Podobně by bylo možno určit hlavní část Hamiltoniánu pro $q^{(2)} << q^{(1)}$ .

Neporušený Hamiltonián (8.38) umožňuje zavést kanonické Delaunayovy proměnné pro oba nezávislé problémy dvou těles. Podle (2.131) zavedeme

$$(8.40)\quad L_1 = m_1' \sqrt{G_0(m_0+m_1)\, a_1} \qquad L_2 = m_2' \sqrt{G_0(m_0+m_1+m_2)\, a_2}$$

$$G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} \qquad G_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2}$$

$$H_1 = G_1 \cos I_1 \qquad H_2 = G_2 \cos I_2 \quad .$$

Potom

$$\mathcal{H}_0 = - \frac{G_0^2 (m_0+m_1)^2 m_1'^3}{2L_1^2} - \frac{G_0^2 (m_0+m_1+m_2)^2}{2L_2^2}$$

Při řešení problému třech těles bychom mohli postupovat např. tak, že poruchu $U$ bychom vyjádřili v Delaunayových proměnných a použili Von Zeipelovu metodu. Samozřejmě otázkou zůstává konvergence takového postupu. Prakticky bychom se vždy omezili na členy do určitého stupně v malém parametru $= \min\left(\frac{m_1}{m_0}, \frac{m_2}{m_0}\right)$.

## 9. Omezený kruhový problém tří těles

Omezeným problémem tří těles nazýváme takový problém tří těles, kde hmotnost jednoho z těles je velmi malá vzhledem ke hmotnostem každého tělesa ze zbývající dvojice. Dvojici hmotnějších těles nazýváme primáry a předpokládáme, že jejich pohyb není třetím tělesem ovlivněn. Označme hmostnost primárů $m_1$, $m_2$, hmotnost testovacího tělesa $m$. Tento model může dobře

popisovat pohyb asteroid v systému Slunce-Jupiter. Protože průměry asteroid jsou řádově ~ 100 km, je jejich působení na systém Slunce-Jupiter zanedbatelné. Asteroidy se pohybují převážně v pásu mezi Marsem a Jupiterem, kromě několika vyjímečných tzv. AAAO (Apollo-Amor-Aten objects). Tedy i působení ostatních na jejich dráhy je zanedbatelné. Odhad průměru asteroidy je jen řádový, největší Ceres má průměr 1024,7 km, Pallas 583 km, Juno 248 km, Vesta 555 km. Tyto čtyři asteroidy byly hlavně díky své velikosti objeveny již počátkem 19. století (v letech 1801-1807). Průměry dalších asteroid jen málokdy přesahují 200 km a u menších později objevených objektů jsou průměry většinou pod 100 km. Do dnešní doby bylo spolehlivě registrováno a očíslováno 4040 asteroid (r.1989).

Jinou možnou aplikací omezeného problému je popis pohybu komet, jak uvidíme např. u Tisserandova kriteria.

Jestliže je pohyb primárů eliptický, mluvíme o eliptickém omezeném problému. Excentricita Jupitera je zhruba e=0,048, proto v řadě případů stačí uvažovat omezený kruhový problém, kdy je tedy oběh primárně kruhový. Jsou-li počáteční souřadnice a rychlosti bodu m v rovině oběhu primárů, zůstává tento bod stále v této rovině a pak mluvíme o omezeném rovinném problému (eliptickém nebo kruhovém).

## 9.1 Formulace kruhového omezeného problému v inerciální soustavě

Položme střed inerciální soustavy [T; X,Y,Z] do těžiště T bodů $m_1$, $m_2$ tak, aby tyto body ležely stále v rovině X,Y. Buďte $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ (i=1,2) souřadnice bodu $m_i$ a X,Y,Z

souřadnice bodu $m$. Zřejmě $Z_i=0$. Lagrangián problému je potom

$$(9.1)\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + G_0\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right) \quad ,$$

kde

$$(9.2)\quad R_1 = \left[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2\right]^{1/2}$$

$$R_2 = \left[(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + Z^2\right]^{1/2} \quad .$$

Označme dále $D$ konstantní vzdálenost primárů. Střední pohyb $n$ primárů je dán třetím Keplerovým zákonem

$$(9.3)\qquad n^2\, D^3 = G_0(m_1 + m_2) \quad .$$

Úkolem je určit časovou závislost $X$, $Y$, $Z$. Časová závislost $X_i$, $Y_i$, $Z_i$ je známa. Zvolíme-li v čase $t=0$ osu $X$ procházející body $m_1$, $m_2$ tak, že $m_1$ je v její kladné polovině, platí

$$(9.4)\quad X_1 = \frac{D}{m_1+m_2}\, m_2 \cos n\,t \quad , \quad Y_1 = \frac{D}{m_1+m_2}\, m_2 \sin n\,t$$

$$X_2 = -\frac{D}{m_1+m_2}\, m_1 \cos n\,t \quad , \quad Y_2 = -\frac{D}{m_1+m_2}\, m_1 \sin n\,t \quad .$$

Díky (9.4) je zřejmé, že Lagrangián závisí na čase a tedy odpovídající Hamiltonián není integrálem pohybu. Celková energie částice $m$ (vydělená hmotností $m$)

$$H = \frac{1}{2}\,(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - G\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right)$$

se tedy nezachovává. Tento závěr nemůže překvapit, neboť částice $m$ může získávat energii od primárů, jejich energie působí jako

prakticky nekonečná zásobárna.

Lagrangeovy rovnice druhého druhu dávají

$$(9.5)\quad \ddot{X} = - G_0 \left( m_1 \frac{X - B\cos nt}{R_1^3} + m_2 \frac{X + A\cos nt}{R_2^3} \right),$$

$$\ddot{Y} = - G_0 \left( m_1 \frac{Y - B\sin nt}{R_1^3} + m_2 \frac{Y + A\sin nt}{R_2^3} \right),$$

$$\ddot{Z} = - G_0 \left( m_1 \frac{Z}{R_1^3} + m_2 \frac{Z}{R_2^3} \right),$$

kde

$$(9.6)\quad A = \frac{Dm_1}{m_1+m_2}, \qquad B = \frac{Dm_2}{m_1+m_2},$$

## 9.2 Omezený kruhový problém v synodickém systému

V pevné soustavě závisí výraz pro potenciální energii

$$(9.7)\quad U = - G_0 \left( \frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} \right)$$

díky (9.2) a (9.4) na čase, což je vlastně důvodem neexistence integrálu energie. Zavedeme-li však otáčející se souřadnicovou soustavu $[T; x,y,z]$ tak, aby body $m_1$ i $m_2$ ležely stále na ose $x$ a osa $z$ splývala se $Z$, máme pro transformační rovnice

$$(9.8)\quad X = x\cos nt - y\sin nt,$$

$$Y = x\sin nt + y\cos nt,$$

potom $R_1$, $R_2$ v (9.7) nezávisí na čase

$$(9.9)\qquad R_1 = \left[(x - B)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} ,$$

$$R_2 = \left[(x + A)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2} .$$

Kinetická energie v nových souřadnicích je

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2) = \tfrac{1}{2}(\dot{x}\cos nt - \dot{y}\sin nt - xn\sin nt - y\,n\cos nt)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\dot{x}\sin nt + \dot{y}\cos nt - xn\cos nt - yn\sin nt)^2 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\dot{z}^2 \Rightarrow$$

$$(9.10)\qquad T = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \overbrace{\tfrac{1}{2}n^2(x^2 + y^2)}^{\text{„odstředivý člen“}} - n(\dot{x}y - \dot{y}x) .$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu potom dávají

$$(9.11)\qquad \ddot{x} = n^2x + 2n\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial x} ,$$

$$\ddot{y} = n^2y - 2n\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y} ,$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} ,$$

Protože v těchto synodických souřadnicích nezávisí Lagrangián na čase, bude odpovídající Hamiltonián zachován. Všimněte si ovšem, že nejde o zákon zachování energie, protože nový Hamiltonián po transformaci k synodickým souřadnicím liší se od starého (který byl ekvivalentní energii, ale nezachovával se) o časovou derivaci vytvořující funkce uvedené transformace. Protože transformace k synodickým souřadnicím závisí na čase, je tato časová derivace vytvořující funkce nenulová. Umíme tedy nalézt jeden integrál. Je možno provést obvyklý přechod k Hamiltonovské for-

mulaci

$$(9.12)\qquad p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - ny$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + nx$$

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

Hamiltonova funkce v synodických souřadnicích a odpovídajících impulsech je pak podle obecného vzorce (1.6)

$$(9.13)\quad \mathcal{H} = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \tfrac{1}{2}n^2(x^2+y^2) +$$

$$+ n(\dot{x}y-\dot{y}x) + U$$

dosazením z (9.12) za $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ vyjádříme teprve $\mathcal{H}$ tak, jak je potřeba pomocí souřadnic a impulsů

$$(9.14)\quad \mathcal{H} = \tfrac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + n(p_xy-p_yx) + U \quad .$$

Díky nezávislosti $\mathcal{H}$ na $t$ a Hamiltonovým kanonickým rovnicím je $\mathcal{H}$ integrálem pohybu. Tento integrál

$$\mathcal{H} = \text{konst.}$$

lze ovšem vyjádřit nejen jako funkci $x,y,z,p_x,p_y,p_z$ , ale i jako funkci $x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}$. Potom

$$(9.15)\quad \mathcal{H} = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \tfrac{1}{2}n^2(x^2+y^2) + U = \text{konst.}$$

Integrál (9.15) bylo ovšem možno okamžitě získat z pohybových rovnic (9.11) vynásobením první $\dot{x}$ , druhé $\dot{y}$ , třetí $\dot{z}$ a sečtením.

