

## 0.1 Gravitace a rezonance

### 0.1.1 Problém $N$ těles a deterministický chaos

Problém je, že pro problém  $N$  těles *neznáme* obecné analytické řešení! Máme  $6N$  proměnných (souřadnic a rychlostí), známe jen 10 klasických algebraických integrálů pohybu:

- 3 pro těžiště,
- 1 pro energii,
- 3 pro hybnost,
- 3 pro moment hybnosti.

*Brunsov teorém* (Bruns 1887, viz Hagihara 1970, s. 556–583) říká: jedinými lineárně nezávislými integrály problému  $N$  těles, které jsou algebraické vzhledem k  $q$ ,  $p$  a  $t$ , je oněch 10 zmiňovaných výše. (Bruns podal důkaz, že libovolný jiný integrál  $f(q_i, p_i, t)$  je lineární kombinací.) To znamená, že je možná redukce na  $6N - 10$  proměnných (pro  $N = 2$  vycházejí jen 2 proměnné závislé na čase).

Pozor! Neznamená to, že neexistuje žádné řešení a že všechny rozvoje divergují! Pouze neexistují další integrály. V problému 2 těles také nemáme 12 integrálů, to by tělesa „trčela na místě“ nebo se pohybovala rovnoměrně přímočaře, ale jen oněch 10; zbývající 2 stupně volnosti jsme ale úspěšně vyřešili a máme pro ně předpis závislosti na čase (i když je transcendentní).

Sundman (1912) například našel řešení pro  $N = 3$  ve formě *poomaaalu-u* konvergujících mocninných řad v proměnné čas  $t^{1/3}$ . Bohužel, toto řešení neříká nic o stabilitě nebo dovolených oblastech pohybu (jako RTBP). Pro velkou přesnost by vyžadovalo  $10^{8 \cdot 10^6}$  členů (!). (Musel vzít počáteční moment hybnosti  $L \neq 0$ , aby nedocházelo k trojnými kolizím — singularitám v řešení. Počáteční podmínky vedoucí ke kolizím sice mají Lebesgueovu míru rovnou 0, ale není známo nějaké kritérium pro ně, které by všem budoucím kolizím jistě zabránilo.)

Existují indicie, že řešení problému  $N$  těles opravdu neexistuje, a to je *deterministický chaos*. Na Poincarého řezech fázovým prostorem (tj. například v rovině  $x = 0$ ,  $v_x = 0$ ) se totiž ukazuje, že některé trajektorie zcela zaplňují část plochy, že nemají míru 1, ale 2, čili zřejmě neexistuje žádná periodická funkce (konečná řada), která by takové trajektorii odpovídala. Praktickou ukázkou systému, který také vykazuje známky chaotického chování, můžeme vidět na obr. 1.



Obr. 1 — Dvojkyvadlo sestavené z Merkurů jakožto jednoduchý chaotický systém.

*Lyapounovův charakteristický exponent* (LCE) umožňuje popsat míru chaosu. Mějme dynamický systém  $\dot{X} = F(X)$  s řešením  $X(t)$ ; a  $V(t)$  řešení *variační* rovnice

$$\dot{V} = \frac{\partial F}{\partial X}(X(t))V, \quad (1)$$

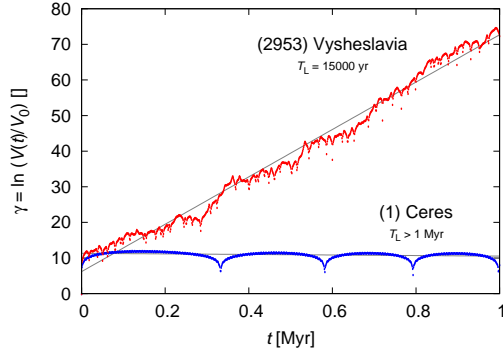
tj. linearizované pohybové rovnice, popisující, jak roste *rozdíl* dvou trajektorií, přičemž  $X_0$  označuje počáteční orbitu a  $V_0$  zvolený počáteční rozdíl. Lyapounovův exponent  $\chi$  je definován:

$$\chi(X_0, V_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)}{t}, \quad \gamma(t) = \ln \frac{|V(t)|}{|V_0|}. \quad (2)$$

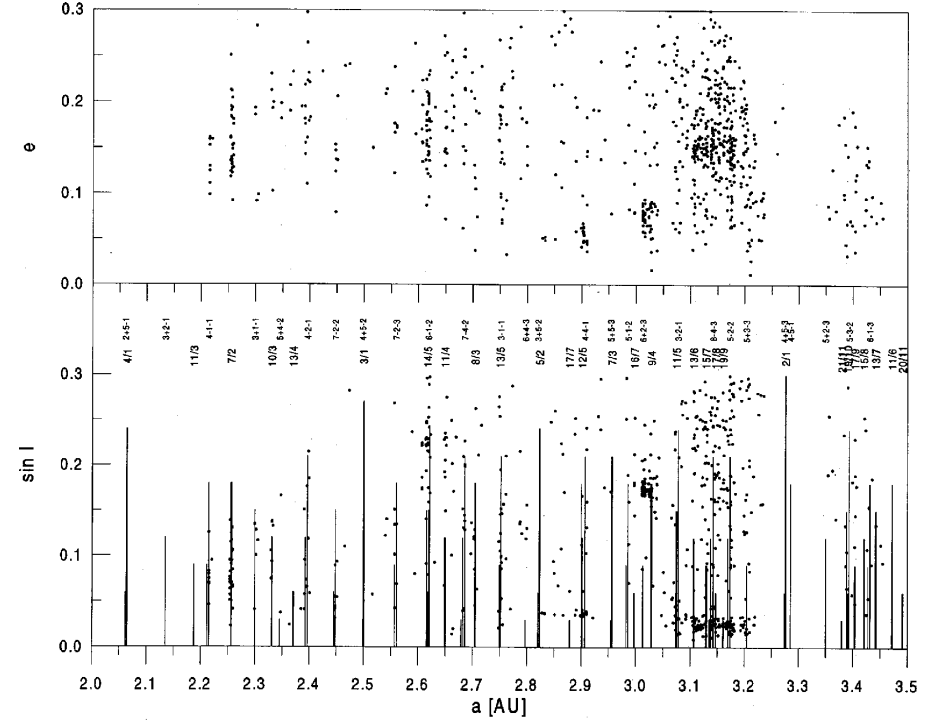
Prakticky postupujeme tak, že numericky integrujeme variační rovnice, ukládáme si hodnoty  $\gamma$  a  $t$  po nějaký dostatečně dlouhý čas, pak provedeme lineární fit  $\gamma = \chi t$  metodou nejmenších čtverců a sklon  $\chi$  je (přibližně) LCE. Lyapounovův čas, za který se dvě trajektorie podstatně odchýlí, je definován přirozeně jako:

$$T_L = \frac{1}{\chi}. \quad (3)$$

Pro vícerozměrné systémy nelze snadno vizuálně rozlišit regulární a chaotické trajektorie, takže LCE je užitečnou pomůckou.



**Obr. 2** — Závislost  $\gamma(t)$  pro planetku (1) Ceres, která se pohybuje po regulární dráze, a pro (2953) Vyshelevia, která je naopak značně chaotická.



**Obr. 3** — Graf velká poloosa  $a$  – excentricita  $e$  a sklon  $i$  s asteroidy, které mají Lyapunovův exponent  $\chi > 10^8$ . Svislé úsečky označují vybrané rezonance středního pohybu. Tam, kde je mnoho rezonancí blízko sebe (dochází k jejich překryvu), se vyskytuje mnoho chaotických asteroidů. Převzato z Nesvorný a Morbidelli (1998).

