Stix, M. 2002 The Sun. An Introduction, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin, ISBN 3-540-53796-1
- [9] Švestka Z. 1954 Hvězdné atmosféry, Nakladatelství Československé akademie věd
- [10] Vanýsek V. 1980 Základy astronomie a astrofyziky, Academia Praha

Reference

- [11] Abell T., Bryan G.L., Norman M.L. 2002 Science 295, 93
- [12] Adams W.S., Kohlschütter A. 1914 Astrophys. J. 40, 385
- [13] Adelberger E.G., Austin S.M., Bahcall J.N. a kol. 1998 Rev. Mod. Phys. 70, 4, 1265
- [14] Aerts C., Lamers H.J., Molenbergh G. 2004 Astron. Astrophys. 418, 639
- [15] Aerts C., Waelkens C. 1993 Astron. Astrophys. 273, 135
- [16] Aller L.H. 1953 Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars, Ronald Press Co., New York
- [17] Aller L.H. 1963 Astrophysics: The Atmospheres of the Sun and Stars, 2nd Edition, Ronald Press Co., New York
- [18] Andersen J. 1991 Astron. Astrophys. Rev. 3, 91
- [19] Ando H., Osaki Y. 1975, Publ. Astron. Soc. Japan 27, 581
- [20] Angulo C., Arnould M., Rayet M. (NACRE collaboration) 1999 Nuclear Physics A 656, 1;
<http://pntpm.ulb.ac.be/Nacre/nacre.htm>
- [21] Baade W., Zwicky F. 1934 Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 254

- [22] Barker P.K. 1982 *Astrophys. J. Suppl.* 49, 89
- [23] Bath G.T., van Paradijs J. 1983 *Nature* 305, 33
- [24] Bélopolsky A. 1895 *Astrophys. J.* 1, 160
- [25] Bernasconi P.A., Maeder A. 1996 *Astron. Astrophys.* 307, 829
- [26] Bertotti B., Farinella P., Vokrouhlický D. 2003 *Physics of the Solar System. Dynamics and Evolution, Space Physics and Spacetime Structure*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 1-4020-1428-7
- [27] Bertout C. 1989 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 27, 351
- [28] Bethe H. 1939 *Phys. Rev.* 55, 434
- [29] Bethe H., Critchfield C.L. 1938 *Phys. Rev.* 54, 248
- [30] Biermann L. 1951 *Z. Astrophys.* 29, 274
- [31] Bionta R.M. a spol. 1987 *Phys. Rev. Lett.* 58, 1494
- [32] Bjorkman J.E., Cassinelli J.P. 1993 *Astrophys. J.* 409, 429
- [33] Böhm-Vitense E. 1958 *Z. Astrophys.* 46, 108
- [34] Bopp B.W., Fekel F., Jr. 1977 *Astron. J.* 82, 490
- [35] Bouchy F., Carrier F. 2001 *Astron. Astrophys.* 374, 5
- [36] Breger M. 1979 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 91, 5
- [37] Breger M., Pamyatnykh A.A. 1998 *Astron. Astrophys.* 332, 958
- [38] Breger M., Stockenhuber H. 1983 *Hvar Obs. Bull.* 7, 283
- [39] Briquet M., Hubrig S., De Cat P., Aerts C., North P., Schöller M. 2007 *Astron. Astrophys.* 466, 269
- [40] Burgay M., D'Amico N., Possenti A., Manchester R.N., Lyne A.G., Joshi B.C., McLaughlin M.A., Kramer M., Sarkisian J.M., Camilo F., Kalogera V., Kim C., Lorimer D.R. 2003 *Nature* 426, 531
- [41] Castor J.I., Abbott D.C., Klein R.I. 1975 *Astrophys. J.* 195, 157
- [42] Caughlan G.R., Fowler W.A. 1988 *Atomic data and Nuclear Data Tables* 40, 284
- [43] Claret A. 2004 *Astron. Astrophys.* 424, 919
