(A1

Uvažme efekt řídké atmosféry (volná dráha pohybu molekul ve vnější atmosféře $\simeq 100$ km) na malou družici. Pak se uplatňuje formule odporu prostředí odvozená v kinetické teorii

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho\, v_R \vec{v}_R$$

2 podmínky:

$C_T^2 \simeq \frac{2kT}{\bar{\mu}}$, $T \simeq 10^3$ K

1) $Kn = \ell/D \gg 1$ (střední volná dráha molekul, D – velikost druž.)

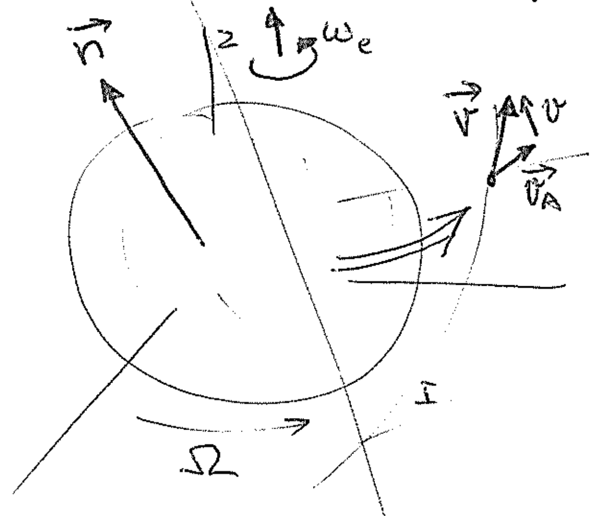
2) $v_R/c_T \gg 1$, $M =$ rychlost / tepelná rychlost mol.

$C \simeq 1$-2 (koeficient), S příčný průřez, m hmota, ρ hustota prostředí, $\vec{v}_R$ rychlost družice vůči klidovému systému atmosféry

$$\vec{v}_A \simeq \Delta\, \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \Delta \sim 1.0 - 1.2 \; (= \Delta(h))$$

$$|v_A| \lessapprox 500 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\vec{v}_R = \vec{v} - \Delta\,\vec{\omega}\times\vec{r}}$$



pro $^{14}_{7}N$ je $C_T \simeq 1$ km/s

$$v_R^2 \simeq v^2 - 2\Delta\,\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

$$= v^2 - 2\Delta\,\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{v}) = v^2 - 2\Delta h\,\vec{\omega}\cdot\vec{n} \; (\omega_e \cos i) =$$

$$= v^2 - 2\Delta\sqrt{GMa(1-e^2)}\cos i\,\omega_e = v^2 - 2\Delta n a^2 \eta \cos i\,\omega_e$$

$$= v^2\left[1 - 2\Delta\eta\,\omega_e \cos i\,\frac{na^2}{v^2}\right]$$

$$v_R \simeq v\left[1 - \Delta\eta\cos i\,\frac{na\cdot\omega_e a}{v^2}\right]$$

$$\boxed{v_R\vec{v}_R \simeq v\left[1 - \Delta\eta\cos i\,\frac{na^2\omega_e}{v^2}\right]\vec{v} - \Delta v\,(\vec{\omega}\times\vec{r})}$$

$$\vec{f} = -\frac{1}{2}\frac{CS}{m}\rho\left\{v\vec{v}\left[1 - \Delta\eta\cos i\,\frac{na^2\omega_e}{v^2}\right] - \Delta v\,(\vec{\omega}\times\vec{r})\right\}$$

(a) pro vývoj a a e zanedbáme Λ-členy a vezmeme jen

$$\boxed{\vec f = -\frac12 \frac{CS}{m}\rho v\vec v \equiv -\frac12\gamma\rho v\vec v} \qquad \gamma \equiv \frac{CS}{m}$$

$$\boxed{\dot a = \frac{2}{n^2a}\vec v\cdot\vec f = +\frac{\cancel{2}}{n^2a}\frac{1}{\cancel{2}}\gamma\rho v^3 = -\gamma\rho\frac{v^3}{n^2a}}$$

z obecné rovnice $\boxed{\eta^2\dot a - 2ae\dot e = \frac{2na^2\eta}{n^2a^3}\, r f_\tau}$ (66)