### 0.1.2 Stabilní a nestabilní konfigurace v rezonanci

Rezonance je situace, kdy budící síla působí určitou frekvencí, na kterou je systém citlivý, což způsobuje velké změny v systému. Takový případ je dobře známý z mechaniky jako *buzený harmonický oscilátor*.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Netlumený a nebuzený *harmonický oscilátor* (závaží na pružině nebo kyvadlo s malými výchylkami) má pohybovou rovnici:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

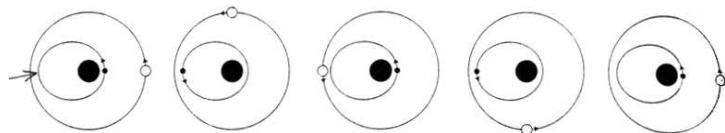
se známým řešením (homogenním;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je *vlastní frekvence*):

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t).$$

Je velký rozdíl mezi *lokálním chaosem a velkoškálovou nestabilitou*! Trajektorie může být extrémně chaotická, ale přitom se „mlít“ na místě. Na druhou stranu jiná trajektorie může být více regulární, ale změny orbitálních elementů tak podstatné, že těleso se dostane do jiné části sluneční soustavy.

V našem případě může být budící silou třeba gravitace Jupitera a vlastní frekvencí oběžná frekvence planetky. Uvažujme třeba rezonanci 2:1 ( $1 n_{\text{planetky}} = 2 n_{\text{Jupitera}}$ ). Vždy po jednom oběhu Jupitera a dvou obězích planetky se opakuje tatáž konjunkce. Kdyby konjunkce nastala v pericentru planetky, zopakuje se opět pericentru, tj. *stabilní konfigurace*, protože Jupiter je vždy daleko (obr. 4). Pro konjunkce v apocentru planetky jde naopak o konfiguraci *nestabilní*, neboť Jupiter je blízko a jeho perturbace jsou veliké (obr. 5).

Pokud konjunkce nastávají jindy, vyvíjí se systém směrem ke stabilní konfiguraci (viz obr. 6): před pericentrem se od sebe planetka a Jupiter vzdalují, to znamená, že transverzální složka gravitace Jupitera je větší před konjunkcí než po konjunkci ( $F_t > F'_t$ ), čili převládá urychlování v dráze, planetka spiráluje ven, vzdaluje se od Slunce, klesá její oběžná rychlost, opoždí se za Jupiterem a ve výsledku se *konjunkce posouvá k pericentru*.



**Obr. 4** — Stabilní konfigurace ve vnitřní rezonanci 2:1, při které konjunkce nastávají v pericentru planetky, tedy daleko od Jupitera. Podle [85].

Když ale přidám budící silu:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = F_{\text{budící}} \cos(\omega_{\text{budící}} t)$$

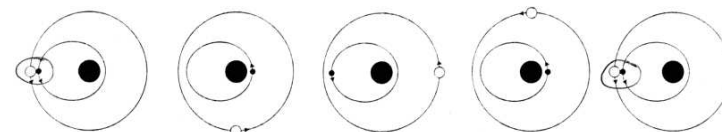
je řešení dáno součtem homogenního a partikulárního:

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_b}{m(\omega_0^2 - \omega_b^2)} \cos(\omega_b t).$$

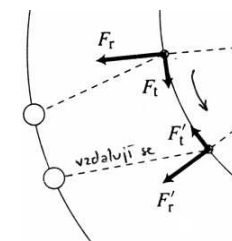
Pro případ *rezonance*  $\omega_b = \omega_0$  ale platí jiné řešení (abychom se nedopustili prohřešku dělení nulou):

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_b}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t),$$

na kterém je zřetelný sekulární růst výchylek. Pro skutečné systémy (nelinearizované kyvadlo) však růst nade všechny meze omezí nelineární členy. Obdobná rovnice vzniká v nebeské mechanice, dosadíme-li vhodnou poruchovou funkci do Lagrangeových rovnic.



**Obr. 5** — Nestabilní konfigurace v rezonanci 2:1, s konjunkcemi opakujícími se v apocentru. Podle [85].



**Obr. 6** — Planetka a Jupiter před konjunkcí a po konjunkci, když se planetka blíží do pericentra, takže se vzdaluje od Jupitera. Podle [85].

V následujícím popíšeme rezonanci přesněji. Ještě předtím ale musíme napsat, jak se mění orbitální elementy, když kromě Slunce působí ještě gravitační síla planety.

### 0.1.3 Lagrangeovy rovnice

Je-li působící zrychlení *konzervativní*, tzn. že vektor  $\mathbf{a}$  lze vyjádřit jako gradient nějaké skalární funkce  $\mathcal{R}$ :

$$\mathbf{a} = -\nabla \mathcal{R},$$

mohu pro změny keplerovských orbitálních elementů použít Lagrangeovy rovnice. Potenciál  $\mathcal{R}$  se mimochodem trefně nazývá *poruchová funkce*. Vyjadřuje totiž poruchy působené Jupiterem; bez poruch by elementy dráhy byly konstanty (jak víme z problému 2 těles).

Proč je tento popis vhodnější pro vzájemné působení Slunce, planet a planetky? Jednak je  $\mathcal{R} \propto \frac{1}{r}$  evidentně jednodušší funkcí než  $|\mathbf{a}| \propto \frac{1}{r^2}$  a jednak využijeme sílu hamiltonovského formalismu, ve kterém pohyb nepopisujeme pohybovou rovnicí, ale celkovou energií  $H$  (hamiltoniánem):

$$H = H_0 + \mathcal{R} = \frac{p^2}{2} - \frac{Gm_0}{r} + \mathcal{R},$$

kde  $H_0$  je keplerovská část hamiltoniánu, snadno integrovatelná (jak víme z problému 2 těles). Lagrangeovy rovnice odvozovat nebudeme, napíšeme rovnou výsledek. Do nejnižšího řádu v  $e$  a  $I$  vypadají takto [85]:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \quad (4)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \quad (5)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad (6)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = +\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad (7)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{1}{na^2 \sin I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (8)$$

Vidíme že v rovnicích pro změny  $a, e, I$  vystupují parciální derivace  $\mathcal{R}$  podle úhlových elementů dráhy  $\varpi, \Omega, \lambda$  a opačně. Teorie vyšších řádů v  $e, I$  by vyžadovaly také přesnější Lagrangeovy rovnice.

#### 0.1.4 Poruchová funkce

Jak ale vypadá ono záhadné  $\mathcal{R}$ ? Spočtěme si jej pro tři tělesa indexovaná 0, 1, 2 ( $\odot$ , planetu a nějakou planetku). Zrychlení  $\mathbf{a}$  známe dobře z Newtonova II. pohybového a gravitačního zákona. V těžištvém systému, který je inerciální, můžeme pro všechna tělesa psát jednoduše:

$$\mathbf{a}_i = \frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -Gm_j \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|^3}. \quad (9)$$

Ovšem kvůli našemu  $\mathcal{R}$  musíme přejít do heliocentrického  $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0$ . Tam už to nebude tak pěkné, protože je neinerciální a objeví se nám další (zdánlivé) síly, resp. zrychlení. Pro planetku č. 2 píší (a snažím se všude za  $\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j$  dosadit  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ , dávajíc pozor na znaménka):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \frac{d^2 \mathbf{R}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{R}_0}{dt^2} = \\ &= -Gm_0 \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} - Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \left( -Gm_1 \frac{-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3} \right) = \\ &= -G(m_0 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + Gm_1 \left( \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right). \end{aligned}$$

První člen s  $m_0 \mathbf{r}_2$  vyjadřuje přímé působení Slunce 0 na planetku 2. Druhý člen  $m_2 \mathbf{r}_2$  je působení planetky 2 na Slunce 0 jež se v heliocentrickém systému jeví jako odstředivé zrychlení. (Dohromady by způsobily pohyb po elipse,

obdobný problému dvou těles.) Třetí člen  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  vyjadřuje přímé působení planety 1 na planetku 2. Nesmíme ovšem zapomenout na čtvrtý člen, kde figuruje  $\mathbf{r}_1$ . Co dělá poloha planety 1 (vzhledem ke  $\odot$ ) v pohybové pro planetku 2? I planeta 1 totiž působí na Slunce, čímž se nám šine počátek souřadnicové soustavy a vzniká tak odstředivé („zdánlivé“) zrychlení na planetku 2. Členy s  $m_1$  (tj. poruchy působené planetou 1 na planetku 2) jsem si logicky seskupil.

