Odvození Gaussových rovnic poruchového počtu

Naším základním úkolem je řešit pohybové rovnice typu

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{Gm}{r^3}\vec{r} = \vec{f}} \quad (1) \quad (\vec{f} = \vec{f}(\vec{r},\vec{v}))$$

kde $\vec{f}$ je rušivé zrychlení. Řešení (1) a priori neznáme. Známe, ale řešení homogenní rovnice

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{Gm}{r^3}\vec{r} = 0} \quad (2)$$

které vyjadřuje problém 2. těles. Matematicky

$$\vec{r} = a\left[\vec{P}(\cos u - e) + \eta\vec{Q}\sin u\right]$$

$$\vec{v} = na\left(\frac{a}{r}\right)\left[-\vec{P}\sin u + \eta\vec{Q}\cos u\right]; \quad \frac{a}{r} = (1 - e\cos u)^{-1}$$

$$(\vec{Q},\vec{P}) = fce(\omega,\Omega,I) \qquad u - e\sin u = l = n(t-t_0)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(t; c_a) = \vec{r}(c_a') \\ \vec{v} &= \vec{v}(t; c_a) = \vec{v}(c_a')\end{aligned}} \quad (3)$$

6 konstant

c_a' modifikované elementy, že $c_0' = l = n(t-t_0)$

sada parametrů c_a může být libovolná [počáteční podmínky $\vec{r}_0, \vec{v}_0$, nebo Keplerovy elementy, nebo Delaunayovy elementy …]. V řešení problému (2) jsou c_a konstanty.

Systém (1) lze též přepsat do tvaru

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r} + \vec{f}} \quad (1)'$$

Poruchový počet využívá metodu <u>variace konstant</u> známou z řešení diferenciálních rovnic. Ze (2) víme

$$\boxed{\frac{\partial \vec{r}(t,c_e)}{\partial t} = \vec{v} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{v}(t;c_e)}{\partial t} = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r}}$$

Když nyní budeme chtít zachovat tento tvar řešení (3) a aplikovat ho na systém (1), musíme připustit, že i konstanty c_e jsou funkce času $c_e = c_e(t)$, tzv. <u>oskulační elementy</u>.

Nyní tedy

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t,c_e) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_e}\frac{dc_e}{dt} = \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}(t;c_e) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial c_e}\frac{dc_e}{dt} = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r} + \vec{f}$$

z podmínek oskulace máme

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_e}\frac{dc_e}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial c_e}\cdot\frac{dc_e}{dt} &= \vec{f} \end{aligned}} \quad (4)$$

V principu bychom mohli (6) vyřešit vzhledem k $\dot{c}_e$ a získat kýžený tvar Gaussových rovnic. To by byla ale výpočetně náročná procedura. Místo k 5 z Gaussových rovnic dobereme výhodnější cestou, využitím <u>integrálů pohybu</u> Keplerovy úlohy 2. těles.

K tomu nám pomůže následující obecný teorém:

Nechť $\Psi = \Psi(\vec{r}, \vec{v}, t)$ je obecná funkce nezmíněných proměnných. Pak její časová změna podél řešení (1) či (1') je

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{①}$$

$$= \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right] + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_e} \frac{dc_e}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial c_e} \frac{dc_e}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \frac{Gm}{r^3} \vec{r} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial c_e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \frac{\partial \vec{v}}{\partial c_e}\right] \frac{dc_e}{dt}$$

$$= \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \frac{Gm}{r^3} \vec{r}\right\} + \frac{\partial \Psi}{\partial c_e} \frac{dc_e}{dt}$$

pokračování z bodu ① též možno dosazení z (1')

$$= \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v} + \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \left[-\frac{Gm}{r^3} \vec{r} + \vec{f}\right]$$

Porovnáním obou výrazů tedy

$$\boxed{\cancel{\frac{\partial \Psi}{\partial t} +} \frac{\partial \Psi}{\partial c_e} \frac{dc_e}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{f}} \quad (5)$$

~~kde parciální derivace $(\partial \Psi / \partial t)$ odpovídá explicitní závislosti Ψ na čase.~~