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = n^2(x\dot{x} + y\dot{y}) - \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z},$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = n^2\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{dU}{dt} .$$

Po integraci

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{1}{2}n^2(x^2+y^2) + U = \text{konst.}$$

Definujeme-li

(9.16) $$W = -U + \frac{1}{2}n^2(x^2+y^2) ,$$

můžeme získaný integrál zapsat

(9.17) $$2W - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = C .$$

Tento integrál nazýváme Jacobiho integrálem a konstantu $C$ Jacobiho konstantou.

## 9.3 Bezrozměrné souřadnice

V literatuře je většinou kruhový omezený problém formulován v bezrozměrných souřadnicích, ve kterých jsou vzdálenost primárů $D$, gravitační konstanta $G_0$, střední rychlost $n$ i součet hmotností $m_1+m_2$ rovny jedné. Rovnice (9.11) jsou fyzikální rovnice, kde $x,y,z$ udáváme v metrech $[m]$, $\dot{x},\dot{y}$ v metrech za sekundu $[m/s]$ atd. Gravitační konstanta $G_0 = 6{,}670 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2/kg^2$. Zvolíme-li bezrozměrné souřadnice $\xi, \eta, \zeta$

(9.18) $$\xi = \frac{x}{D} , \eta = \frac{y}{D} , \zeta = \frac{z}{D}$$

odpovídá to tomu, že měřené délky udáváme v jednotkách $D[m]$. Podobně hmotnosti budeme udávat bezrozměrnými čísly vyjadřujícími kolikrát je vyšetřovaná hmotnost větší než hmotnost $m_1+m_2$ $[kg]$.

(9.19) $\mu_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}$ , $\mu_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ .

Součet hmotností obou těles v bezrozměrných jednotkách je $\mu_1 + \mu_2 = 1$ . Čas budeme udávat opět bezrozměrným číslem $\tau$ , které udává kolikrát je čas $t$ v sekundách větší než doba $1/n$ [s] , za kterou se primáry protočí o jeden radián

(9.20) $\tau = \frac{t}{1/n} = n\,t$ .

Jeden obch proběhne za $2\pi/n$ [s], čemuž odpovídá $\tau = 2\pi$ . Za $\tau = 2\pi$ se spojnice primárů otočí o $2\pi$ a úhlová rychlost v bezrozměrných veličinách je $\nu = 1$. Zavedeme-li $\xi, \eta, \zeta, \tau$, $\mu_1, \mu_2$ místo $x,y,z,t,m_1,m_2$ pomocí (9.18), (9.19) a (9.20), dostaneme postupně

$$\frac{d^2}{dt^2} x = n^2 D \frac{d^2}{d\tau^2} \xi \quad , \quad \frac{d^2}{dt^2} y = n^2 D \frac{d^2}{d\tau^2} \eta \, , \quad \frac{d^2}{dt^2} z = n^2 D \frac{d^2}{d\tau^2} \zeta$$

$$n^2 x + 2n\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial x} = n^2 D \xi + 2n^2 D \frac{d\eta}{d\tau} - \frac{1}{D} \frac{\partial U}{\partial \xi} =$$

$$= n^2 D \left[ \xi + 2 \frac{d\eta}{d\tau} - \frac{1}{n^2 D^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right]$$

Zavedeme-li tedy

(9.21) $\mathcal{U} = \frac{1}{n^2 D^2} U$ ,

dostaneme

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\,\xi = \xi + 2\frac{d\eta}{d\tau} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi}\,, \tag{9.22}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\,\eta = \eta - 2\frac{d\xi}{d\tau} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \eta}\,,$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\,\xi = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \xi}\,.$$

Definujeme-li

$$\varrho_1 = \frac{R_1}{D} = \left[(\xi - \eta_2)^2 + \eta^2 + \xi^2\right]^{1/2}\,, \tag{9.23}$$

$$\varrho_2 = \frac{R_2}{D} \left[(\xi + \eta_1)^2 + \eta^2 + \xi^2\right]^{1/2}\,,$$

potom $\mathcal{U}$ můžeme zapsat

$$\mathcal{U} = +\frac{1}{n^2D^2}\,U = -\frac{1}{n^2D^2}\,G_0\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right) = -\frac{m_1+m_2}{n^2D^3}\,G_0\left(\frac{\mu_1}{\varrho_1}, \frac{\mu_2}{\varrho_2}\right).$$

Díky (9.3)

$$\mathcal{U} = -\left(\frac{\mu_1}{\varrho_1} + \frac{\mu_2}{\varrho_2}\right)\,. \tag{9.24}$$

Zavedeme-li

$$\mathcal{W} = -\mathcal{U} + \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \eta^2\right) = \frac{1}{n^2D^2}\,W \tag{9.25}$$

potom pohybové rovnice (9.22) mají zvláště jednoduchý tvar

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi}\,, \tag{9.26}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{\partial W}{\partial \eta} \quad ,$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad .$$

Jacobiho integrál (9.17) lze pak přepsat

$$(9.27) \quad 2W - \left[\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2\right] = \bar{C} \quad ,$$

kde $\bar{C}$ je konstanta související s $C$ v (9.17) vztahem

$$(9.28) \quad \bar{C} = C/n^2D^2 \quad .$$

## 9.4 Tisserandovo kritérium

Odvoďme nyní kritérium, které nám umožní určit, zda nově objevená planetka nebo kometa je již známa z dřívějska. Dráha planetky může být při přiblížení k Jupiteru značně změněna a její elementy a, e I se tedy mohou k nepoznání lišit mezi dvěma průchody v přísluní. Tisserandovo kritérium říká, že dvě planetky nebo dvě komety mohou být identické, jen když mají stejnou Jacobiho konstantu. Abychom mohli Jacobiho konstantu vyjádřit pomocí elementů dráhy orbity planetky okolo Slunce, přejdeme k soustavě $[T_1, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}]$, jejíž počátek $T_1$ leží v bodě $m_1$, a jejíž osy jsou rovnoběžné s osami s fixní soustavy $[T, X, Y, Z]$, která byla zavedena v článku 9.1.

$$(9.29) \quad \bar{X} = X - X_1, \quad \bar{Y} = Y - Y_1, \quad \bar{Z} = Z$$

tedy

$$(9.30) \quad \bar{X} = x \cos nt - y \sin nt - D \cos nt \quad ,$$

$$\bar{Y} = x \sin nt + y \cos nt - B \sin nt \ ,$$

$$\bar{Z} = z \ ,$$

a naopak

$$(9.31) \qquad x = B + \bar{X} \cos nt + \bar{Y} \sin nt \ ,$$

$$y = - \bar{X} \sin nt + \bar{Y} \cos nt \ ,$$

$$z = \bar{Z} \ .$$

Vyjádřeme nyní Jacobiho integrál pomocí $\bar{X},\bar{Y},\bar{Z},\dot{\bar{X}},\dot{\bar{Y}},\dot{\bar{Z}}$. Především U je vyjádřeno pomocí (9.7) s tím, že

$$(9.32) \qquad R_1^2 = \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2$$

$$R_2^2 = (\bar{X} + D \cos nt)^2 + (\bar{Y} + D \sin nt)^2 + \bar{Z}^2 \ .$$

Dále z (9.30) platí pro derivace

$$(9.33) \qquad \dot{x} = \dot{\bar{X}} \cos nt + \dot{\bar{Y}} \sin nt - \bar{X}n \sin nt + \bar{Y}n \cos nt$$

$$\dot{y} = - \dot{\bar{X}} \sin nt + \dot{\bar{Y}} \cos nt - \bar{X}n \cos nt - \bar{Y}n \sin nt$$

$$\dot{z} = \dot{\bar{Z}} \ .$$

Dosazením z (9.31) a (9.33) do (9.17) dostaneme

$$(9.34) \qquad 2G_0\left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2}\right) + 2n^2 B(\bar{X} \cos nt + \bar{Y} \sin nt) -$$

$$- (\dot{\bar{X}}^2 + \dot{\bar{Y}}^2 + \dot{\bar{Z}}^2) + 2n(\bar{X}\dot{\bar{Y}} - \bar{Y}\dot{\bar{X}}) = C \ .$$