Čeho je to gradient? Když si vzpomenu<sup>2</sup>, že  $\nabla \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c}$  a  $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , je zřejmé, že onen gradient (vzhledem k  $\mathbf{r}_2$ ;  $\mathbf{r}_1$  je zde konstanta) vychází takto:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{r}_2} \left[ -G(m_0 + m_2) \frac{1}{r_2} - Gm_1 \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mathbf{r}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) \right]$$

a všechno, co souvisí s planetou 1, zahrnu do  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R}_{21} = -Gm_1 \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - \mathbf{r}_2 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right). \quad (10)$$

To jsou tedy přímé plus nepřímé gravitační *poruchy* planety 1 na planetku 2 vyjádřené jako potenciál. Stačí je připočítat ke keplerovskému hamiltoniánu  $H_0$  a Hamiltonovy rovnice:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (11)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (12)$$

mi pak řeknou, jak se mění souřadnice s časem (vlastně řeknou jen jak vypadají časové derivace souřadnic  $q^i$  a hybností  $p_i$ , integraci podle času budu muset ještě provést). Samozřejmě bych byl schopen napsat i pohybovou rovnici  $\frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2}$  pro planetu č. 1 a příslušnou  $\mathcal{R}_{12}$ ; ostatně jsou spolu úzce provázané, že. Také bychom mohli problém zobecnit třeba na  $N$  těles, ale to bychom místo jedničkových proměnných v  $\mathcal{R}_{21}$  museli psát  $\sum_{i=1..N, i \neq 2}$  blabla...

Je hezké, že mám  $\mathcal{R}$  jako funkci  $\mathbf{r}_i$ , ale v Lagrangeových rovnicích (4)–(8) jsou parciální derivace podle elementů. Proto bych potřeboval  $\mathcal{R}$  jako funkci  $(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \varpi_1, \lambda_1, a_2, \dots)$ , abych mohl v klidu derivovat. Obvyklý postup:  $\mathcal{R}$  je periodickou funkcí úhlů, takže ji rozvinu do Fourierovy řady jako:

$$\mathcal{R}_{21} = \sum_{i,j,k} C_{ijk} \cos(i_1 \lambda_1 + i_2 \lambda_2 + j_1 \varpi_1 + j_2 \varpi_2 + k_1 \Omega_1 + k_2 \Omega_2). \quad (13)$$

<sup>2</sup> Kdo nevěří, ať si parciální derivace sám spočte:  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ ,  $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \dots$

„Malý“ problém: určit  $C_{ijk}$ . Většinou se používají mocninné rozvoje v  $e$ ,  $i$ ; algebraické manipulátory jsou přitom schopné v paměti udržet mnoho miliónů členů. Proč tam jsou jen kosíny?  $\mathcal{R}_{21}$  je přeci sudá funkce neměnní znaménko při záměně znamének všech úhlů (aneb „planety se nezačnou odpuzovat, ani když se na hlavu postavím“).

Nakonec musíme chtít nechtě integrovat Lagrangeovy rovnice. Přitom se jistě vyskytne situace „ $\int_t \frac{\partial \mathcal{R}_{21}}{\partial \text{elementu}} = \text{koef.} \frac{\cos \text{argument} \cdot t}{\text{argument}}$ “, což může být zajímavé, když argument  $\rightarrow 0$ , protože pak je  $\frac{\text{koef.}}{\text{arg.}}$  veliké, vznikají tedy velké oscilace  $a$ ,  $e$  nebo  $i$ , neboli dochází k *rezonanci*. Působení planety 1 rozkývá dráhu planety 2, obdobně jako v případě nucených kmitů tlumeného harmonického oscilátoru.

### 0.1.5 Poruchová funkce pro systém Slunce–Jupiter–planetka

Pro porovnání napíšeme nejdříve poruchovou funkci pro planetku *mimo* rezonanci (odvození viz [85])<sup>3</sup>:

$$\langle \mathcal{R}_{21} \rangle = C_0 + C_1(e_1^2 + e_2^2) + C_2(\varpi_1^2 + s_2^2) + C_3 e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) +$$

<sup>3</sup> Pro koplanární případ by bylo odvození relativně jednoduché. Je založené na rozvoji reciproké vzdálenosti do Legendrových polynomů:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = \frac{1}{r'} \left[ 1 - 2 \frac{r}{r'} \cos \psi + \left( \frac{r}{r'} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r'} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos \psi),$$

kde Legendrovy polynomy  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ,  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ , atd. a  $\psi$  je úhel sevřený vektory  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$ . Pro naše účely vynecháme člen  $l = 0$ , protože nezávisí na  $r$  a beztak budu nakonec potřebovat jen  $\nabla_r \mathcal{R}$ , a také  $l = 1$ , neb to je mínus nepřímá část  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R} = Gm' \left( \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) = \frac{Gm'}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^l P_l(\cos \psi).$$

Sevřený úhel  $\psi$  lze zjistit snadno právě v koplanárním případě:

$$\psi = \lambda' - \lambda = (f' + \varpi') - (f + \varpi),$$

kde  $\lambda$ ,  $\lambda'$  jsou pravé délky,  $f$ ,  $f'$  pravé anomálie a  $\varpi$ ,  $\varpi'$  délky pericenter. Pak  $\cos \psi$  vyjádříme ze součtových vzorců  $\cos(\alpha + \beta) = \dots$  a uplatníme *eliptické rozvoje* pro  $\cos f$  a  $\sin f$  (které mají původ v iteračním řešení Keplerovy rovnice; vyjadřují určitou proměnnou jako funkci střední anomálie  $M$ ). Do zlomku  $\frac{r}{r'}$  ještě vpravíme velké poloosy  $a$ ,  $a'$ :

$$\left( \frac{r}{r'} \right)^l = a^l a'^{-l} \left( \frac{r}{a} \right)^l \left( \frac{a'}{r'} \right)^l$$

a použijeme známé eliptické rozvoje pro  $\frac{r}{a}$  a  $\frac{a'}{r'}$ .

$$+ C_4 s_1 s_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2), \quad (14)$$

kde  $C_i(\alpha)$  jsou kombinace a derivace Laplaceových koeficientů (pomalu se měnících funkcí velké poloosy,  $\alpha = \frac{a}{a'}$ ,  $s = \sin \frac{I}{2}$ ). Vcelku jednoduchá funkce, že? Jedná se o rozvoj do druhého řádu v  $e$  a  $I$ , kde  $e_1$ ,  $s_1$ ,  $\varpi_1$ ,  $\Omega_1$  jsou konstanty, protože planetka neovlivňuje Jupiter ( $m_2 = 0$ ). Předpokládáme-li navíc  $s_1 = 0$ , škrtneme ještě dva členy. Záměrně jsme v rozvoji vynechali nekonečně mnoho *rychloperiodických* členů obsahujících  $\lambda$ . Doufáme, že když takové *ustředněné*  $\langle \mathcal{R} \rangle$  dosadíme do Lagrangeových rovnic (index 2 si odpustíme):

$$\left( \frac{da}{dt} \right)_{\text{sec}} = 0, \quad (15)$$

$$\left( \frac{de}{dt} \right)_{\text{sec}} = n\alpha \frac{m_1}{m_0} C_3 e_1 \sin(\varpi - \varpi_1), \quad (16)$$

$$\left( \frac{d\varpi}{dt} \right)_{\text{sec}} = n\alpha \frac{m_1}{m_0} \left[ 2C_1 + C_3 \frac{e_1}{e} \cos(\varpi - \varpi_1) \right], \quad (17)$$

konst.      skoro nula pro  $e \gg e_1$

$$\left( \frac{d\Omega}{dt} \right)_{\text{sec}} = n\alpha \frac{m_1}{m_0} \frac{C_2}{2}, \quad (18)$$

obdržíme dlouhoperiodické (*sekulární*) změny orbitálních elementů:

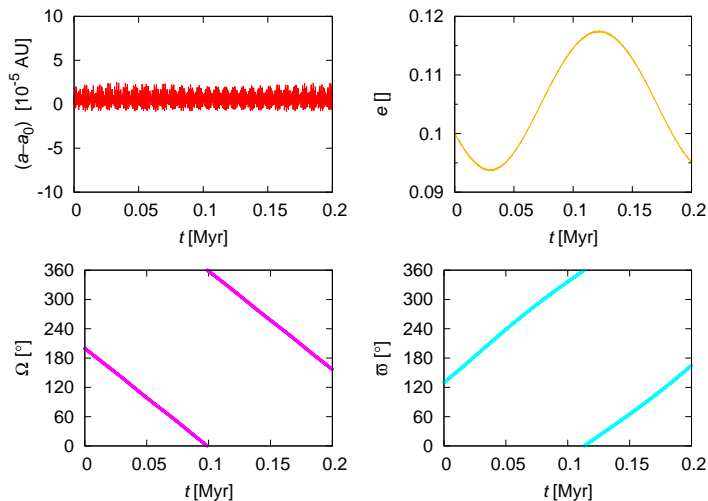
$$\text{integrační konstanty} \\ a = \widehat{a_0}, \quad (19)$$

$$e = e_0 - \frac{na}{\varpi} \frac{m_1}{m_0} C_3 e_1 [\cos \varpi - \cos \varpi_0], \quad (20)$$

$$\varpi = \varpi_0 + n\alpha \frac{m_1}{m_0} 2C_1 t, \quad (21)$$

$$\Omega = \Omega_0 + n\alpha \frac{m_1}{m_0} \frac{C_2}{2} t. \quad (22)$$

Na obr. 7 je vidět typický výsledek: velká poloosa  $a$  je konstantní, excentricita  $e$  osciluje tak, že maximum je při  $\varpi = 0$ , úhly  $\varpi$  a  $\Omega$  cirkulují (mění se od 0 do 360°), ale každý jiným směrem (protože  $2C_1 = -\frac{C_2}{2}$ ).



**Obr. 7** — Typické sekulární změny orbitálních elementů v systému Slunce–Jupiter–planetka. Počáteční velká poloosa byla zvolena  $a_0 = 1$  AU, aby se planetka nacházela daleko od Jupitera a minimalizoval se vliv rezonancí. Tento výpočet byl proveden N-částicovým integrátorem, čili obsahuje i všechny krátkoperiodické členy, které by v analytické teorii byly eliminované středováním.

### 0.1.6 Slunce–Jupiter–planetka v rezonanci středního pohybu

V případě, kdy je planetka 2 v rezonanci 2:1 s planetou 1, tzn. že *kritický argument*:

$$\sigma = 2\lambda_1 - \lambda_2 - \varpi_2 \quad (23)$$

se mění pomalu, musíme kromě sekulárních členů v poruchové funkci uvážit ještě příslušný rezonanční (zde jsou  $I_1$  i  $I_2 = 0$ ):

$$\langle \mathcal{R}_{21} \rangle = -\frac{Gm_1}{a_2} \left[ \overbrace{C_1 e_2^2}^{\text{sekulární}} + \overbrace{C_6 e_2 \cos \sigma}^{\text{rezonanční}} \right]. \quad (24)$$

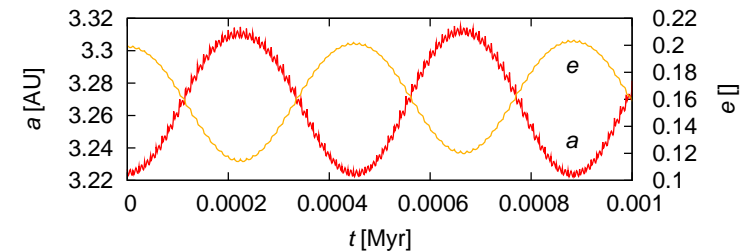
Kdybychom toto dosadili do Lagrangeových rovnic, získáme pro  $\sigma$  rovnici typu harmonického oscilátoru a zjistíme, že narozdíl od sekulárního vývoje se v rezonanci navíc objevily výrazné *oscilace velké poloosy*  $a$ , a také že  $a(t)$  a  $e(t)$  jsou spolu spřažené.

Obecně, u rezonance popsané poměrem  $(p+q) : q$  nazýváme  $p$  *řád rezonance*, přičemž právě tomuto číslu bývají úměrné perturbace ( $e^p$ ,  $s^p$ ). Rezonance 2:1 je tedy prvního řádu, kdežto 7:3 až čtvrtého řádu.

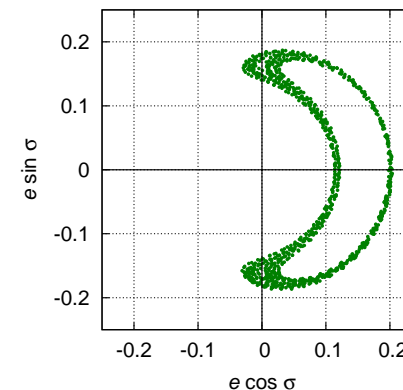
Skutečnost, zda se planetka nachází v rezonanci, můžeme nejsnadněji zkontrolovat tak, že příslušný kritický úhel:

$$\sigma = (p+q)\lambda_1 - p\lambda_2 - q\varpi_2 \quad (25)$$

*libruje* (osciluje o méně než  $360^\circ$ , na grafu  $(e \cos \sigma, e \sin \sigma)$  se objevuje charakteristická „ledvinka“, viz obr. 9). Mimo rezonanci totiž cirkuluje.



**Obr. 8** — Změny orbitálních elementů planetky v rezonanci 2:1 s Jupiterem, jejíž nominální poloha je na  $a \simeq 3,27$  AU; okolo tohoto libračního centra osciluje velká poloosa. Oscilace excentricity jsou v protifázi, přičemž hodnota adiabatického invariantu (viz [85]):  $N = \sqrt{\frac{a}{a_J}} \left( \frac{p+1}{p} - \sqrt{1-e^2} \cos I \right) = \text{konst.}$



**Obr. 9** — Polární graf  $e(\sigma)$  pro rezonanci 2:1 s Jupiterem; kritický úhel  $\sigma = 2\lambda_1 - \lambda_2 - \varpi_2$ .

### 0.1.7 Slunce–Jupiter–Saturn

Než budeme pokračovat s planetkami, musíme probrat, jak se ovlivňují dvě planety navzájem. Pro Saturn platí úplně stejná poruchová funkce  $\langle \mathcal{R}_{21} \rangle$  jako v (14), ale kromě toho máme ještě  $\langle \mathcal{R}_{12} \rangle$  pro Jupiter a  $e_1$ ,  $s_1$ ,  $\varpi_1$ ,  $\Omega_1$

nyní samozřejmě nejsou konstanty ( $m_2 > 0$ )! Za předpokladu malých sklonů ( $\sin I \doteq I$ ) mají obě poruchové funkce tvar:

$$\begin{aligned} \text{opět nějaké Laplaceovy koeficienty} \\ \langle \mathcal{R}_j \rangle = n_j a_j^2 \left[ \frac{1}{2} \widehat{A_{jj}} e_j^2 + \widehat{A_{jk}} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + B_{jk} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Po dosazení do Lagrangeových rovnic dostaneme soustavu provázaných diferenciálních rovnic. Řešení, zapsané v nesingulární proměnných  $h = e \sin \varpi$ ,  $k = e \cos \varpi$ ,  $p = I \sin \Omega$ ,  $q = I \cos \Omega$ , má tvar:

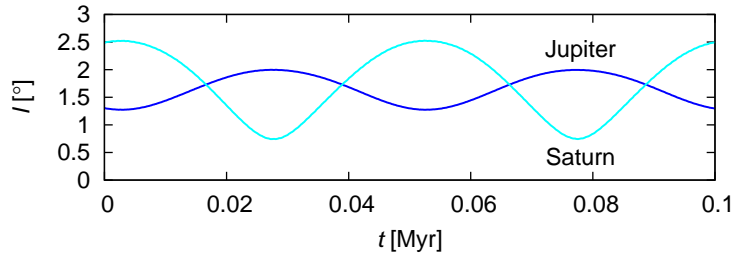
$$h_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i), \quad k_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i), \quad (27)$$

$$p_j = \sum_{i=1}^2 I_{ji} \sin(s_i t + \gamma_i), \quad q_j = \sum_{i=1}^2 I_{ji} \cos(s_i t + \gamma_i), \quad (28)$$

kde  $g_i, s_i$  jsou *vlastní frekvence* (vlastní hodnoty matic  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ). Čili u obou planet se objeví antikorelované oscilace excentricit a sklonů (obr. 10); velké poloosy jsou konstantní.