Samozřejmě, speciální volby $\Psi = \vec{r}$, $\Psi = \vec{v}$ odpovídají opět podmínkám oskulace výše. Zjednodušením, ale bude situace, kdy $\Psi(c_e)$ bude záviset jen na omezeném počtu oskulačních elementů c_e; např. víme, že $\Psi = E$ závisí jen na a, $\Psi = M$ závisí jen na a, e ...

a) $\Psi = E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{2a}$

$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{v}} = \vec{v}$ a tedy rovnice (5) má tvar

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{Gm}{2a}\right)\frac{da}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{f}}$$

a budeme z ní moci přímo vyjádřit vztah pro časovou derivaci oskulační velké poloosy a.

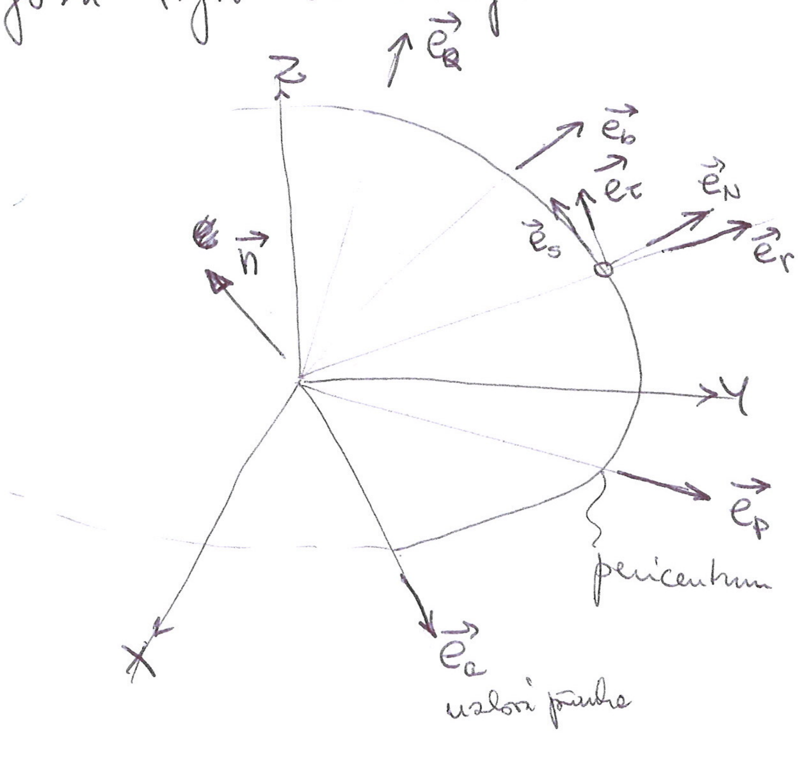
Povšimněme si, že tato rovnice má jasnou interpretaci: Časová změna oskulační energie je dána výkonem poruchových sil. Úpravou dává

$$\frac{\overset{n^2a^3}{Gm}}{2a^2}\frac{da}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{f}\,, \qquad \boxed{\frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2 a}\,\vec{v}\cdot\vec{f}}$$

V tomto okamžiku se musíme rozhodnout pro nějakou formu dekompozice poruchového zrychlení $\vec{f}$ do tří složek. Často viděné jsou tyto varianty:

- (f_r, f_τ, f_n) rozklad do triády $(\vec{e}_r, \vec{e}_\tau, \vec{n})$
- (f_s, f_N, f_n) rozklad do triády $(\vec{e}_s, \vec{e}_N, \vec{n})$
- (f_P, f_Q, f_n) rozklad do triády $(\vec{e}_P, \vec{e}_Q, \vec{n})$

⋮



nyní $\quad \vec{v} = \frac{na}{\eta}\left[-\sin v\, \vec{e}_P + (e+\cos v)\,\vec{e}_Q\right]$

vztah jednotlivých triád jednotkových vektorů je

$$\begin{pmatrix}\vec{e}_r\\ \vec{e}_\tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos v, & \sin v\\ -\sin v, & \cos v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_P\\ \vec{e}_Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega+v), & \sin(\omega+v)\\ -\sin(\omega+v), & \cos(\omega+v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_a\\ \vec{e}_b\end{pmatrix}$$