Dále víme, že oskulační elementy a,e,I planetky (komety) jsou definovány jako elementy eliptické dráhy při vypnutí poruchy (tj. bez Jupitera). Pro takový pohyb dvou těles planetka - -Slunce platí vztah pro kinetický moment

(9.35) $$\bar{X}\dot{\bar{Y}} - \bar{Y}\dot{\bar{X}} = \sqrt{G_0\, m_1\, a(1-e^2)}\cos I$$

a dále známý vztah mezi energií a velkou poloosou

(9.36) $$\dot{\bar{X}}^2 + \dot{\bar{Y}}^2 + \dot{\bar{Z}}^2 = \frac{2G_0 m_1}{R_1} - G_0\,\frac{m_1}{a} \quad .$$

Dosadíme-li do (9.34) za n ze třetího Keplerova zákona a užijeme (9.35) a (9.36), dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{D^{3/2}}\sqrt{1+\frac{m_2}{m_1}}\sqrt{a(1-e^2)}\cos I + \frac{2}{R_2}\frac{m_2}{m_1} +$$

$$+ \frac{2}{D^2}\frac{m_2}{m_1}\left(\bar{X}\cos nt + \bar{Y}\sin nt\right) = \frac{C}{G_0 m_1} \quad .$$

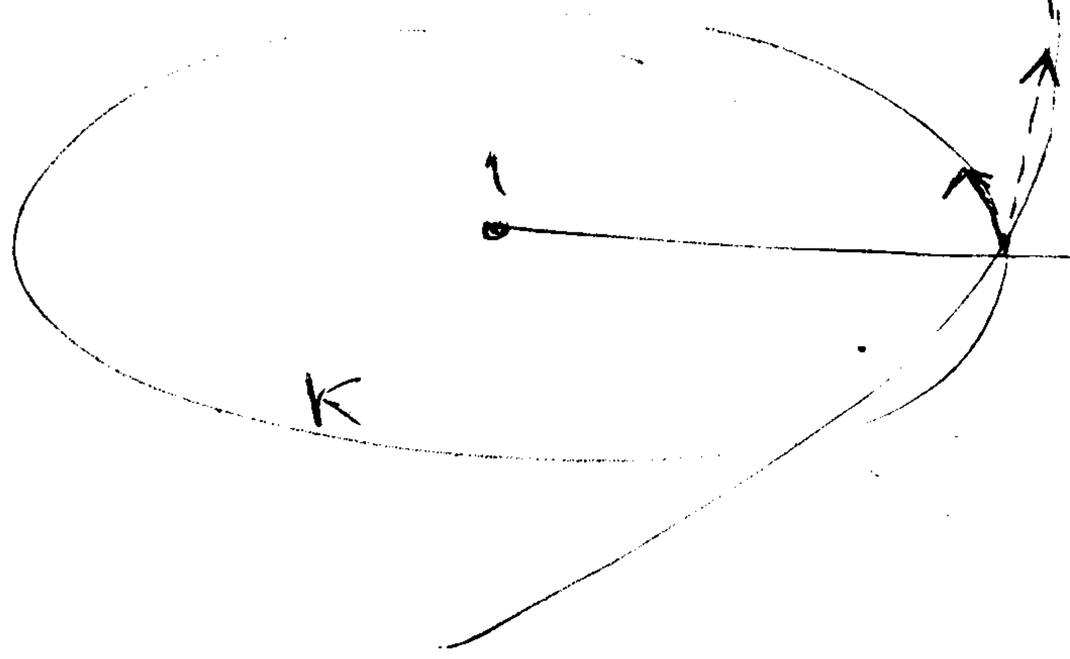
Předpokládejme, že budeme určovat Jacobiho konstantu C z pozorovaného a,e,I v době, kdy je $R_2$ dostatečně velké, např. řádově srovnatelné s D . Potom s přesností $m_2/m_1$ (což je pro Jupiter a Slunce 1/1047,355) můžeme zanedbat dva poslední členy (násobené $\frac{m_2}{m_1}$) na levé straně a též člen $m_2/m_1$ pod odmocninou

(9.37) $$\frac{1}{a} + \frac{2}{D^{3/2}}\sqrt{a(1-e^2)}\cos I = \frac{C}{G_0 m_1} \quad .$$

Kdybychom nečinili předpoklad o dostatečné velikosti $R_2$ , mohl by člen $\frac{2m_2}{R_2 m_1}$ být nezanedbatelný. Určíme-li elementy planetky $a_1, e_1, I_1$ v čase $t_1$ a po jisté době najdeme v čase $t_2$ planetku s elementy $a_1, e_1, I_1$ , můžeme určit z (9.37) konstanty $C_1$ a $C_2$ . Má-li jít o tutéž planetku, musí být obě takto získané Jacobiho konstanty shodné. Rovnice (9.37)

$$\frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_p}(1-e^2)}\cos I = \frac{c\,a_p}{GM} \equiv T$$

$[M = \mu r^2\dot{\varphi} = \mu r \cdot v_T]$




$$v_T = \frac{h}{a_p} = \left(\frac{GM}{a_p}\right)^{1/2}\left[\frac{a_p}{a_p}(1-e^2)\right]^{1/2}$$

$$v_R = \left(v^2 - v_T^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{GM}{a_p}\right)^{1/2}\left[\underbrace{2 - \frac{a_p}{a}} - \frac{a_p}{a_p}(1-e^2)\right]^{1/2}$$

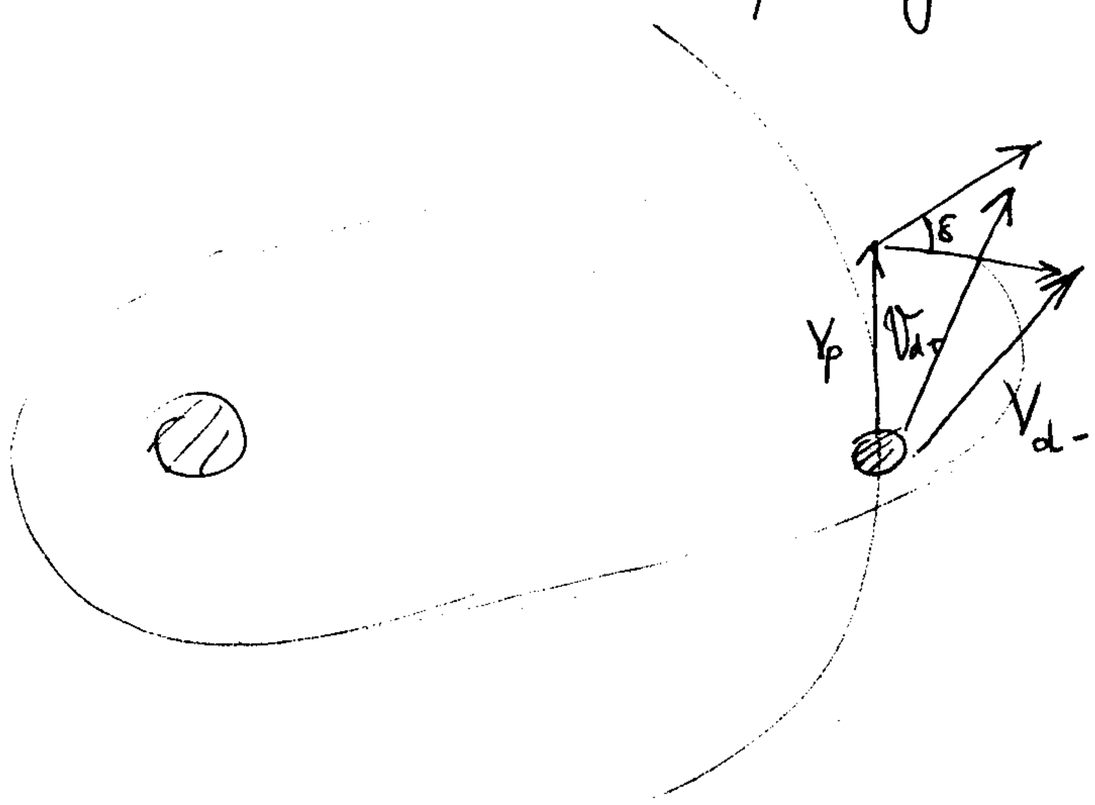
$\frac{1}{2}v^2 \pm \frac{GM}{a_p} = -\frac{GM}{2a}$

$$\Rightarrow \underline{v^2} = \left[v_T^2\cos I - \left(\frac{GM}{a_p}\right)^{1/2}\right]^2 + \left(v_T \sin I\right)^2 + v_R^2 =$$

