Poruchová teorie prvního řádu, sekulární perturbace

Podívejme se nyní proč použití oskulačních elementů a odpovídající formy rovnic poruchové teorie (Lagrangeovy či Gaussovy) je velmi výhodné pro odvození aproximativních řešení na rozdíl od např. použití kartézských souřadnic a rychlostí (byť vyžaduje náročný krok vyjádření poruchové funkce, či složek poruchové síly, jako funkci oskulačních elementů dráhy). Obojí se redukuje na úlohy kolem aproximativního řešení soustavy

$$\boxed{\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x)} \quad (*)$$

máme-li k dispozici řešení soustavy $\dot{x} = f(x)$: $x = x_0(t)$ a máme-li $\underline{\varepsilon \ll 1}$. Může to být např. kartézské vyjádření eliptického pohybu ($x \equiv \vec{X}, \vec{V}$) nebo fakt, že oskulační elementy jsou konstanty, až na l ($x = a, e, \ldots l$). Pokusme se sledovat iterační schéma řešení (*) v mocninách malého parametru ε:

$$\boxed{x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^n x_n + \ldots}$$

a dosadíme do (*):

$$\underline{\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \ldots} = \underbrace{f(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots)} + \varepsilon \underbrace{g(x_0 + \varepsilon x_1 + \ldots)}$$

předpokládáme, že jde rozvést Taylorův rozvoj v konvergentní řadu

$$\dot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_1 + \varepsilon^2 \dot{x}_2 + \dots = f(x_0) + f'(x_0)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots)$$
$$+ \tfrac{1}{2} f''(x_0)(\varepsilon x_1 + \dots)^2 + \dots$$
$$+ \varepsilon g(x_0) + \varepsilon g'(x_0)(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots) + \dots$$

Nyní předpokládáme, že tato rovnice musí platit pro libovolné malé ε (nejen pro určitou zvolenou hodnotu). Pak se musí člen u jednotlivých mocnin ε individuálně sobě rovnat!

$$\varepsilon^0: \quad \dot{x}_0 = f(x_0) \quad \checkmark \qquad (0)$$
$$\varepsilon^1: \quad \dot{x}_1 = f'(x_0)\, x_1 + g(x_0) \qquad (1)$$
$$\varepsilon^2: \quad \dot{x}_2 = f'(x_0)\, x_2 + \tfrac{1}{2} f''(x_0)\, x_1^2 + g'(x_0)\, x_1$$
$$\dots$$
$$\varepsilon^n: \quad \dot{x}_n = f'(x_0)\, x_n + \Psi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

obecně jde vždy o soustavu nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic s časově závislými koeficienty; kdyby jedna rovnice, šlo by alespoň v principu řešit metodou integračního faktoru, ale pro obecné N-rovnic/proměnných a dále ne tak jednoduché.

Rovnice v prvním řádu (1), na kterou se omezíme, má vůbec nějaké jednoduché řešení v Keplerových případech třeba eliptická dráha. Dají se použít ve speciálních případech, např. lineární perturbace kruhové dráhy.

V obecnosti lze však pohovořit, když x jsou oskulační elementy: P3

$$x = \begin{pmatrix} a \\ e \\ I \\ \vdots \\ l \end{pmatrix} ; \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

zástupně neb $n = n(a)$

Řešení řádu 0:

$$X_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ e_0 \\ \vdots \\ l_0 = n(a_0)t \end{bmatrix}$$

že $n^2(a_0)\, a_0^3 = GM = \text{konst.}$

(pozn. začínáme jednodušším případem, kdy je jedna „rychlá proměnná" v 0-řádu; obecně by x mohl obsahovat oskulační elementy třeba N-interagujících planet a pak N rychlých proměnných $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, l_0^{(3)} \ldots$ s frekvencemi $n_0^{(1)}, n_0^{(2)} \ldots$).

Pozn v (1) dlužno upozornit že „$f'(x_0)$" je tenzorová veličina

$$\dot{x}_{1i} = \left(\partial f_i(x_0)/\partial x_j\right)_0 x_{1j} + g_i(x_0) \qquad i = 1 \ldots N, \; j = 1 \ldots 4$$

z matice $M_{ij} = \partial f_i/\partial x_j$ je v oskulačních elementech nenulový jen jeden člen $\left(\partial n/\partial a\right)_0 = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\Big|_0$ neb n zástupně za veličinu $n^2 a^3 = GM$

Teď pro veličiny prvního řádu máme

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_{1,\varepsilon} &= g_\varepsilon(x_0) \qquad (\varepsilon = a, e, I, \Omega, \omega) \\ \dot{l}_1 &= \left(-\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0}\right) \cdot a_1 + g_n(x_0) \end{aligned}}$$