[rem. zde trochu symbolický zápis neb rotační matice má být spíše $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$]

je tedy také

$$\vec{v} = \frac{na}{\eta}\left[(1+e\cos v)\,\vec{e}_\tau + e\sin v\,\vec{e}_r\right] = \frac{na}{\eta}\left[\frac{p}{r}\vec{e}_\tau + e\sin v\,\vec{e}_r\right]$$

$(p = a(1-e^2))$

lze tedy napsat

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2 a}\frac{na}{\eta}\left[\frac{p}{r}(\vec{f}\cdot\vec{e}_\tau) + e\sin v\,(\vec{f}\cdot\vec{e}_r)\right] =$$

$$= \frac{2}{n\eta}\left[\frac{p}{r} f_\tau + e\sin v\, f_R\right] \approx \frac{2}{n} f_\tau + O(e)$$

odporová složka síly má tedy zásadní vliv na zmenšování velké poloosy; v $(\vec{e}_s, \vec{e}_N, \vec{e}_W)$ triádě to je ještě explicitnější $\quad \vec{v} = v\,\vec{e}_s$ dle definice

$$\boxed{\frac{da}{dt} = \frac{2}{n^2 a} v f_s}$$

b) nyní vezmeme $\Psi = M^2 = (\vec r\times\vec v)\cdot(\vec r\times\vec v) = \mu a(1-e^2)$ $\quad(\mu = GM)$

$$\vec f\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\vec v} = 2(\vec r\times\vec v)\cdot(\vec r\times\vec f) = 2\vec M\cdot(\vec r\times\vec f) = 2Mr\,\vec n\cdot(\vec e_r\times\vec f) =$$

$$= 2Mr\,\vec f\cdot(\underbrace{\vec n\times\vec e_r}_{\vec e_\tau}) = 2Mr\,\vec f\cdot\vec e_\tau = 2Mrf_\tau$$

zároveň $$\frac{\partial\Psi}{\partial c_a}\frac{dc_a}{dt} = \mu\eta^2\frac{da}{dt} - 2\mu a e\frac{de}{dt}\ (= 2Mrf_\tau)$$

odkud již s pomocí da/dt máme

$$\boxed{\frac{de}{dt} = \frac{\eta}{nae}\left[\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)f_\tau + e\sin v\, f_R\right]}$$

c) nyní vezmeme $\vec\Psi = \vec n$ [identita pro Ψ platí pro jednotlivé složky, takže lze psát $\frac{\partial\vec\Psi}{\partial c_a}\frac{dc_a}{dt} = \frac{\partial\vec\Psi}{\partial\vec v}\cdot\vec f$]

$$\vec n = \begin{bmatrix}\sin i\sin\Omega\\ -\sin i\cos\Omega\\ \cos i\end{bmatrix} = \frac{\vec r\times\vec v}{|\vec r\times\vec v|} = \frac{\vec r\times\vec v}{M}$$

nejdříve určíme

$$\vec f\cdot\frac{\partial\vec\Psi}{\partial\vec v} = \vec f\cdot\frac{\partial}{\partial\vec v}\vec n = \vec f\cdot\frac{\partial}{\partial\vec v}\frac{\vec r\times\vec v}{|\vec r\times\vec v|} =$$

$$= \frac{1}{M^2}\left[M(\vec r\times\vec f) - (\vec r\times\vec v)\frac{1}{\cancel{2}M}\cancel{2}(\vec r\times\vec v)\cdot(\vec r\times\vec f)\right] =$$

$$= \frac{1}{M}\left[(\vec r\times\vec f) - \vec n\;\vec n\cdot(\vec r\times\vec f)\right]$$