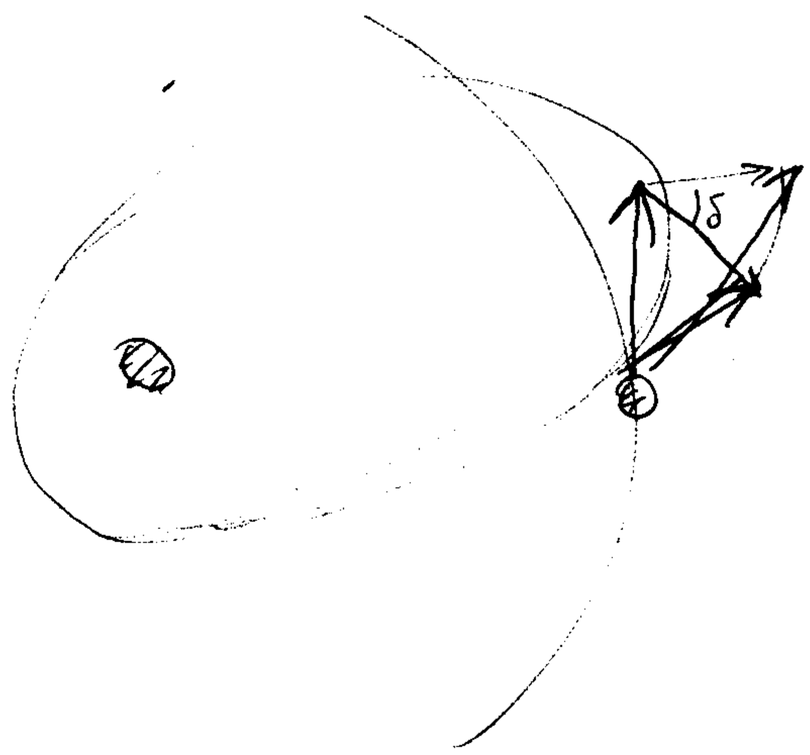
$$--- = \frac{GM}{a_p}\left[3 - \frac{a_p}{a} - 2\left(\frac{a}{a_p}(1-e^2)\right)^{1/2}\cos I\right] = \underline{\frac{GM}{a_p}(3-T)}$$

---

swing-by → gain




→ loss



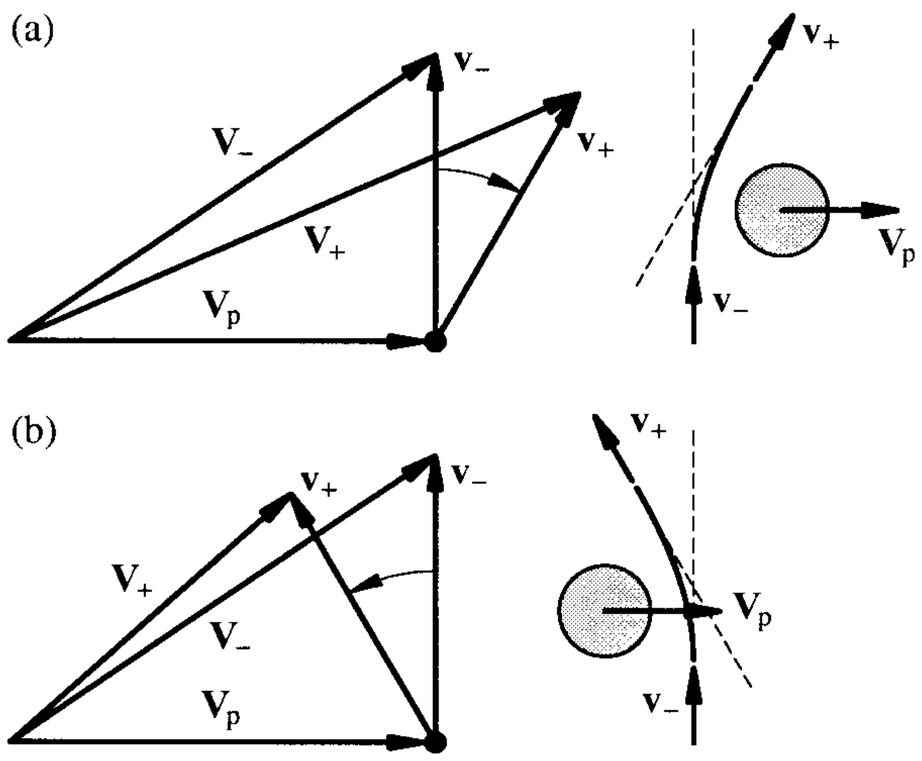
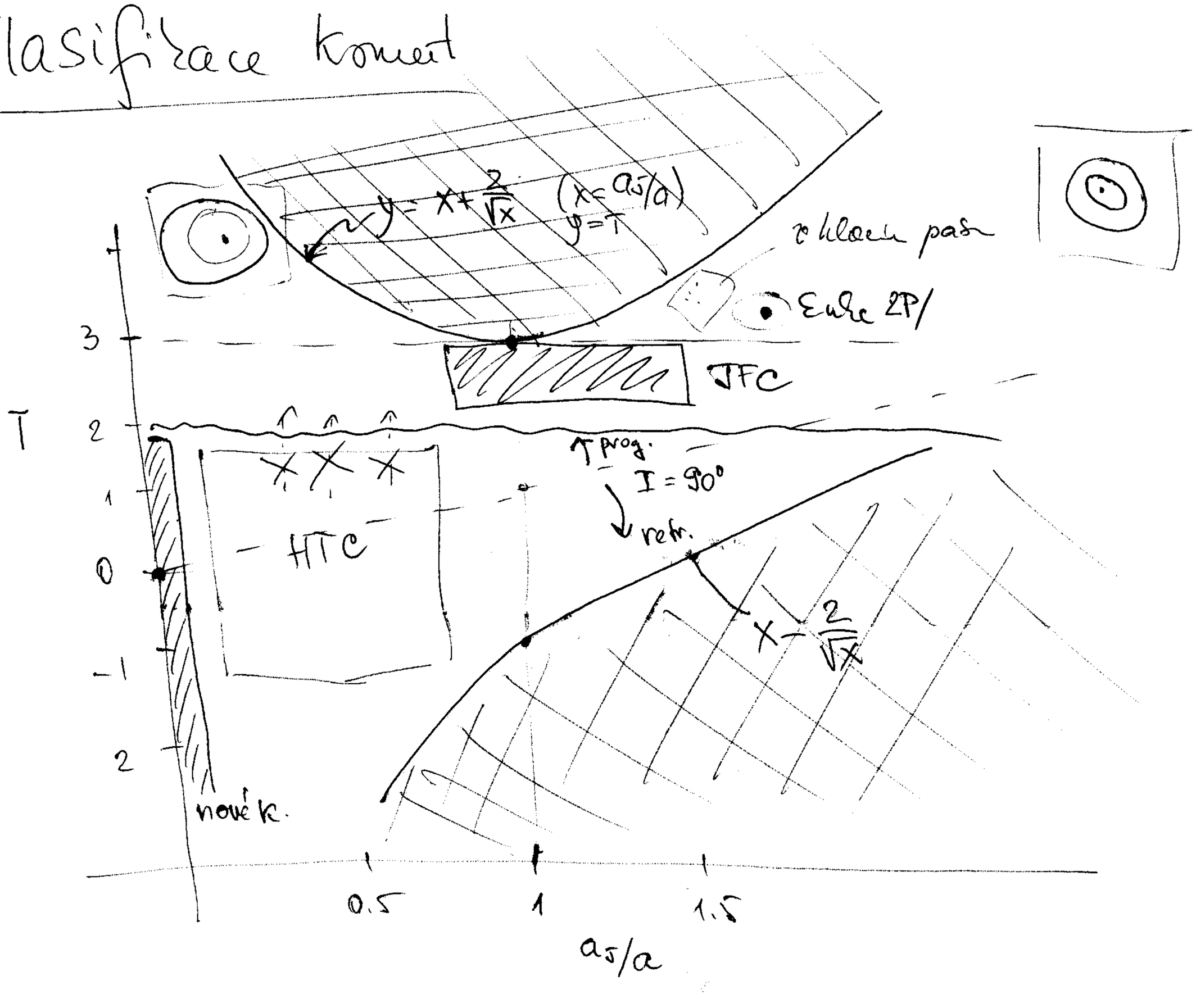



*Figure 18.7* The swing-by as a means to change the momentum and the energy of a spacecraft. A deflection to the right (case (a)) or left (case (b)) in the rest frame of the planet gives in the inertial frame (left) an increase (decrease) of the kinetic energy.

reservoir of an easily ionizable gas (e.g., cesium or xenon) passes through parallel plates, between which an electric field **E** is established; this field ionizes the gas and generates a current $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E}$; the magnetic field orthogonal to **E** pushes the plasma out and generates the thrust. This is a concept of an ion or plasma thruster. Another interesting concept is that of the *solar sail*: a large (even kilometres wide) sheet of reflecting material is deployed and suitably oriented with respect to the Sun, generating from the solar radiation pressure a force along its normal. Though ion thrusters are being experimented and already planned for forthcoming cosmic missions (e.g., the BepiColombo mission to Mercury), the solar sail has never been realized, nor is planned for the near future.