- [44] Claret A., Giménez A. 1992 *Astron. Astrophys. Suppl.* 96, 255
- [45] Clocchiatti A. a spol. 1996 *Astron. J.* 111, 3, 1286
- [46] Code A.D., Davis J., Bless R.C., & Hanbury Brown R. 1976 *Astrophys. J.* 203, 417
- [47] Conti P.S. 1970 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 82, 781
- [48] Conti P.S. 1974 *Astrophys. J.* 187, 539
- [49] Conti P.S., Niemela V.S. 1976 *Astrophys. J.* 209, L37
- [50] Cox A.N., Stewart J.N., Eilers D.D. 1965 *Astrophys. J. Suppl.* 11, 1
- [51] Cranmer S.R., Owocki S.P. 1996 *Astrophys. J.* 462, 469
- [52] Crawford J.A. 1955 *Astrophys. J.* 121, 71
- [53] Debernardi Y., Mermilliod J.-C., Carquillat J.-M., Ginestet N. 2000 *Astron. Astrophys.* 354, 881

- [54] de Loore C., De Greve J.P. 1992 *Astron. Astrophys. Suppl.* 94, 453
- [55] Dziembowski W.A., Pamyatnykh A.A. 1993 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 262, 204
- [56] Dziembowski W.A., Moskalik P, Pamyatnykh A.A. 1993 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 265, 588
- [57] Eddington A.S. 1918 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 79, 2
- [58] Endal A.S., Sofia S. 1976 *Astrophys. J.* 210, 184
- [59] Endal A.S., Sofia S. 1978 *Astrophys. J.* 220, 279
- [60] Endal A.S., Sofia S. 1979 *Astrophys. J.* 232, 531
- [61] Faulkner J., Roxburgh I.W., Strittmatter P.A. 1968 *Astrophys. J.* 151, 203
- [62] Fickett W., Davis W.C. 2000 *Detonation: Theory and Experiment*, Courier Dover Publications, ISBN 0-486-41456-6
- [63] Figer D. 2005 *Nature*, 434, 192
- [64] Frost S.A., Conti P.S 1976 in *Be and Shell Stars*, IAU Symp. 70, Ed. by A. Slettebak, Dordrecht, Reidel, 139
- [65] Gieren W.P., Fouqué P., Gómez M. 1998 *Astrophys. J.* 496, 17
- [66] Graboske H.C., Harwood D.J., Rogers F.J. 1969 *Phys. Rev.* 186, 210
- [67] Gribov V.N., Pontecorvo B.M. 1969 *Phys. Lett. B* 28, 493
- [68] Groenewegen M., Decin L., Salaris M., De Cat P. 2007 *Astron. Astrophys.* 463, 579
- [69] Gundlach J.H., Merkwitz S.M. 2000 *Phys. Rev. Lett.* 85, 2869
- [70] Habets G.M.H.J. 1987 *Physics of Be Stars*, IAU Col. 92, Ed. A.Slettebak a T.P. Snow, Cambridge Univ. Press, 509
- [71] Harmanec P. 1970 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 21, 113
- [72] Harmanec P. 1981 *Binaries Among B Stars*, Workshop on Pulsating B Stars, Ed. by G.E.V.O.N. and C. Sterken, Nice Obs. Publ., 99
- [73] Harmanec P. 1987 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 38, 52
- [74] Harmanec P. 1988 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 39, 329
- [75] Harmanec P. 1990 *Astron. Astrophys.* 237, 91
- [76] Harmanec P. 1991 in *Rapid Variability of OB Stars: Nature and Diagnostic Value*, ESO Conf. and Workshop Proc. No. 36, 265
- [77] Harmanec P. 1998 *Astron. Astrophys.* 335, 173
- [78] Harmanec P. 2002a in *New Directions for Close Binary Studies: The Royal Road to the Stars*, Publ. Cannakale Onsekiz Mart University, 2, 221