$g_5 = 4,26''/\text{yr}$	$s_5$ neexistuje
$g_6 = 28,25$	$s_6 = -26,34$
$g_7 = 3,09$	$s_7 = -2,99$
$g_8 = 0,67$	$s_8 = -0,69$

**Tab. 1** — Hodnoty základních frekvencí planetárního systému Jupiter–Neptun (takto předcházejí planety, protože působí na sebe navzájem; takto jsou rozestavěny). Frekvence  $s_5$  neexistuje, protože Jupiterův uzel dráhy necirkuluje. Přepočítání na periodu cirkulace v rocích je snadný:  $360 \cdot 3600''/g_5$ .



**Obr. 10** — Sekulární změny sklonů v systému Slunce–Jupiter–Saturn. Větší amplituda oscilací pochopitelně přísluší lehčímu Saturnu. Vývoj excentricit je velmi podobný (amplitudy jsou 0,03 a 0,06).

### 0.1.8 Slunce–Jupiter–Saturn–planetka a sekulární rezonance

Když je teď planetka ovlivňována dvěma planetami, musíme její poruchovou funkci upravit:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R} \rangle = na^2 \left[ \frac{1}{2} A e^2 + \frac{1}{2} B I^2 + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 A_j e e_j \cos(\varpi - \varpi_j) + \sum_{i=1}^2 B_j I I_j \cos(\Omega - \Omega_j) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Samozřejmě přitom využijeme známého řešení pro planety (27)–(28).

Řešení, opět „spadlé zhůry“, vypadá takto:

$$h = e_{\text{free}} \sin(At + \beta) + h_0(t), \quad k = e_{\text{free}} \cos(At + \beta) + k_0(t), \quad (30)$$

$$p = I_{\text{free}} \sin(Bt + \gamma) + p_0(t), \quad q = I_{\text{free}} \cos(Bt + \gamma) + q_0(t), \quad (31)$$

kde:

$$h_0(t) = - \sum_{i=1}^2 \frac{(\sum_{j=1}^2 A_j e_{ij})}{A - g_i} \sin(g_i t + \beta_i), \quad (32)$$

$$k_0(t) = - \sum_{i=1}^2 \frac{(\sum_{j=1}^2 A_j e_{ij})}{A - g_i} \cos(g_i t + \beta_i), \quad (33)$$

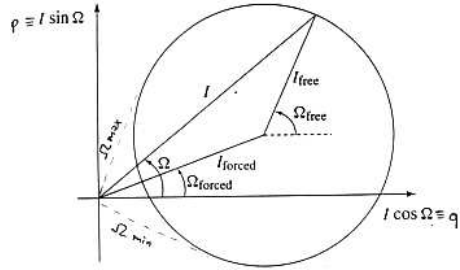
$$p_0(t) = - \sum_{i=1}^2 \frac{(\sum_{j=1}^2 B_j I_{ij})}{B - s_i} \sin(s_i t + \gamma_i), \quad (34)$$

$$q_0(t) = - \sum_{i=1}^2 \frac{(\sum_{j=1}^2 B_j I_{ij})}{B - s_i} \cos(s_i t + \gamma_i). \quad (35)$$

Zavedeme ještě:

$$e_{\text{forced}} = \sqrt{h_0^2 + k_0^2}, \quad I_{\text{forced}} = \sqrt{p_0^2 + q_0^2},$$

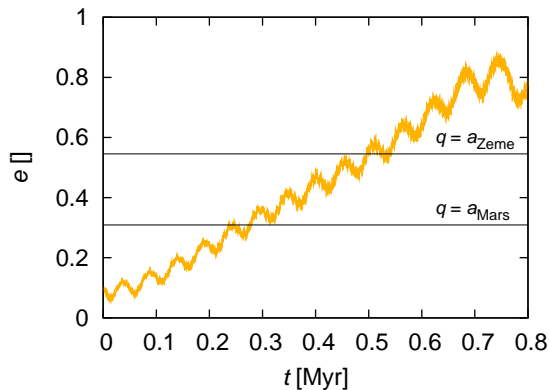
abychom řešení mohli dát krásnou geometrickou reprezentaci: excentricita planetky osciluje jednak *nucenými* kmity s amplitudou  $e_{\text{forced}}$  a frekvencemi  $g_i$  (ty jsou dané planetami, závisí pouze na velké poloose  $a$  planetky) a jednak *vlastními* kmity s volnou excentricitou  $e_{\text{free}}$  a vlastní frekvencí  $A$  pericentra (ty jsou dané počátečními podmínkami planetky). Totéž pochopitelně platí i pro sklon.



**Obr. 11** — Geometrický vztah mezi oskulačními, volnými a nucenými sklonem a délkou výstupného uzlu. V případě, že  $I_{\text{free}} < I_{\text{forced}}$ , oskulační  $\Omega$  se mění jen v omezeném intervalu.

Všimněme si také „nebezpečných“ jmenovatelů v (32)–(35). Pokud se planetka nachází na určitých místech ve sluneční soustavě, kde je její vlastní frekvence pericentra  $g \equiv A$  nebo frekvence uzlu  $s \equiv B$  blízko některé planetární frekvence  $g_i$  nebo  $s_i$ , může dojít k *sekulárním rezonancím*, ve kterých se zřejmě vyskytnou velké perturbace excentricity, respektive sklonu.

Protože příroda je složitější než naše teorie druhého řádu, nacházejí ve skutečnosti sekulární rezonance trochu jinde, a dokonce jejich poloha závisí na  $e$ ,  $I$ , nejenom na  $a$ . Prakticky to lze provést tak, že numericky spočteme vývoj mnoha drah v hlavním pásu, Fourierovou transformací vypočítáme vlastní frekvence  $g$  a  $s$  v závislosti na  $a, e, I$  a podíváme se, kde jsou rovny frekvencím planet  $g_i, s_i$ , případně jejich kombinacím. Z podmínek typu  $g = g_6$ ,  $g + s - g_6 - s_6 = 0$  plynou izoplochy v prostoru  $(a, e, I)$ , čili hranice sekulárních rezonancí.



**Obr. 12** — Vliv sekulární rezonance  $\nu_6$  na vývoj excentricity planetky ve vnitřním hlavním pásu ( $a = 2,2 \text{ AU}$ ,  $e(t = 0) = 0,1$ ). Během 1 Myr se může excentricita zvýšit natolik, že planetka začne křížit dráhy vnitřních planet (v této simulaci ovšem vnitřní planety zahrnuté nejsou).

### 0.1.9 Mezery a hranice v hlavním pásu planetek

Rezonance se zřetelně projevují v hlavním pásu planetek, například:

1. Kirkwoodovy mezery (Kirkwood, 1850) odpovídají rezonancím středního pohybu s Jupiterem 3:1, 5:2, 2:1,  $\dots$ , naopak ve 3:2 je shluk;<sup>4</sup>
2. sekulární rezonance  $\nu_6 \equiv (g - g_6 \doteq 0)$  (tj. když precese  $\varpi$  probíhá stejně rychle jako u Saturnu) tvoří zřetelnou vnitřní hranici hlavního pásu;

Za určitých okolností mohou být podstatné i rezonance tří těles (Jupiter–Saturn–planetka)<sup>5</sup>, „zběsilé“ sekulární rezonance (např. kombinace  $s - s_4 - s_6 + g_6$ ), spin orbitální rezonance, apod.