**Flybys for space navigation.** One way to overcome the fuel problem for interplanetary missions is to use the gravity pull of a carefully chosen planet or natural satellite; Fig. 18.7 shows how this works. While in the rest frame of the planet the velocity changes only in direction, by an amount depending on the impact parameter, in the inertial frame there is a net gain (loss) of energy when the spacecraft passes behind (ahead) its direction of motion, at the expense of the orbital energy of the planet. This is called a *gravity assisted manœuvre*. One could say, an elliptical solar orbit with a velocity $\mathbf{V}_-$ is matched to an hyperbolic orbit around the planet, with asymptotic velocities $\mathbf{v}_\pm = \mathbf{V}_\pm - \mathbf{V}_\mathrm{p}$; on the other asymptote this is matched to an elliptical orbit with velocity $\mathbf{V}_+$. The deflection $\mathbf{v}_- \to \mathbf{v}_+$ is determined by the angle $\delta$ between the asymptotes in terms of the impact parameter **p** (eqs. (11.43)). Its appropriate value is obtained with a slight adjustment of the direction of $\mathbf{V}_-$ before the encounter. Note the great sensitivity of this manœuvre to errors: an error $\sigma_p$ produces an error $\sigma_\delta = \sigma_p/p$ in the direction of $\mathbf{V}_+$ and an error

# Klasifikace konvekt



je definována v nějaké soustavě jednotek, ve které musíme udat též též gravitační konstantu $G_0$ . Jestliže budeme měřit délku poměrem k délce $D$ , hmotnost poměrem k $m_1+m_2$ a čas poměrem k $1/n$ , dostaneme místo (9.37)

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)}\cos I = \bar{C} \quad . \tag{9.38}$$

To je obvykle užívaný tvar Tisserandova kriteria.

## 9.5 Hillovy plochy

Při zadaných počátečních $\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ mají rovnice (9.26) právě jedno řešení. Pro toto řešení je možno podle (9.27) určit Jacobiho konstantu $\bar{C}$ . V každém bodě $\xi, \eta, \zeta$ umožňuje pak (9.27) určit velikost rychlosti. Pro danou Jacobiho konstantu pak definujme plochu $\left[ W = \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right]$

$$2W(\xi, \eta, \zeta) - \bar{C} = 0 \quad . \tag{9.39}$$

Tyto plochy definované pro různá $\bar{C}$ nazýváme Hillovými plochami, nebo též plochami nulové rychlosti. Plocha (9.39) rozděluje obecně trojrozměrný prostor (o souřadnicích $\xi, \eta, \zeta$ ) na dvě oblasti. Oblast, kde $2W - \bar{C} > 0$ a oblast, kde $2W - \bar{C} < 0$ . Do druhé z těchto oblastí se dráha s odpovídající Jacobiho konstantou $C$ nikdy nemůže dostat. Tato dráha může dosáhnout nejvýše Hillovu plochu, kde bude těleso nabývat nulové rychlosti, tj. $\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$. V oblasti, kde je $2W - \bar{C} < 0$ , by podle (9.27) musel být čtverec rychlosti záporný, proto se tam částice nikdy nedostane a nemůže tak překročit Hillovu plochu. Proto je zajímavé orientačně vy-

šetřit, jak Hillovy plochy vypadají. Rovnici (9.39) je možno zapsat

$$\xi^2 + \eta^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2}\right) = C \quad . \tag{9.40}$$

Pro velmi velké hodnoty $\bar{C}$ se Hillova plocha skládá ze třech oddělených ploch.

1. plocha je velmi blízká k bodu $\mu_1$ , tj. velikost pravé strany je zajištěna hlavně členem $2\mu_1/\rho_1$ a vše ostatní na pravé straně je proti tomuto členu malé a shrneme to do malé opravy $\epsilon$

$$2\frac{\mu_1}{\rho_1} = \bar{C} - \epsilon \quad .$$

Tato část Hillovy plochy se tak velmi málo liší od kulové plochy opsané okolo bodu s hmotností $\mu_1$ s poloměrem $2\mu_1/\bar{C}$ . Částice uvnitř této plochy se nemůže dostat ven.

2. plocha je obdobně blízká bodu $\mu_2$ a liší se velmi málo od kulové plochy opsané okolo bodu o hmotnosti $\mu_2$ s poloměrem $\rho_2 \sim 2\mu_2/C$ . Částice uvnitř této plochy se nemůže dostat ven.
3. Třetí část Hillovy plochy je velmi vzdálena od obou primárů. Velikost levé strany (9.40) je zajištěna velikostí $\xi^2 + \eta^2$ , zatímco veličina v závorce je pouze malou opravou. Rovnice

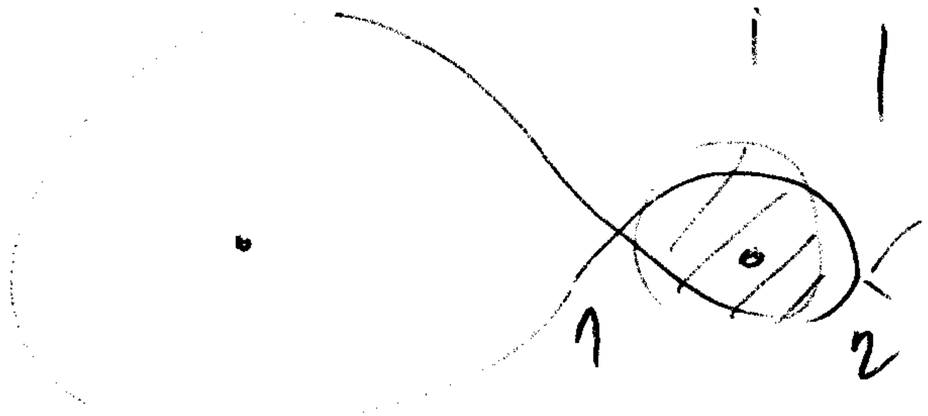
$$\xi^2 + \eta^2 = \bar{C} - \epsilon$$

tak popisuje plochu málo se odchylující od válcové plochy s osou $\zeta$ a poloměrem $\sqrt{\bar{C}}$ . Pohyb je možný vně válcové plochy a částice se nemůže dostat dovnitř.

Při zmenšujícím se $\bar{C}$ se poloměry prvních dvou ploch zvětšují a plochy se stále více deformují, zatímco poloměr válcové plochy se zmenšuje opět za rostoucí deformace. Při jistých

Roche ovo Lobe

$\approx \boxed{\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}}$




shadow means by what mass $\approx \boxed{r_{1,2}}$

$$r_s \approx D\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \qquad \mu = \frac{m_s}{m_p} \sim \left(\frac{r_s}{r_p}\right)^3$$

$$3^{1/3}\,\frac{r_s}{r_p}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{1/3} \approx \frac{D}{r_p}$$

$$\boxed{1.44\left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} \approx \frac{D}{r_p}}$$

hodnotách konstanty $\bar{C}$ dochází k protínání různých dvojic z uvedených tří ploch (viz obr.2).

## 9.6 Librační body jako singularity Hillových ploch

Singulárním bodem plochy

(9.40) $$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

nazýváme takový bod, ve kterém je

(9.41) $$\nabla f = \vec{0} \quad , \qquad \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \xi} , \frac{\partial}{\partial \eta} , \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad .$$

Např. pro jednoparametrickou soustavu kulových ploch

(9.42) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - R^2 = 0$$

dává (9.41)

$$(2\xi, 2\eta, 2\zeta) = (0, 0, 0) \quad ,$$

tedy plocha s $R = 0$, která se redukuje na bod, je singulárním bodem. Pro soustavu Hillových ploch (9.39) dostáváme singulární body tam, kde

(9.43) $$\nabla W = 0 \quad .$$

Nechť rovnice (9.43) je splněna v nějakém bodě $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$. Potom je bod $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ stacionárním bodem, tj.