$2M r f_\tau$; $n^2a^3 = \mu$; $h = na^2\eta$

dostaneme $r f_\tau = -\frac12\gamma\rho v(r v_\tau)$ po krátké úpravě

$$\boxed{2e\dot e = \gamma\rho\eta^2 v\left[1-\frac{v^2}{n^2a^2}\right]}$$

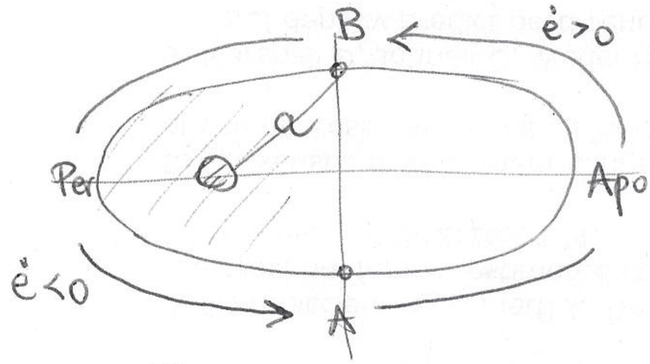
$$\frac{v}{na} = \frac{1}{\eta}\left[1+e^2+2e\cos f\right]^{1/2}$$

$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \to \frac{v^2}{n^2a^2} = 2\frac{a}{r} - 1$, tj.

$$\eta^2\left[1-\frac{v^2}{n^2a^2}\right] = \eta^2\left[2-2\frac{a}{r}\right] = \cancel{2-2e^2} \, 2\left[\cancel{1}-e^2-\cancel{1}-e\cos f\right] =$$

$= -2e\left[e+\cos f\right]$, takže celkově

$$\boxed{\dot e = -\gamma\rho v(e+\cos f)} \quad \boxed{\dot a = -\gamma\rho\frac{v^3}{n^2a}} < 0$$



$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$; $\cos f = -e$

neb $r(\cos f = -e) = a$

celkově tedy při jednom oběhu nutně $\dot e < 0$

(A3

máme $\cos f = \dfrac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$, $e + \cos f = \dfrac{\eta^2 \cos u}{1 - e\cos u}$

$$\frac{v}{na} = \sqrt{2\frac{a}{r} - 1} = \sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}} \; ; \; \frac{a}{r} = \frac{1}{1-e\cos u}$$

a z Keplerovy rovnice $du\,(1 - e\cos u) = d\ell = n\,dt$

je další čisto vidlaní fce předchozích rovnic

$$\boxed{\frac{da}{du} = -\gamma a^2 \rho\,(1+e\cos u)\sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}}$$

$$\boxed{\frac{de}{du} = -\gamma a^2 \rho\, \eta^2 \sqrt{\frac{1+e\cos u}{1-e\cos u}}\,\cos u}$$

pro další výpočty, kopie odlišné

$$\Delta a\Big|_{1\,\text{oběh}} \simeq \int_{-\pi}^{\pi} du\,(da/du) = \ldots$$

lze postoupit jen za předpokladu na $\rho(h)$. Pro vnější atmosféru platí v dobré aproximaci

$\rho \sim \rho_0\, e^{-h/H}$ $\quad$ $H \simeq 50\text{-}80\,\text{km}$ v tímto zbytečném termosféře $(h \gtrsim 200\,\text{km})$

$\Delta a|_{1\,\text{oběh}}$, $\Delta e|_{1\,\text{oběh}}$ lze vyjádřit pomocí Besselových fcí ...

B) Nalož $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{f_n}{na\eta}\left(\dfrac{r}{a}\right)\cos(\omega+o)$ a $f_n = 0$

je nutné $di/dt \sim O(\Delta)$; podíváme se na první řád ...

$$\vec{f}_1 = +\frac{1}{2}\gamma\Delta\rho v\,\vec{w}\times\vec{r}\,, \text{ tj.}$$

$$f_{1,n} = \frac{1}{2}\gamma\Delta\rho v\,\vec{n}\cdot(\vec{w}\times\vec{r}) = -\frac{1}{2}\gamma\Delta\rho v\,\vec{w}\cdot\overbrace{(\vec{n}\times\vec{r})}^{r\vec{e}_\tau}$$

$$e_\tau = \cos(\omega+v)\underset{(\sin i)}{\vec{b}} + \dots \vec{a}$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma\Delta\rho v r w_e \sin i \cos(\omega+v)$$

tedy
$$\boxed{\frac{di}{dt} = \underbrace{-\frac{1}{2}\gamma\Delta\rho w_e \sin i\,\frac{vr}{na\eta}\left(\frac{r}{a}\right)\cos^2(\omega+v)}_{<0}}$$

tedy pro nejnižší fáze letu ($\Delta \sim 1.1-1.2$) je $\Delta i|_{1\,\text{oběh}} < 0$

během několika posledních oběhů cca $\simeq 0.5-1^\circ$.