Koincidence mezi strukturami hlavního pásu a spočtenými hranicemi rezonancí byla zřejmá, ale dlouho se nevědělo, *proč* tam jsou mezery nebo dokonce shluky; dnes víme, že když se rezonance *překrývají*, vede to k chaosu a velkoškálové difuzi excentricit a sklonů. To ale samo o sobě nestačí na vysvětlení mezer, protože „nahore“ žádné asteroidy nejsou.

Mezery vznikají až kvůli křížení s dráhami planet, při náhodném blízkém přiblížení se totiž mění takřikajíc skokem velká poloosa, tudíž i střední pohyb a asteroid se dostává mimo rezonanci. Pozoruhodné je, že křížičů pozorujeme v současnosti v okolí Země docela dost; na blízkozemních dráhách mohou ale vydržet jen asi 10 Myr, takže zřejmě musí být odněkud doplňováni.

Doplňuje je Jarkovského negravitační síla, jež pomalu mění velké poloosy asteroidů a posouvá je do rezonancí. Sice nestačí zaplnit mezery, ale udržuje populaci blízkozemních asteroidů po miliardy roků v ustáleném stavu, což odpovídá počtu a stáří měsíčních kráterů, kde máme kolize zaznamenány.

<sup>4</sup> Některé rezonanční populace dostaly i své názvy: J2/1 jsou Zhongguo a Griqua, J3/2 Hilda, J4/3 Thule, J1/1 Trojané.

<sup>5</sup> Kupříkladu rezonance  $3J - 1S - 1$  dělí rodinu Merxia na dvě části, přičemž každá má jiný rozptyl excentricit a sklonů. Vysvětluje se to Jarkovského driftem ve velké poloose skrz tuto rezonanci (Vokrouhlický aj. 2006).

# Literatura

## Učebnice

- [1] BEATTY, J. K., PETERSEN, C. C., CHAIKIN, A.: *The New Solar System*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. ISBN 0521369657.
- [2] BERTOTTI, B., FARINELLA, P., VOKROUHLICKÝ, D.: *Physics of the Solar System*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. ISBN 1402014287.
- [3] DE PATER, I., LISSAUER, J. J.: *Planetary Sciences*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 0521482194.

## Reference

- [4] ALVAREZ, L. W., ALVAREZ, W., ASARO, F., MICHEL, H. V.: *Extraterrestrial cause for the Cretaceous Tertiary extinction*. *Science*, **208**, s. 1095, 1980.
- [5] ARTEMIEVA, N., PIERAZZO, E., STÖEFFLER, D.: *Numerical modeling of tektite origin in oblique impacts: Implications to Ries-Moldavites strewn field*. *Bull. of the Czech Geological Survey*, **77**, 4, s. 303–311, 2002.
- [6] BERNARD, J. H., ROST, R. aj.: *Encyklopedický přehled minerálů*. Praha: Academia, 1992.
- [7] BOČEK, M.: *Petrologické složení povrchu a kůry Měsíce. Povětroň*, **14**, S1, 3, 2006.
- [8] BOTTKÉ, W. F., CELLINO, A., PAOLICCHI, P., BINZEL, R. P. (editoři): *Asteroids III*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2002. ISBN 0816522812.
- [9] BOTTKÉ, W. F., RUBINCAM, D. P., BURNS, J. A.: *Dynamical evolution of main belt meteoroids: Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces*. *Icarus*, **145**, s. 301–331, 2000.
- [10] BOTTKÉ, W. F., VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D.: *An asteroid breakup 160 Myr ago as the probable source of the K/T impactor*. *Nature*, **449**, 7158, s. 48–53.
- [11] BOTTKÉ, W. F. aj.: *Debiased orbital and absolute magnitude distribution of the near-Earth objects*. *Icarus*, **156**, 2, s. 399–433, 2002.
- [12] BOWELL, T.: *AstOrb* [online]. [cit. 2008-09-30]. <ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html>.
- [13] BROŽ, M.: *Impaktní kráter Steinheim*. Povětroň S1/2003, s. 3–10.
- [14] BROŽ, M.: *Impaktní krátery (2) — Ries*. Povětroň 5/2001, s. 6–13.
- [15] BROŽ, M.: *Yarkovsky Effect and the Dynamics of the Solar System*. Dizertační práce, Karlova univerzita, Praha, 2006.
- [16] BROŽ, M.: *Yarko-site* [online]. [cit. 2008-09-30]. <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/yarko-site/>.
- [17] BROŽ, M. aj.: *Planetární stezka v Hradci Králové* [online]. [cit. 2008-12-10]. [http://www.astrohk.cz/planetarni\\_stezka/](http://www.astrohk.cz/planetarni_stezka/).
- [18] BROŽ, M., NOSEK, M., TREBICHAŤSKÝ, J., PECINOVÁ, D. Editoři : *Sluneční hodiny na pevných stanovištích. Čechy, Morava, Slezsko a Slovensko*. Praha: Academia, 2004. ISBN 8020012044.
- [19] BRUNS, H., *Acta Math.*, **11**, s. 25, 1887.
- [20] BURBINE, T. H. aj.: *Meteoritic parent bodies: their number and identification*. in *Asteroids III*, W. F. Bottke Jr., A. Cellino, P. Paolich, a R. P. Binzel (eds), Tuscon: University of Arizona Press, 2002, s. 653–667.
- [21] BURNS, J. A., LAMY, P. L., SOTER, S.: *Radiation forces on small particles in the Solar System*. *Icarus*, **40**, s. 1–48, 1979.
- [22] BURNS, J. A., SAFRONOV, V. S.: *Asteroid nutation angles*. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **165**, 403, 1973.
- [23] CALLIGAN, D. P., BAGGLEY, W. J.: *The radiant distribution of AMOR radar meteors*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **359**, s. 551–560, 2005.
- [24] CARROL, S. M.: *Lecture Notes on General Relativity* [online]. [cit. 2010-03-08]. <http://preposterousuniverse.com/grnotes/>.
- [25] CEPLECHA, Z.: *Geometric, dynamic, orbital and photometric data on meteoroids from photographic fireball networks*. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **38**, s. 222–234, 1987.
- [26] CEPLECHA, Z. aj.: *Meteor phenomena and bolides*. *Space Science Reviews*, **84**, s. 327–471, 1998.
- [27] *Cryovolcanism and Geologic Analogies* [online]. [cit. 2009-04-30]. <http://mivo-sys.tripod.com/cryo.html>.
- [28] ČAPEK, D., VOKROUHLICKÝ, D.: *The YORP effect with finite thermal conductivity*. *Icarus*, **172**, s. 526–536, 2004.
- [29] *Earthquakes* [online]. [cit. 2010-03-01]. <http://pubs.usgs.gov/gip/earthq1/plate.html>.
- [30] FARINELLA, P., VOKROUHLICKÝ, D., HARTMANN, W. K.: *Meteorite delivery via Yarkovsky orbital drift*. *Icarus*, **132**, s. 378–387, 1998.
- [31] FERNÁNDEZ, J. A.: *Comets. Nature, dynamics, origin and their cosmogonical relevance*. Dordrecht: Springer, 2005.
- [32] FESTOU, M. C., KELLER, H. U., WEAVER, H. A. (ed.): *Comets II*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2004.
- [33] FOUKAL, P. V.: *Solar Astrophysics*. Weinheim: Wiley-VCH, 2004. ISBN 3527403744.
- [34] FRANKEL, C.: *Volcanoes of the Solar System*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. ISBN 0521477700.
- [35] GABZDYL, P.: *Prohlídka Měsíce* [online]. [cit. 2009-02-05]. <http://www.moon.astronomy.cz/>.
- [36] *Geologischer Wanderweg im Steinheimer Becken* [online]. [cit. 2003-1-1]. <http://www.pg.aa.bw.schule.de/aktiv/geoproj/sbecken/wanderfr.htm>
- [37] GRADY, M. M.: *Catalogue of meteorites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 0521663032.
- [38] *Gravity Probe B* [online]. [cit. 2010-04-01]. <http://einstein.stanford.edu/>.
- [39] GROSCHOFF, P., REIFF, W.: *Der geologische Wanderweg im Steinheimer Becken*. Steinheim am Albuch, 1993.
- [40] GÜDEL, M.: *The Sun in time: activity and environment* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **4**, 2007.
- [41] HACAR, B.: *Mechanika sluneční soustavy*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1948.
- [42] *Hadley cell*. *Encyclopedia Britannica* [online]. [cit. 2010-02-24]. <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/251175/Hadley-cell>.
- [43] HAGIHARA, Y.: *Celestial Mechanics I*. Cambridge: MIT Press, 1970.
- [44] HALODA, J.: *Meteority a jejich význam pro studium procesů vzniku a vývoje těles sluneční soustavy* [online]. [cit. 2009-01-29]. <http://astro.mff.cuni.cz/vyuka/AST021/index.html>.
- [45] HAMILTON, A.: *Falling into a black hole* [online]. [cit. 2010-03-17]. <http://casa.colorado.edu/~ajsh/schw.shtml>.