$\vec f = f_r\vec e_r + f_\tau\vec e_\tau + f_n\vec n$

nyní $$\vec r\times\vec f = f_\tau(\vec r\times\vec e_\tau) + f_n(\vec r\times\vec n) = rf_\tau\vec n - rf_n\vec e_\tau$$

$$\vec n\cdot(\vec r\times\vec f) = rf_\tau$$

$$\vec r\times\vec f - \vec n\,[\vec n\cdot(\vec r\times\vec f)] = \cancel{rf_\tau\vec n} - rf_n\vec e_\tau - \cancel{rf_\tau\vec n} = -rf_n\vec e_\tau$$

$$\cancel{\frac{d\vec{n}}{dt}} \quad \vec{f}\cdot\frac{\partial\vec{\Psi}}{\partial\vec{v}} = -\frac{rf_n}{M}\vec{e}_\tau$$

$$\left(\frac{d\vec{n}}{dt}=\right)\boxed{\frac{\partial\vec{n}}{\partial c_a}\frac{dc_a}{dt} = -\frac{rf_n}{M}\vec{e}_\tau} \quad (*)$$

a ještě využijeme

$$\vec{e}_a = \begin{bmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_\tau = -\sin(\omega+v)\,\vec{e}_a + \cos(\omega+v)\,\vec{e}_b$$

$$\vec{e}_b = \begin{bmatrix}-\cos i\sin\Omega\\ \cos i\cos\Omega\\ \sin i\end{bmatrix}$$

vezměme nyní třetí komponentu z (*) $n_z = \cos i$

$$\cancel{+\sin i}\,\frac{di}{dt} = +\frac{rf_n}{M}\cancel{\sin i}\cos(\omega+v) \qquad (M = na^2\eta)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} = \frac{f_n}{na\eta}\left(\frac{r}{a}\right)\cos(\omega+v)}$$

Nyní pro x- a y-komponenty (*) máme

$$\cos i\sin\Omega\frac{di}{dt} + \sin i\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt} = +\frac{rf_n}{M}\left[+\cos\Omega\sin(\omega+v) + \sin\Omega\cos i\cos(\omega+v)\right] \quad /\cdot\cos\Omega$$

$$-\cos i\cos\Omega\frac{di}{dt} + \sin i\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt} = \frac{rf_n}{M}\left[\sin\Omega\sin(\omega+v) - \cos\Omega\cos i\cos(\omega+v)\right] \quad /\cdot\sin\Omega$$

a sečtením

$$\sin i\frac{d\Omega}{dt} = \frac{rf_n}{M}\sin(\omega+v)$$

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \frac{f_n}{na\eta\sin i}\left(\frac{r}{a}\right)\sin(\omega+v)}$$

d) pro odvození $d\omega/dt$ použijeme

$$\vec{\Psi} = \vec{K} = \frac{\vec{v}\times\vec{M}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = e\,\vec{e}_p \qquad \mu = GM, \quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{v}$$

pomocné výpočty:

- $$\vec{e}_p = \cos\omega\,\vec{e}_a + \sin\omega\,\vec{e}_b \qquad \vec{e}_a = \begin{pmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{pmatrix},\ \vec{e}_b = \begin{pmatrix}-\cos i\sin\Omega\\ \cos i\cos\Omega\\ \sin i\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{e}_a}{\partial\Omega} = \begin{pmatrix}-\sin\Omega\\ \cos\Omega\\ 0\end{pmatrix} = \cos i\,\vec{e}_b - \sin i\,\vec{n} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\ -\sin i\cos\Omega\\ \cos i\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{e}_a}{\partial i} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{e}_b}{\partial\Omega} = -\begin{bmatrix}\cos i\cos\Omega\\ \cos i\sin\Omega\\ 0\end{bmatrix} = -\cos i\,\vec{e}_a$$

$$\frac{\partial\vec{e}_b}{\partial i} = \begin{bmatrix}\sin i\sin\Omega\\ -\sin i\cos\Omega\\ \cos i\end{bmatrix} = \vec{n}$$

tedy

$$\frac{\partial\vec{K}}{\partial c_e}\frac{dc_e}{dt} = \frac{\partial\vec{K}}{\partial e}\dot{e} + \frac{\partial\vec{K}}{\partial i}\frac{di}{dt} + \frac{\partial\vec{K}}{\partial\Omega}\dot{\Omega} + \frac{\partial\vec{K}}{\partial\omega}\dot{\omega} =$$