(9.44) $$\xi(t) = \xi_0 \, , \quad \eta(t) = \eta_0 \, , \quad \zeta(t) = \zeta_0$$

je řešením soustavy (9.26). Stacionární body omezeného kruhového problému tří těles nazýváme též libračními body. Odtud tedy plyne tvrzení, že singulární body Hillových ploch jsou libračními body

$$\varrho_1^2 = (\xi - \mu_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

$$\varrho_2^2 = (\xi + \mu_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

omezeného problému tří těles. Pro librační body tak dostaneme z (9.43) a

$$w = \left(\frac{\mu_1}{\varrho_1} + \frac{\mu_2}{\varrho_2}\right) + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

soustavu tří rovnic

$$(9.45)\quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \xi - \frac{\mu_1}{\varrho_1^3}(\xi - \mu_2) - \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}(\xi + \mu_1) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \eta - \frac{\mu_1}{\varrho_1^3}\eta - \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}\eta = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = -\frac{\mu_1}{\varrho_1^3}\zeta - \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}\zeta = 0 \quad .$$

Třetí rovnice dává $\zeta = 0$ , protože $\frac{\mu_1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu_2}{\varrho_2^3} \neq 0$ . Tedy libračí body se nalézají v rovině primárů. Druhou rovnici je možno splnit buď tak, že

a) $\eta = 0$

tyto libračí body leží na přímce spojující primáry

b) $1 = \frac{\mu_1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}$ .

Vyšetřeme nejprve druhý případ. Nechť

$$(9.46)\qquad 1 = \frac{\mu_1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu_2}{\varrho_2^3} \quad ,$$

potom první z rovnic (9.45) dává

$$\xi - \left(\frac{\mu_1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}\right)\xi + \mu_1\mu_2\left(\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3}\right) = 0 \quad .$$

Členy s $\xi$ vypadnou díky (9.46) a tedy musí platit

(9.47) $$\rho_1 = \rho_2 \quad ,$$

ale podle (9.46) to znamená

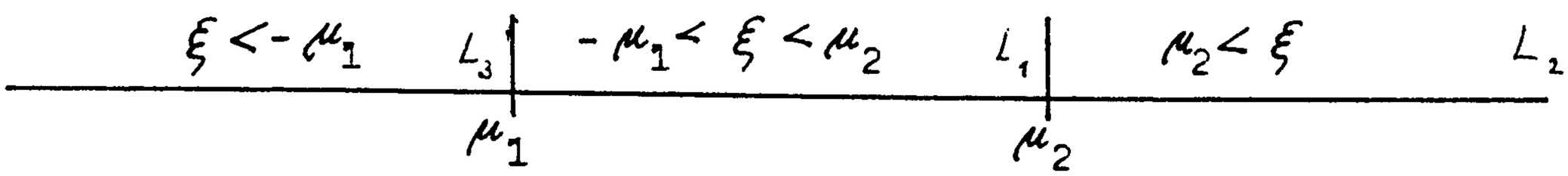
$$\rho_1 = \rho_2 = 1 \quad .$$

V tomto případě dostáváme jako řešení body ležící v rovině primárů, které tvoří s primáry rovnostranný trojúhelník. Takové body jsou dva v opačných polorovinách od přímky spojující primáry. Těmto bodům říkáme trojúhelníkové librační body a značíme je $L_4$ , $L_5$ .

Vyšetřujeme dále případ $\eta = 0$ , tj. možnost existence přímkových libračních bodů. Poslední dvě rovnice v (9.45) jsou splněny automaticky a zbývá splnit rovnici první

(9.48) $$\xi - \frac{\mu_1}{\rho_1^3}(\xi - \mu_2) - \frac{\mu_2}{\rho_2^3}(\xi + \mu_1) = 0 \quad .$$

Protože výrazy $\rho_1 = |\xi - \mu_2|$ a $\rho_2 = |\xi + \mu_1|$ nabývají různých hodnot podle toho, kde leží $\xi$ vzhledem k $-\mu_1$ , $\mu_2$ , budeme vyšetřovat tři případy.




| $\rho_1 = \mu_2 - \xi$ | $\rho_1 = \mu_2 - \xi$ | $\rho_1 = \xi - \mu_2$ |
|---|---|---|
| $\rho_2 = -\xi - \mu_1$ | $\rho_2 = \xi + \mu_1$ ✓ | $\rho_2 = \xi + \mu_1$ |

Rovnice (9.48) má potom v těchto oblastech rozdílný tvar

$$\xi + \frac{\mu_1}{(\mu_2 - \xi)^2} + \frac{\mu_2}{(\xi + \mu_1)^2} = 0 \qquad \checkmark$$

$$\xi + \frac{\mu_1}{(\mu_2 - \xi)^2} - \frac{\mu_2}{(\xi + \mu_1)^2} = 0 \qquad \checkmark$$

$$\xi - \frac{\mu_1}{(\xi - \mu_2)^2} - \frac{\mu_2}{(\xi + \mu_1)^2} = 0 \qquad \checkmark$$

Napříště budeme předpokládat, že $\mu_2 < \frac{1}{2}$ , jinak prohodíme $\mu_1$ a $\mu_2$ . Úlohu budeme charakterizovat jediným parametrem $\mu = \mu_2 < \frac{1}{2}$ . Místo $\mu_1$ pak píšeme $1 - \mu$ . Zapišme nejprve rovnici v oblasti

$$\xi < -\mu_1$$

jako rovnici 5. stupně pro veličinu $k = \rho_2 = -\xi - \mu$ ,

$$\Rightarrow \xi = -k - 1 + \mu, \quad \mu_2 - \xi = \mu + k + 1 - \mu = k + 1,$$

$$\xi + \mu_1 = -k - 1 + \mu + 1 - \mu = -k$$

$$(-k-1+\mu) + \frac{1-\mu}{(k+1)^2} + \frac{\mu}{k^2} = 0 \quad .$$

Po úpravě

$$(9.49) \quad k^5 + (3-\mu)\,k^4 + (3-2\mu)\,k^3 - \mu k^2 - 2\mu k - \mu = 0 \ .$$

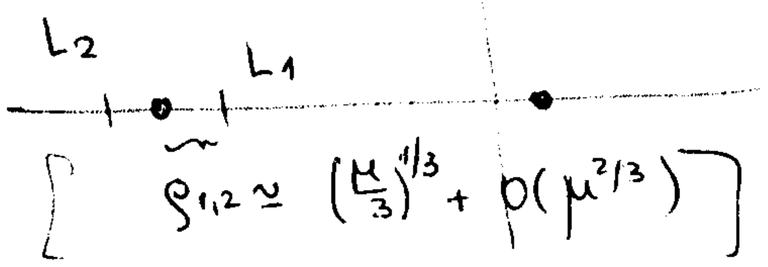
Podobným postupem zavedeme $k = \rho_2$ pro $-\mu_1 < \xi < \mu_2$ a dostaneme

$$(9.50) \quad k^5 - (3-\mu)\,k^4 + (3-2\mu)\,k^3 - \mu k^2 + 2\mu k - \mu = 0 \ .$$

Konečně pro $\xi > \mu_2$ dostaneme pro $k = r_1$ rovnici

$$(9.51) \quad k^5 + (2+\mu)\,k^4 + (1+2\mu)\,k^3 - (1-\mu)\,k^2 - 2(1-\mu)k - (1-\mu) = 0.$$

Rovnice (9.49) - (9.51) je možno numericky vyřešit a pro každé určit tři přímkové librační body. Souřadnice těchto libračních bodů jsou v závislosti na $\mu$ vyneseny na obr.2. Zde $\xi_1$ je souřadnice přímkového libračního bodu $L_1$ , který leží mezi primáry, $\xi_2$ souřadnice přímkového libračního bodu $L_2$ nacházejícího se blíže k lehčímu primáru a $\xi_3$ souřadnice libračního bodu $L_3$ ležícího blízko k těžšímu z primárů. Body $L_2$, $L_3$ leží ovšem vně úsečky spojující primáry. Pro $\mu = 0$ body $L_1$, $L_2$






splývají a leží v bodě nulové hodnosti $\mu_2$ , zatímco $L_3$ leží na opačné straně než $\mu_2$ ve vzdálenosti rovné 1 od $\mu_1$ . Pro $\mu = 0{,}5$ je $\xi_1(0{,}5) = 0$ , $\xi_3(0{,}5) \cong 1{,}1984061446 = -\xi_2(0{,}5)$. Křivka $\xi_2(\mu)$ nabývá minima v okolí $\mu = 0{,}18$ , kde $\xi_2 = -1{,}271628$.