SEPAROVANÉ

Díky tomu, že (Ω, ω, l) mají charakter úhlů, většinou problém vede na tvar

$$g_\varepsilon(x_0) = \sum \Psi_\varepsilon(a_0, e_0, I_0) \cos(i\Omega_0 + j\omega_0 + k l_0(t))$$

$$g_n(x_0) = \sum \Psi_n(a_0, e_0, I_0) \cos(i\Omega_0 + j\omega_0 + k l_0)$$

[Lze to chápat jako multidimenzionální Fourierovy řady příslušné poruchové funkce g_ε, g_n]. Řešením pro $x_{1\varepsilon}$ je prosté integrace

$$x^P_{1\varepsilon}(t) = \sum_{k\neq 0} \frac{\Psi_\varepsilon(a_0, e_0, I_0)}{k n_0} \sin(i\Omega_0 + j\omega_0 + k l_0)$$

$$l^P_1(t) = +\frac{3}{2} \sum \frac{\Psi_a(a_0, e_0, I_0)}{k^2 n_0 a_0} \cos(i\Omega_0 + j\omega + k l_0) + \sum_{k\neq 0} \frac{\Psi_n(a_0, e_0, I_0)}{k n_0} \sin(i\Omega_0 + j\omega_0 + k l_0)$$

PERIODICKÁ ČÁST ŘEŠENÍ

$$x^S_{1\varepsilon}(t) = t \cdot \sum_{k\neq 0} \Psi_\varepsilon(a_0, e_0, I_0) \cos(i\Omega_0 + j\omega_0)$$

$$l^S_1(t) = -\frac{3}{4} \frac{n_0}{a_0} t^2 \sum_{k\neq 0} \Psi_a(a_0, e_0, I_0) \cos(i\Omega_0 + j\omega_0) + t \sum_{k=0} \Psi_n(a_0, e_0, I_0) \cos(i\Omega_0 + j\omega_0)$$

TZV. SEKULÁRNÍ ŘEŠENÍ

Všimněme si, že sekulární části řešení dostaneme tak, že z originálních g_ε při integrujeme l-závislou část, tedy

$$g \to \bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dl\, g,$$

u l pravá je to složitější

ale to nás zajímá především pro efemeridní účely a v mnohých úlohách ne. Všimněme si též, že jakkoli měly první členy tvaru z integrace tvar Fourierových rozvojů (řad), ve vyšších řádech už to budou řady složitější povahy: mocninné faktory t^k budou násobeny $\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(\omega t + \dots)$, tzv. Poissonovy řady. Vyšetřovat jejich konvergenci je matematicky nesnadné!

x

Další komplikací jsou tzv. rezonanční situace. Uvažme případ, kdy x vektor sestává z oskulačních elementů dvou těles (např. interagujících planet).

$$x_0 = \begin{bmatrix} a_0^{(1)} & , & a_0^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ l_0^{(1)} = n_0^{(1)} t & , & l_0^{(2)} = n_0^{(2)} t \end{bmatrix}$$

tj. v systému máme 2 rychlé proměnné $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}$.

Pak

$$g_\varepsilon(x_0) = \sum \Psi_\varepsilon(a_0^{(1)}, e_0^{(1)}, I_0^{(1)}; a_0^{(2)}, e_0^{(2)}, I_0^{(2)}) \cos\left[i_1\Omega_0^{(1)} + j_1\omega_0^{(1)} + k_1 l_0^{(1)} + i_2\Omega_0^{(2)} + j_2\omega_0^{(2)} + k_2 l_0^{(2)}\right]$$

a periodická část řešení $x^P_{1\varepsilon} = \int dt\, g_\varepsilon(x_0)$

$$x^P_{1\varepsilon} = \sum_{k_1,k_2 \neq 0} \frac{\Psi_\varepsilon(\dots)}{k_1 n_0^{(1)} + k_2 n_0^{(2)}} \sin\left[i_1\Omega_0^{(1)} + j_1\omega_0^{(1)} + k_1 l_0^{(1)} + i_2\Omega_0^{(2)} + j_2\omega_0^{(2)} + k_2 l_0^{(2)}\right]$$

$$l_1^{P(1)} = \frac{3}{2}\frac{n_0^{(1)}}{a_0^{(1)}} \sum_{k_1,k_2\neq 0} \frac{\Psi_c(\ )}{(k_1 n_0^{(1)}+k_2 n_0^{(2)})^2}\cos[\ldots]$$

$$+ \sum_{k_1,k_2\neq 0}\frac{\Psi_m(\ )}{(k_1 n_0^{(1)}+k_2 n_0^{(2)})}\sin[\ldots]$$

---

a podobně pro $l_1^{P(2)}$. Sekulární části by opět vycházely z členů, které mají $\underline{k_1 \,\&\, k_2 = 0}$ a vedly by na členy $\sim t$ a $\sim t_1^2 t$ pro střední anomálie.

Závažnější potenciální, i reálný, problém je existence dělitelů $(k_1 n_0^{(1)} + k_2 n_0^{(2)})$ a $(k_1 n_0^{(1)} + k_2 n_0^{(2)})^2$ již v prvním řádu (2'). V dalších řádech se objevují vyšší ~~různé~~ mocniny těchto dělitelů.

V případě samotné resonance (př. $3/1 = n_0^{(1)}/n_2^{(2)}$) je příslušný člen konstantní a nutno ho chápat jako přerozdělení konstantní části pravé strany pohybových rovnic. Blízko této resonance, ale též další, s $n_0^{(1)}/n_2^{(2)} \approx \frac{3\cdot 57+1}{57} \approx \frac{172}{57}$, ...

Ukazuje se však, že pro malé hodnoty excentricit a sklonů takové členy mají velmi malé Ψ_Σ amplitudy a v praxi je lze zanedbat.