$$= \vec{e}_p\dot{e} + e\frac{di}{dt}\sin\omega\,\vec{n} + e\dot{\Omega}\left[\cos\omega(\cos i\,\vec{e}_b - \sin i\,\vec{n}) - \sin\omega\cos i\,\vec{e}_a\right]$$

$$+ e\dot{\omega}\left[-\sin\omega\,\vec{e}_a + \cos\omega\,\vec{e}_b\right] =$$

$$= \vec{e}_p\dot{e} + \vec{n}e\left[\frac{di}{dt}\sin\omega - \dot{\Omega}\sin i\cos\omega\right] +$$

$$+ e(\dot{\omega} + \cos i\,\dot{\Omega})\underbrace{\left[-\sin\omega\,\vec{e}_a + \cos\omega\,\vec{e}_b\right]}_{\vec{e}_Q} =$$

$$= \vec{e}_p\dot{e} + \vec{n}e\left[\frac{di}{dt}\sin\omega - \dot{\Omega}\sin i\cos\omega\right] + \vec{e}_Q e(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i)$$

připomeňme, že $(\vec{e}_p, \vec{e}_Q, \vec{n})$ tvoří triádu na sebe kolmých a jednotkových vektorů; tedy

$$e(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i) = \vec{e}_Q\cdot\frac{\partial\vec{K}}{\partial c_e}\frac{dc_e}{dt} = \vec{e}_Q\cdot\frac{\partial\vec{K}}{\partial\vec{v}}\cdot\vec{f}$$

potřebujeme tedy spočíst $\vec{e}_Q \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{f}$;

nejdříve :

$$\vec{K} = \frac{\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v})}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = \underline{\frac{1}{\mu} \left\{ \vec{r} v^2 - \vec{v} (\vec{r} \cdot \vec{v}) - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right\}}$$

tedy

$$\underline{\frac{\partial \vec{K}}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{f}} = \underline{\frac{1}{\mu} \left\{ 2 \vec{r} (\vec{v} \cdot \vec{f}) - \vec{f} (\vec{r} \cdot \vec{v}) - \vec{v} (\vec{r} \cdot \vec{f}) \right\}}$$

a potřebujeme spočíst složku ↑ dle $\vec{e}_Q$. Za tím účelem připomeneme

$$\vec{r} = r \left[\cos v \, \vec{e}_P + \sin v \, \vec{e}_Q \right]$$

$$\vec{v} = \frac{na}{\eta} \left[-\sin v \, \vec{e}_P + (e + \cos v) \vec{e}_Q \right]$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = n a^2 \frac{e}{\eta} \left(\frac{r}{a} \right) \sin v \text{ ; tedy}$$

$$\underline{\vec{e}_Q \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{f}} = \frac{1}{\mu} \left\{ 2 r \sin v \frac{na}{\eta} \left[-\sin v \, f_P + (e + \cos v) f_Q \right] - \right.$$
$$- f_Q n a^2 \frac{e}{\eta} \left(\frac{r}{a} \right) \sin v -$$
$$\left. - \frac{na}{\eta} (e + \cos v) r \left[\cos v \, f_P + \sin v \, f_Q \right] \right\} =$$

$$= \ldots = \underline{- \frac{\eta}{na} f_P + \frac{1}{na\eta} \left(\frac{r}{a} \right) \sin v \, f_T}$$

a použitím $f_P = f_R \cos v - f_T \sin v$, pak finálně

$$p = a\eta^2$$

$$\vec{e}_Q \cdot \frac{\partial \vec{K}}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{f} = \underline{\frac{\eta}{na} \left\{ - f_R \cos v + f_T \sin v \left[1 + \frac{r}{p} \right] \right\}}$$

$$\boxed{\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i = \frac{\eta}{nae} \left\{ - f_R \cos v + f_T \left[1 + \frac{r}{p} \right] \sin v \right\}}$$