Zavedení relativních souřadnic

pro systémy hmotných částic jsou vhodnější Jacobiho souřadnice, pro dynamiku hmotných částic kolem centra můžeme použít tzv. relativní souřadnice.

N-těles $\quad 0, 1 \ldots n-1$

vzhledem k počátku inerciálního systému máme absolutní souřadnice $\vec{\rho}_i$. Pro izolovaný systém interagujících těles máme $\sum m_i \vec{\rho}_i = 0$, $\sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$

z nichž vždy můžeme vyjádřit stavový vektor $(\vec{\rho}_0, \dot{\vec{\rho}}_0)$ referenčního tělesa.

Zavedeme nyní souřadnice s počátkem v tělese 0 [v astronomii často, např. geocentrické souřadnice pro dynamiku umělé družice].

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_0} \qquad i = 1, 2 \ldots n-1$$

původní pohybové rovnice $\ddot{\vec{\rho}}_i = -\sum_{j \neq i} G m_j \frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3}$, $\quad \vec{\Delta}_{ij} \equiv \vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j$, $\quad \vec{\Delta}_{i0} = \vec{r}_i$

tedy implikuje: $(i \geq 1)$

$$\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{\rho}}_i - \ddot{\vec{\rho}}_0 = -\sum_{j \neq i} G m_j \frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3} + \sum_{j \neq 0} G m_j \frac{\vec{\Delta}_{0j}}{\Delta_{0j}^3} =$$

$$= -\sum_{j \neq 0, i} G m_j \frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3} - \frac{G m_0}{\Delta_{i0}^3} \vec{\Delta}_{i0} - \sum_{j \neq 0, i} G m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} - \frac{G m_i}{\Delta_{i0}^3} \vec{\Delta}_{i0}$$

PS2

tedy

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_i + \frac{G(m_0+m_i)}{r_i^3}\vec{r}_i = -\sum_{j\neq 0,i} Gm_j\left[\frac{\vec{\Delta}_{ij}}{\Delta_{ij}^3} + \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\right]}$$

$\vec{\Delta}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

můžeme též zavést potenciál

$$\boxed{R_i = -\sum_{j\neq i} Gm_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j}{r_j^3}\right)}$$

a pak

$$\boxed{\ddot{\vec{r}}_i + G\frac{m_0+m_i}{r_i^3}\vec{r}_i = -\frac{\partial R_i}{\partial \vec{r}_i}}$$

tedy R_i vystupuje jako poruchový potenciál pohybu i-tého tělesa.

Nyní již víme, že (předp. $r_j > r_i$) $\cos S = \vec{r}_i\cdot\vec{r}_j / r_i r_j$

$$\frac{1}{\Delta_{ij}} = \frac{1}{r_j}\frac{1}{\sqrt{1 - 2(r_i/r_j)\cos S + (r_i/r_j)^2}} =$$

$$= \frac{1}{r_j}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{r_i}{r_j}\right)^n P_n(\cos S)$$

, tedy pro j-té působící těleso

$$R_{ij} = -\frac{Gm}{r_j}\left[1 + \cancel{\frac{r_i}{r_j}P_1(\cos S)} + \left(\frac{r_i}{r_j}\right)^2 P_2(\cos S) + \dots - \cancel{\frac{\vec{r}_i\cdot\vec{r}_j}{r_j^2}}\right]$$

nezávisí na $\vec{r}_i$

$$\boxed{= -\frac{Gm_j}{r_j}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{r_i}{r_j}\right)^2 P_n(\cos S)}$$

pro r_i malé se můžeme omezit na kvadrupólní část ($n=2$).