- [46] HARMANEC, P., BROŽ, M.: *Stauba a vývoj hvězd* [online]. [cit. 2010-01-26]. <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/astrofyzika2/>, 2010.
- [47] HIRAYAMA, K.: *Groups of asteroids probably of common origin*. *Astron. J.*, **31**, 743, s. 185–188, 1918.
- [48] HOLMES, N.: ‘*Shocking*’ *gas-gun experiments* [online]. [cit. 2008-11-13]. <https://www.llnl.gov/str/Holmes.html>.
- [49] HOLSAPPLE, K. aj.: *Asteroid spin data: no evidence of rubble-pile structures*. 36th Lunar and Planetary Science Conference, League City, Texas, 2005.
- [50] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M.: *Mechanika ve fyzice*. Praha: Academia, 2001. ISBN 8020002081.
- [51] HOWE, R.: *Solar internal rotation and its variation* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **6**, 2009.
- [52] HUTCHISON, R.: *Meteorites: A Petrologic, Chemical and Isotopic Synthesis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521035392.
- [53] CHANDRASEKHAR, S.: *The Mathematical Theory of Black Holes*. New York: Oxford University Press, 1998. ISBN 0198503709.
- [54] CHARBONNEAU, P.: *Dynamo models of the solar cycle* [online]. [cit. 2010-01-26]. *Living Rev. Solar Phys.*, **2**, 2005.
- [55] CHESLEY, S. R., aj.: *Direct detection of the Yarkovsky effect by radar ranging to asteroid 6489 Golevka*. *Science*, **302**, s. 1739–1742, 2003.
- [56] CHLUPÁČ, I. aj.: *Geologická minulost České republiky*. Praha: Academia, 2002.
- [57] CHRISTENSEN-DALSGAARD, J.: *Stellar Oscillations* [online]. [cit. 2010-01-26]. <http://www.eneas.info/>. 2003.
- [58] *International Earth Rotation and Reference Systems Service* [online]. [cit. 2008-11-13]. <http://www.iers.org/>.
- [59] IVEZIĆ, Ž. aj.: *Solar System objects observed in the Sloan Digital Sky Survey commissioning data*. *Astron. J.*, **122**, 5, s. 2749–2784, 2001.
- [60] JENNISKENS, P.: *Meteor showers and their parent comets*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. ISBN 0521853491.
- [61] JOHANSENN, A. aj.: *Rapid planetesimal formation in turbulent circumstellar disks*. *Nature*, **448**, 7157, s. 1022–1025, 2007.
- [62] JOHNSON, C.: *Precession of a gyroscope and precession of the Earth’s axis* [online]. [cit. 2008-09-10]. <http://www.mb-soft.com/public/precess.html>.
- [63] *JPL Horizons system* [online]. [cit. 2008-09-30]. <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>.
- [64] *JPL planetary and lunar ephemerides, DE405* [online]. [cit. 2008-09-30]. <ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/>.
- [65] KAASALAINEN, M. aj.: *Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques*. *Nature*, **446**, 7134, s. 420–422, 2007.
- [66] KAVASCH, J.: *The Ries Meteorite Crater. A geological guide*. Donauwörth: Ludwig Auer GmbH, 1985.
- [67] KELLEY, M. S.: *Comet dust trails* [online]. [cit. 2009-01-31]. <http://www.physics.ucf.edu/~msk/projects/trails/>.
- [68] KENKMAN, T. aj.: *Structure and formation of a central uplift: A case study at the Upheaval Dome impact crater, Utah*. in *Large Meteorite Impacts III*, s. 85, 2003. ISBN 0813723841. <http://books.google.com/>.
- [69] KERR, R. P.: *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*. *Phys. Rev. Lett.*, **11**, s. 237–238, 1963.
- [70] KOZAI, Y.: *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*. *Astron. J.*, **67**, 9, 591, 1962.
- [71] KRING, D. A., BAILEY, J.: *Terrestrial impact craters* [online]. [cit. 2008-11-13]. [http://www.lpi.usra.edu/science/kring/epo\\_web/impact\\_cratering/World\\_Craters\\_web/intromap.html](http://www.lpi.usra.edu/science/kring/epo_web/impact_cratering/World_Craters_web/intromap.html).
- [72] KRONK, G.: *Cometography* [online]. [cit. 2009-01-20]. <http://cometography.com/>.
- [73] LEVISON, H., DUNCAN, M.: *Swift* [online]. [cit. 2008-09-30]. <http://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>.
- [74] MANNINGS, V. aj. (Ed.): *Protostars and planets IV*. Tuscon: The University of Arizona Press, 2000. ISBN 0816520593.
- [75] MARCAN, S.: *Phase diagram explanation* [online]. [cit. 2009-01-20]. <http://bhs.smuhsd.org/science-dept/marcan/>.
- [76] MCFADDEN, L.–A., WEISSMAN, P. R., JOHNSON, T. V. (Ed.): *Encyclopedia of the Solar System*. San Diego: Academic Press, 2007. ISBN 012088589.
- [77] MCSWEEN, H. Y.: *Meteorites and their parent planets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [78] *MIAC. Antarctic meteorites* [online]. [cit. 2009-01-28]. <http://miac.uqac.ca/MIAC/antarc.htm>.
- [79] MILANI, A., KNEŽEVIĆ, Z.: *Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt*. *Icarus*, **107**, 2, s. 219–254, 1994.
- [80] *Minor planet & comet ephemeris service* [online]. [cit. 2008-09-30]. <http://www.cfa.harvard.edu/iau/MPEph/MPEph.html>.
- [81] MISNER, C. W., THORNE, K. S., WHEELER, J. A.: *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973. ISBN 0716703440.
- [82] MORBIDELLI, A., CRIDA, A., MASSET, F., NELSON, R. P.: *Building giant-planet cores at a planet trap*. *Astron. Astrophys.*, **478**, s. 929–937, 2008.
- [83] MORBIDELLI, A., LEVISON, H.: *Scenarios for the origin of the orbits of the trans-neptunian objects 2000 CR<sub>105</sub> and 2003 VB<sub>12</sub> (Sedna)*. *Astron. J.*, **128**, 2564, 2004.
- [84] MORBIDELLI, A. aj.: *Source regions and timescales for the delivery of water to Earth*. *Meteoritics & Planetary Science*, **35**, 6, s. 1309–1320, 2000.
- [85] MURRAY, C. D., DERMOTT, S. F.: *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [86] *National Space Science Data Center* [online]. [cit. 2009-02-17]. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/>.
- [87] NESVORNÝ, D., MORBIDELLI, A.: *Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt*. *Astron. J.*, **116**, 3029, 1998.
- [88] NESVORNÝ, D., VOKROUHLICKÝ, D.: *Analytic theory of the YORP effect for near-spherical objects*. *Astron. J.*, **134**, 5, s. 1750–1768, 2007.
- [89] NESVORNÝ, D. aj.: *Evidence for asteroid space weathering from the Sloan Digital Sky Survey*. *Icarus*, **173**, 1, s. 132–152, 2005.
- [90] NORTON, O. R.: *The Cambridge Encyclopedia of Meteorites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0521621437.
- [91] ÖPIK, E. J.: *Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter*. *Proc. R. Irish Acad.*, **54**, s. 165–199, 1951.
- [92] OSTRO, S.J. aj.: *Radar imaging of binary near-Earth asteroid (66391) 1999 KW<sub>4</sub>*. *Science*, **314**, 5803, s. 1276–1280, 2006.
- [93] PECINA, P., CEPLECHA, Z.: *New aspects of in single-body meteor physics.* *Bull. Astron. Inst. Czechosl.*, **34**, 102, 1983.
- [94] PECINA, P., NOVÁKOVÁ, D.: *Meteorický radar v Ondřejově. Povětroň*, **10**, 6, s. 4, 2002.