- [79] Harmanec P. 2002b *Astron. Nachr.* 323, 2, 87
- [80] Harmanec P. 2002c in *Proc. IAU Col. 187 Exotic Stars as Challenges to evolution*, Ed. by A. Tout and W. Van Hamme, ASP Conf. Ser. 279, 221
- [81] Harmanec P., Bisikalo D.V., Boyarchuk A.A., Kuznetsov O.A. 2002 *Astron. Astrophys.* 396, 937
- [82] Henrichs H.F., Hammerschlag-Hensberge G., Howarth I.D., Barr P. 1983 *Astrophys. J.* 268, 807

- [83] Henyey L.G., Wilets L., Böhm K.H., Le Levier R., Levee R.D. 1959 *Astrophys. J.* 129, 628
- [84] Hearnshaw J.B. 1999 *New Astronomy Reviews* 43, 403
- [85] Hillebrandt W., Niemeyer J.C. 2000 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 38, 191
- [86] Hirata K. a spol. 1987 *Phys. Rev. Let.* 58, 1490
- [87] Chandrasekhar S. 1938 *Stellar Structure*, Univ. of Chicago Press
- [88] Christensen-Dalsgaard J. 2003 *Stellar Oscillations*, <http://www.eneas.info/>
- [89] Jurcsik J., Montesinos B. 1999 *New Astronomy Reviews* 43, 415
- [90] Kambe E., Osaki Y. 1988 *Publ. Astron. Soc. Japan* 40, 313
- [91] Kaper L., van der Meer A., van Kerkwijk M., van den Heuvel E. 2006 *The Messenger*, ESO, No. 126, 27
- [92] Kato S. 1966 *Publ. Astron. Soc. Japan* 18, 374
- [93] Kawka A., Vennes S. 2003 *Astrophys. J.* 125, 1444
- [94] Kawka A., Vennes S., Dupuis J., Chayer P., Lanz T. 2008 *Astrophys. J.* 675, 1518
- [95] Kervella P., Bersier D., Mourard D., Nardetto N., Coudé du Foresto V. 2004 *Astron. Astrophys.* 423, 327
- [96] Kippenhahn R., Weigert A. 1967 *Z. Astrophys.* 65, 251
- [97] Kippenhahn R., Meyer-Hofmeister E., Thomas H.C. 1970 *Astron. Astrophys.* 5, 155
- [98] Kotak R., Vink J.S. 2006 *Astron. Astrophys.* 460, L5
- [99] de Koter A., Heap S.R., Hubený I. 1997 *Astrophys. J.* 477, 792
- [100] Kříž S., Harmanec P. 1975 *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* 26, 65
- [101] Kurtz D. 1982 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 200, 807
- [102] Kurtz D. 2000 *ASP Conf. Ser.* 210, 287
- [103] Kvasnica J. 1965 *Termodynamika*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha
- [104] Lagadec E., Zijlstra A.A. 2008 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 390, 59
- [105] Langer N., Hamann W.-R., Lennon M., Najarro F., Pauldrach A. W. A., Puls J., 1994 *Astron. Astrophys.* 290, 819
- [106] Larson R.B., Demarque P.R. 1964 *Astrophys. J.* 140, 524
- [107] Lebzelter T., Hron J. 2003 *Astron. Astrophys.* 411, 533
- [108] Ledoux P. 1951 *Astrophys. J.* 114, 373
- [109] van Leeuwen F. 1999 *Astron. Astrophys.* 341, L71
- [110] Levi-Civita T. 1937 *Amer. J. Math.* 59, 225
- [111] Li C., Junliang Z. 1999 *Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-Hipparcos Era*, Ed. by D. Egret a A. Heck, *ASP Conf. Series* 167, 259
- [112] Lucy L.B., Solomon P.M. 1970 *Astrophys. J.* 159, 879
- [113] Maeder A. 1997 *Astron. Astrophys.* 321, 134 (paper 2)