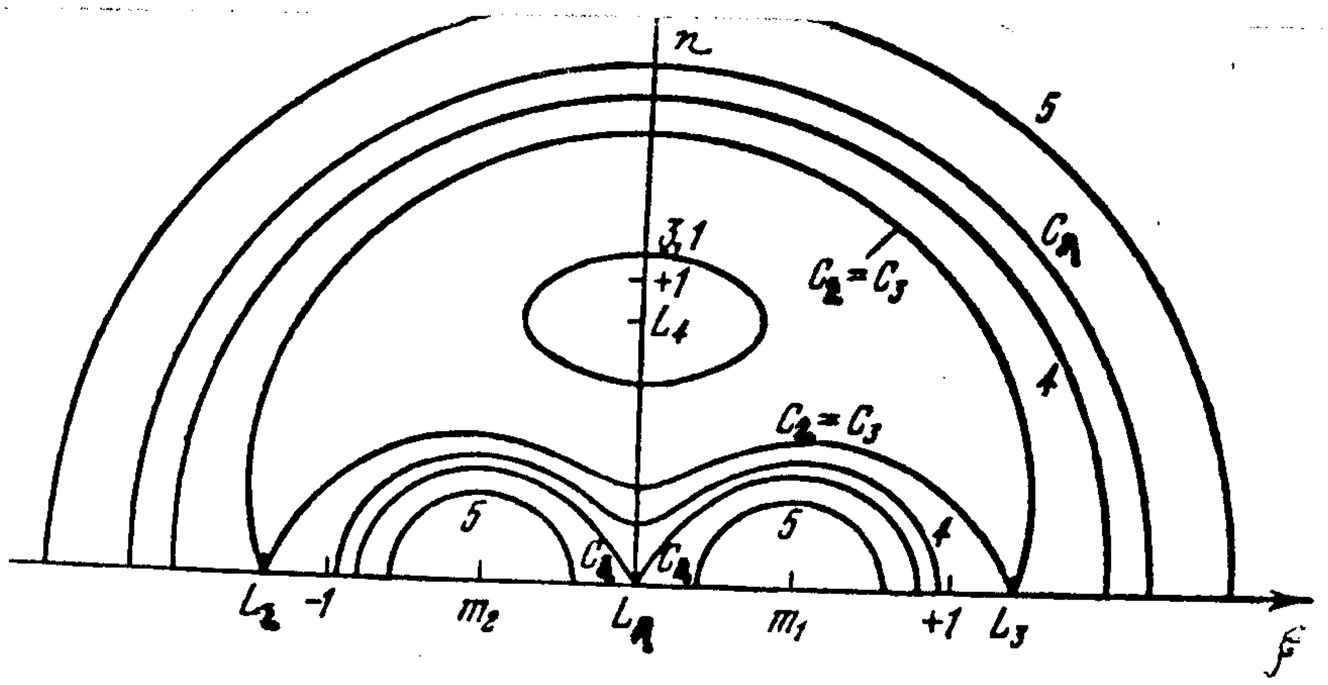
Zajímavá aplikace je použití Hillových ploch na systém Slunce, Země, Měsíc, kde se ukazuje, že Jacobiho konstanta určená pro Měsíc vede na Hillovu plochu, která v blízkosti Země protíná úsečku spojující primáry (Země, Slunce) blíže k Zemi, než je bod $L_1$ . To ukazuje, že Měsíc je uvězněn v okolí Země svoji Hillovou plochou a nemůže uniknout do vzdálenějších oblastí.

## 10. Stabilita libračních bodů

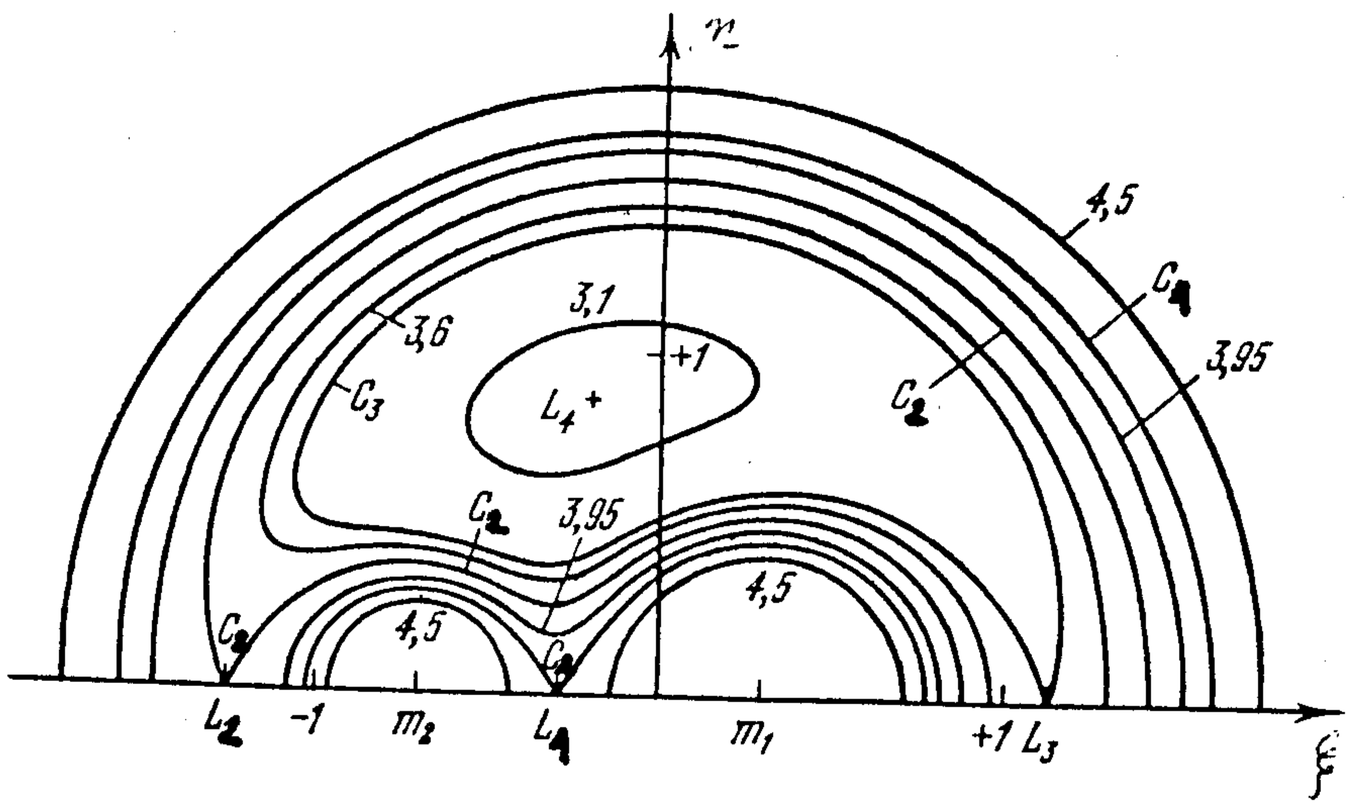
V minulé kapitole jsme nalezli pět stacionárních řešení kruhového omezeného problému tří těles, tedy pět libračních bodů. Body $L_1, L_2, L_3$ jsou přímkové, body $L_4, L_5$ trojúhelníkové librační body. V této kapitole se budeme věnovat otázce stability těchto libračních bodů. Bude nás zajímat, jak se chová řešení v těsném okolí libračních bodů, zda bod, jehož poloha a rychlost se nepatrně změní oproti stacionárnímu řešení, zůstává stále v okolí příslušného libračního bodu. Víme, že matematické kyvadlo při vychýlení ze stabilní rovnovážné polohy stále kmitá okolo této polohy, zatímco při nepatrném vychýlení z nestabilní rovnovážné polohy se kyvadlo od této polohy nutně vzdálí. Abychom precizovali tyto intuitivní úvahy, zavedeme některé definice.