- [95] PECHALA, F., BEDNÁŘ, J.: *Příručka dynamické meteorologie*. Praha: Academia, 1991. ISBN 8020001980.
- [96] PETERSON, C.: *A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect*. *Icarus*, **29**, s. 91–111, 1976.
- [97] POKORNÝ, Z.: *Astronomické algoritmy pro kalkulátory*. Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 1988.
- [98] PÖSGES, G., SCHIEBER, M.: *The Ries Crater – Museum Nördlingen*. München: Dr. Friedrich Pfeil, 1997.
- [99] PRAVEC, P. aj.: *Two-period lightcurves of 1996 FG3, 1998 PG, and (5407) 1992 AX: One probable and two possible binary asteroids*. *Icarus*, **146**, 1, s. 190–203, 2000.
- [100] PRAVEC, P. aj.: *Ondřejov Asteroid Photometry Project* [online]. [cit. 2008-09-09]. (<http://www.asu.cas.cz/~ppravec/>).
- [101] PRESS, W. R., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W., FLANNERY, B.P.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [102] PŘÍHODA, P. aj.: *Hvězdářská ročenka 2008*. Praha: Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 2007. ISBN 9788086017471.
- [103] QUINN, T. R., TREMAINE, S., DUNCAN, M.: *A three million year integration of the earth's orbit*. *Astron. J.*, **101**, s. 2287–2305, 1991.
- [104] *Reduce* [online]. [cit. 2010-03-08]. (<http://www.reduce-algebra.com/>).
- [105] *Rieskrater–Museum Nördlingen* [online]. [cit. 2001-1-1]. (<http://www.iaag.geo.uni-muenchen.de/sammlung/Rieskrater/RieskraterMuseum.html>).
- [106] ROBERTSON, H. P.: *Dynamical effects of radiation in the Solar System*. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **97**, 423, 1937.
- [107] RUBIN, A. E.: *Mineralogy of meteorite groups*. *Meteoritics and Planetary Science*, **32**, 231, 1997.
- [108] RUBINCAM, D. P.: *Polar wander on Triton and Pluto due to volatile migration*. *Icarus*, **163**, 2, s. 63–71, 2002.
- [109] RUSSEL, C. T. aj.: *Dawn mission and operations*. Asteroids, Comets, Meteors 2005, editoři Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S., Fernandez, J. A., Cambridge: Cambridge University Press, 2006, s. 97–119.
- [110] SACKMANN, I. J., BOOTHROYD, A. I., KRAEMER, K. E.: *Our Sun. III. Present and future*. *Astrophys. J.*, **418**, s. 457–468, 1993.
- [111] SEIDELMAN, P. K. (editor): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. U. S. Naval Observatory, Washington, 1992.
- [112] SEPKOSKI, J. J.: *Ten years in the library: New data confirm paleontological patterns*. *Paleobiology*, **19**, s. 43–51, 1993.
- [113] SKÁLA, L.: *Úvod do kvantové mechaniky*. Praha: Academia, 2005. ISBN 8020013164.
- [114] SKÁLA, R.: *Impact process: An important geological phenomenon*. *Acta Mus. Nat-Pragae*, Ser. B., Hist. Nat., **52**, s. 111–156, 1996.
- [115] SPURNÝ, P.: *Fotografické sledování bolidů ve střední Evropě*. *Corona Pragensis*, **2**, 2001, (<http://praha.astro.cz/crp/0101a.phtml>).
- [116] *Stardust, JPL, NASA* [online]. [cit. 2006-06-01]. (<http://stardust.jpl.nasa.gov>).
- [117] STAUDACHER, T. aj.:  $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$  ages of rocks and glasses from the Noerdlinger Ries crater and the temperature history of impact breccias. *J. of Geophysics*, **51**, 1, s. 1–11, 1982.
- [118] STIX, M.: *The Sun. An Introduction*. Berlin: Springer-Verlag, 2002. ISBN 3540537961.
- [119] STUART, J. S.: *A Near-Earth asteroid population estimate from the LINEAR Survey*. *Science*, **294**, 5547, s. 1691–1693, 2001.
- [120] SUNDMAN, K. E.: *Memoire sur le probleme de trois corps*. *Acta Math.*, **36**, s. 105–179, 1912.
- [121] ŠEDIVÝ, P.: *Kapitoly ze speciální teorie relativity*. Hradec Králové: MAFY, 2003. ISBN 8086148653.
- [122] ŠIDLICHOVSKÝ, M., NESVORNÝ, D.: *Frequency modified Fourier transform and its applications to asteroids*. *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **65**, 1–2, s. 137–148, 1996.
- [123] TILLOTSON, J. H.: *Metallic equations of state for hypervelocity impact*. General Atomic Report GA-3216, 1962.
- [124] *The Ries/Steinheim impact crater field trip* [online]. [cit. 2001-1-1]. (<http://www-earthsciences.ucl.ac.uk/research/planetaryweb/field/knodle.htm>)
- [125] *The STScI Digitized Sky Survey* [online]. [cit. 2010-02-15]. ([http://archive.stsci.edu/cgi-bin/dss\\_form](http://archive.stsci.edu/cgi-bin/dss_form)).
- [126] TSIGANIS, K., GOMES, R., MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F.: *Origin of the orbital architecture of the giant planets of the solar system*. *Nature*, **435**, s. 459, 2004.
- [127] TUČEK, K.: *Meteority a jejich výskyty v Československu*. Praha: Academia, 1981.
- [128] VERNAZZA, J. E., AVRETT, E. H., LOESER, R., *Astrophys. J. Suppl.*, **45**, 635, 1981.
- [129] VOKROUHLICKÝ, D.: *A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments*. *Astron. Astrophys.*, **344**, s. 362–366, 1999.
- [130] VOKROUHLICKÝ, D., FARINELLA, P.: *Efficient delivery of meteorites to the Earth from a wide range of asteroid parent bodies*. *Nature*, **407**, 6804, 606, 2000.
- [131] VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D.: *Pairs of asteroids probably of a common origin*. *Astron. J.*, **136**, 1, s. 280–290, 2008.
- [132] VOKROUHLICKÝ, D., aj.: *Yarkovsky/YORP chronology of asteroid families*. *Icarus*, **182**, 1, s. 118–142, 2006.
- [133] WEIDENSCHILLING, S. J.: *Formation of Planetesimals and Accretion of the Terrestrial Planets*. *Space Science Reviews*, **92**, 1/2, s. 295–310, 2000.
- [134] *Wikipedia* [online]. [cit. 2008-04-10]. (<http://www.wikipedia.org/>).
- [135] WHIPPLE, F.: *A comet model. I. The acceleration of Comet Encke*. *Astrophys. J.*, **111**, s. 375–394, 1950.
- [136] WOLF, M. aj.: *Astronomická příručka*. Praha: Academia, 1992. ISBN 802000467X.
- [137] ZEĽDOVITCH, Ya. B. aj.: *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*. 1966. ISBN 0486420027. (<http://books.google.com>).
- [138] ZHONG, S., ZUBER, M. T.: *Degree-1 mantle convection and the crustal dichotomy on Mars*. *Earth and Planetary Science Letters*, **189**, s. 75–84, 2001.