- [114] Maeder A. 1999 *Astron. Astrophys.* 347, 185 (paper 4)

- [115] Maeder A. 2009 Formation and Evolution of Rotating Stars: From the First Stars to the Sun, Springer, ISBN 3-540-76948-X
- [116] Maeder A., Meynet G. 2000a The Evolution of Rotating Stars, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 38, 143
- [117] Maeder A., Meynet G. 2000b *Astron. Astrophys.* 361, 159 (paper 6)
- [118] Maeder A., Meynet G. 2001 *Astron. Astrophys.* 373, 555 (paper 7)
- [119] Maeder A., Zahn J.-P. 1998 *Astron. Astrophys.* 334, 1000 (paper 3)
- [120] McAlister H.A. a spol. 2005 *Astrophys. J.* 628, 439
- [121] Mayer P. 1984 *Observatory* 104, 77
- [122] Metcalfe T.S., Nather R.E., Watson T.K., Kim S.-L., Park B.-G., Handler G. 2005 *Astron. Astrophys.* 435, 649
- [123] Merrill P.W. 1952 *Astrophys. J.* 116, 21
- [124] Meynet G., Maeder A. 1997 *Astron. Astrophys.* 321, 465 (paper 1)
- [125] Meynet G., Maeder A. 2000 *Astron. Astrophys.* 361, 101 (paper 5)
- [126] Meynet G., Maeder A. 2003, *Astron. Astrophys.* 404, 975
- [127] Michaud G. 1970 *Astrophys. J.* 160, 641
- [128] Mikulášek Z. 2000 Úvod do fyziky hvězd, skripta a sbírka úloh, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, Katedra teoretické fyziky a astrofyziky, Brno
- [129] Misner C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A 1973 *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, ISBN 0-7167-0344-0
- [130] Montes M. 1997 <http://rsd-www.nrl.navy.mil/7212/montes/sne.html>
- [131] Morel P., Pichon B., Provost J., Berthomieu G. 1999 *Astron. Astrophys.* 350, 275
- [132] Morton, D.C., Underhill, A.B. 1977 *Astrophys. J. Suppl.* 33, 83
- [133] Mullan D.J. 1984 *Astrophys. J.* 283, 303
- [134] Munari U., Dallaporta S., Siviero A., Soubiran C., Fiorucci M., Girard P. 2004 *Astron. Astrophys.* 418, L31
- [135] Murdin P., Murdin L. 1985 *Supernovae*, Cambridge University Press, Cambridge
- [136] Narayanan V.K., Gould A. 1999 *Astrophys. J.* 523, 328
- [137] Norton A.J., Wynn G.A., Somerscales R.V. 2004 *Astrophys. J.* 614, 349
- [138] Osaki Y. 1986 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 98, 30
- [139] Osaki Y., Shibahashi H. 1986 *Astrophys. Space Sci.* 118, 195
- [140] Owocki S.P., Cranmer S.R., Fullerton A.W. 1995 *Astrophys. J.* 453, L37
- [141] Paczyński, B. 1971 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 9, 183
- [142] Pan X., Shao M., Kulkarni S.R. 2004 *Nature* 427, 326
- [143] Parker E.N. 1958 *Astrophys. J.* 128, 664
- [144] de Pater I., Lissauer J.J. 2001 *Planetary Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-48219-4

- [145] Perlmutter, S. a spol. 1997 *Astrophys. J.* 483, 565
- [146] Petersen J.O., Christensen-Dalsgaard J. 1999 *Astron. Astrophys.* 352, 547
- [147] Petschek G.A. 1990 *Supernovae*, Springer-Verlag, New York
- [148] Pinsonneault M.H., Stauffer J., Soderblom D.R., King J.R., Hanson R.B. 1998 *Astrophys. J.* 504, 170
- [149] Plavec M. *Advan. Astron. Astrophys.*, Ed by Z. Kopal, Academic Press, New York, 6, 201
- [150] Popper D.M. 1980 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 18, 115
- [151] Porter J.M. 1996 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 280, L31
- [152] Preston G.W. 1974 *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 12, 257
- [153] Rivinius Th., Baade D., Štefl S., Stahl O., Wolf B., Kaufer A. 1998 in *A half century of stellar pulsations interpretations*, Ed. by P.A. Bradley and J.A. Guzik, *ASP Conf. Ser.* 135, 343
- [154] Robertson H.P. 1938 *Annals of Mathem.* 39, 101
- [155] Robichon N., Arenou F., Mermilliod J.-C., Turon C. 1999 *Astron. Astrophys.* 345, 471
- [156] Rodríguez E., Breger M. 2001 *Astron. Astrophys.* 366, 178
- [157] Rogers F.J., Iglesias C.A. 1992 *Astrophys. J. Suppl.* 79, 507
- [158] Rogers F.J., Swenson F.J., Iglesias C.A. 1996 *Astrophys. J.* 456, 902
- [159] Sackmann I.-J., Anand S.P.S. 1970 *Astrophys. J.* 162, 105
- [160] Salpeter E.E. 1952 *Astrophys. J.* 115, 326
- [161] Sandage A. 1957 *Astrophys. J.* 125, 435
- [162] Shapley H. 1914 *Astrophys. J.* 40, 443
- [163] Shindo M., Hashimoto M., Eriguchi Y., Müller E. 1997 *Astron. Astrophys.* 326, 177
- [164] Schaller G., Schaefer D., Meynet G., Maeder A. 1992 *Astron. Astrophys. Suppl.* 96, 269
- [165] Schnurr O., Moffat A.F.J., Villar-Sbaffi A., St-Louis N., Morrell N.I. 2009 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 395, 823
- [166] Schrijvers C. 1999, PhD disertace, Universiteit van Amsterdam, Holandsko
- [167] Schwarzschild M. 1958 *Structure and Evolution of the Stars*, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press
- [168] Southworth J., Maxted P.F.L., Smalley B. 2005 *Astron. Astrophys.* 429, 645
- [169] Stebbins J. 1908 *Astrophys. J.* 27, 188
- [170] Stothers R.B., Chin C.-W. 1995 *Astrophys. J.* 451, L61
- [171] Struve O. 1931 *Astrophys. J.* 73, 94
- [172] Thaller M.L. 1997 *Astrophys. J.* 487, 380
- [173] Townsend R.H.D. 1997 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 284, 839
- [174] Truscott, A.G. a spol. 2001 *Science*, 291, 5513, 2570
- [175] Unsöld A. 1955 *Physik der Sternatmosphären*, Berlin, 2. vydání
- [176] Uytterhoeven, K. 2004, PhD disertace, Katholieke Universiteit Leuven, Belgie

- [177] Vemury S.K., Stothers R. 1978 *Astrophys. J.* 225, 939
- [178] Vogt S.S., Penrod D.G. 1983 *Astrophys. J.* 275, 661
- [179] Walborn N.R., Howarth I.D., Lennon D.J. a kol. 2002 *Astron. J.* 123, 2754
- [180] Weizsäcker C.F. 1937 *Phys. Zeit.* 38, 176
- [181] Wolf C.J.E., Rayet G. 1867 *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 65, 292
- [182] Woosley S., Janka H.-T. 2006 *Nat. Phys.* 1, 3, 147
- [183] Wuchterl G., Tschamnuter W.M. 2003 *Astron. Astrophys.* 398, 1081
- [184] Zwahlen N., North P., Debernardi Y., Eyer L., Galland F., Groenewegen M.A.T., Hummel C.A. 2004 *Astron. Astrophys.* 425, L45