### 10.1 Stabilita řešení podle Ljapunova

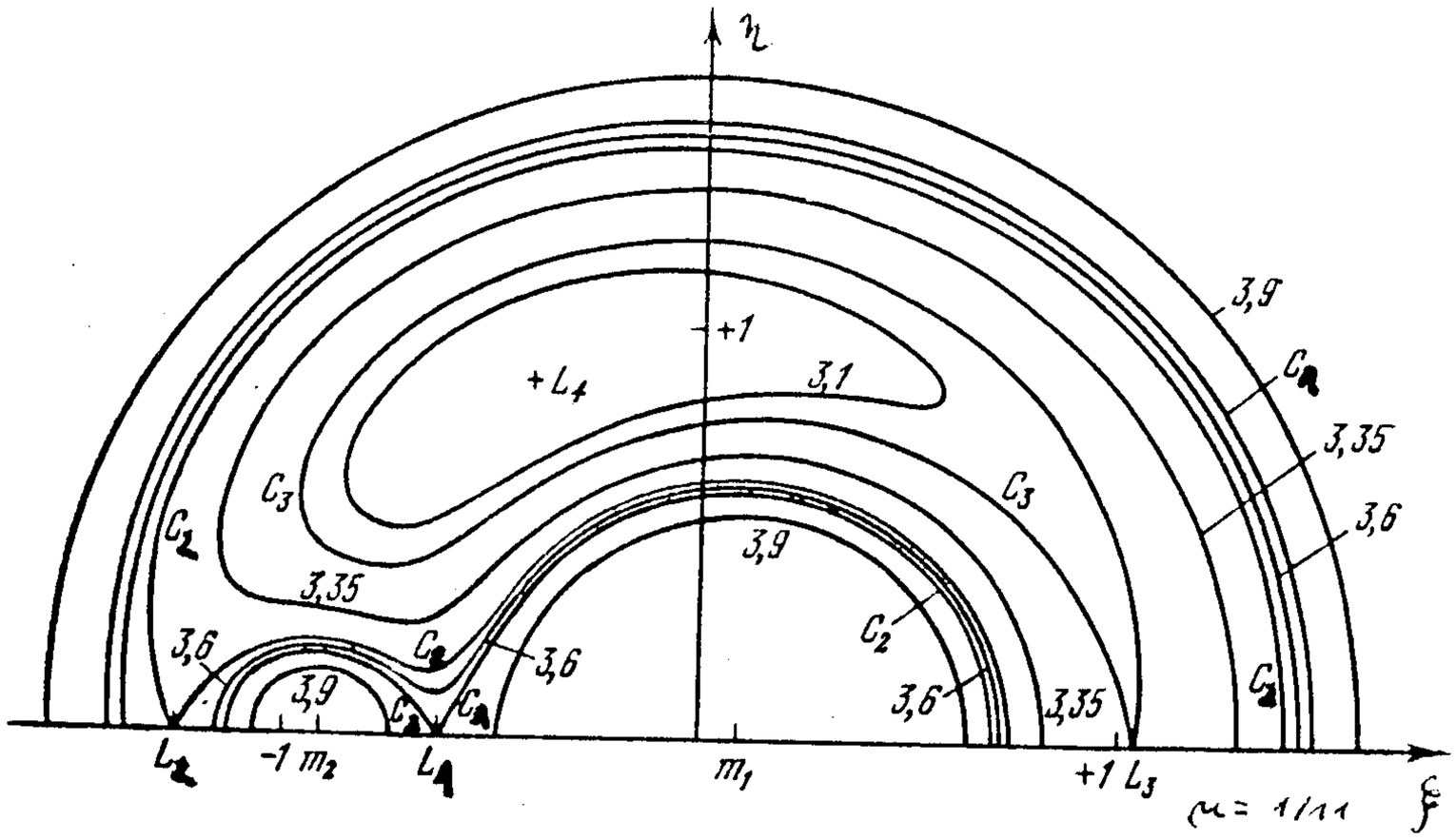
Mějme soustavu diferenciálních rovnic




$\mu = 0{,}5.$




$\mu = 0{,}3.$




Obr.2 Křivky nulové rychlosti pro různá $\mu$

(10.1) $\dot{x} = F(x,t)$ ,

kde $x \in R^n$ , tj. $x = (x_1, \dots x_n)$ a podobně $F(x,t) = (F_1(x,t), F_2(x,t), \dots F_n(x,t))$ je zadáno n-ticí funkcí nabývajících obecně komplexní hodnoty. Funkce $F_i$ nechť jsou definovány v oblasti $Z = D_x \times I_t$ , kde $D_x$ je otevřená oblast v $R^n$ a $I_t = \{ t_0 < t < +\infty \}$. Budeme předpokládat, že $F_i$ jsou v oblasti $Z$ spojité vzhledem k $t$ a mají spojité první parciální derivace podle $x_i$ .

Definice: Řešení $x = \varphi(t)$ soustavy (10.1) definované pro $a < t < +\infty$ se nazývá stabilním podle Ljapunova, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $t_0 \in (a, +\infty)$ existuje $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že všechna řešení $\varphi(t)$ soustavy (10.1), která splňují podmínku

$$|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

jsou definována pro $t_0 \leq t < +\infty$ a pro všechna $t_0 \leq t < +\infty$

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad .$$

Poznámka: Jestliže číslo $\delta > 0$ je možno vybrat nezávisle na počátečním momentu $t_0$ , pak mluvíme o stejnoměrné stabilitě. Řešení, které není stabilní podle Ljapunova, nazýváme nestabilním.

Tedy znegováním definice stability dostaneme:

Řešení $x = \psi(t)$ soustavy (10.1) definované pro $a < t < +\infty$ je nestabilní podle Ljapunova, jestliže existuje alespoň jedna dvojice čísel $\varepsilon > 0$, $t_0 \in (a, +\infty)$ tak, že pro všechna $\delta > 0$ existuje aspoň jedno řešení $\varphi(t)$ soustavy (10.1), takové, že platí

$$|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

a přitom buď $\varphi(t)$ není definováno v celém intervalu $t_0 \leq t < +\infty$, nebo existuje takové $t_1$ , že

$$|\psi(t_1) - \varphi(t_1)| \geq \varepsilon .$$

Dalším důležitým pojmem je tzv. asymptotická stabilita.

Definice: Řešení $x = \psi(t)$ v $(a < t < +\infty)$ nazveme asymptoticky stabilním při $t \to +\infty$ jestliže platí

1) řešení $\psi(t)$ je stabilní podle Ljapunova

2) pro libovolné $t_0 \in (a, +\infty)$ existuje $\Delta(t_0) > 0$ takové, že pro všechna řešení $\varphi(t)$ v $(a, +\infty)$, pro která je

$$|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \Delta ,$$

platí

$$\lim_{t \to \infty} |\psi(t) - \varphi(t)| = 0 .$$

## 10.2 Stabilita lineárních systémů diferenciálních rovnic

Mějme lineární systém

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + f(t) , \qquad (10.2)$$

kde $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f(t) = (f_1(t), \ldots f_n(t))$ a $A(t)$ je matice typu $n \times n$ .

Definice: Lineární systém (10.2) nazveme stabilním, jestliže všechna jeho řešení jsou stabilní ve smyslu Ljapunova. Systém (10.2) nazveme nestabilním, jestliže všechna řešení jsou nestabilní ve smyslu Ljapunova.

Poznámka: V zápětí ukážeme, že systém (10.2) je buď stabilní nebo nestabilní. Nemůže totiž existovat lineární systém, který by měl jedno řešení stabilní a druhé nestabilné. To plyne z následující věty.

Věta: Pro stabilitu systému (10.2) je nutné a stačí, aby bylo

stabilní konstantní řešení $x=0$ homogenního systému

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \quad . \tag{10.3}$$

Důkaz:

a) Nejprve dokážeme, že stabilita řešení $x=0$ je nutná pro stabilitu systému. Nechť řešení $x=0$ je nestabilní. Buď $\varphi(t)$ nějaké řešení (10.2). Ukážeme, že pak je nutně nestabilní. Z nestability $x=0$ plyne, že existuje dvojice $\varepsilon$, $t_0 \in (a,+\infty)$ tak, že pro všechna $\delta>0$ existuje aspoň jedno řešení $\xi(t)$ soustavy (10.3), pro které je

$$|\xi(t_0)| < \delta$$

a přitom buď $\xi(t)$ není definováno v celém intervalu $t_0 \le t < +\infty$, nebo existuje $t_1 \in (t_0,+\infty)$ tak, že platí

$$|\xi(t_1)| \ge \varepsilon \quad .$$

Existují tedy $\epsilon$, $t_0$ $(a,+\infty)$ tak, že pro všechna $\delta > 0$ existuje řešení soustavy (10.2) $\varphi(t) = \Psi(t) + \xi(t)$, pro které je

$$|\Psi(t_0) - \varphi(t_0)| = |\xi(t_0)| < \delta$$

a přitom buď $\varphi(t)$ není definováno v celém intervalu $t_0 \le t < +\infty$, nebo existuje $t, \in (t_0,+\infty)$ tak, že platí

$|\Psi(t_1) - \varphi(t_1)| = |\xi(t_1)| \ge \varepsilon$ . Tedy řešení $\Psi(t)$ je podle definice nestabilní.

b) Dokážeme, že stabilita řešení $x=0$ stačí pro stabilitu systému (10.2) Je-li $x$ stabilní řešení (10.3) $\Rightarrow$ pro libovolné $\varepsilon>0$ a $t_0 \in (a,+\infty)$ existuje $\delta(\varepsilon, t_0)>0$ takové, že pro všechna řešení (10.3) $\xi(t)$, pro která

$$|\xi(t_0)| < \delta$$

je $\xi(t)$ pro $t \in (t_0, +\infty)$ definováno a platí zde

$$|\xi(t)| < \varepsilon \quad .$$

Je-li $\psi(t)$ nějaké řešení (10.2), pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ a $t \in (a, +\infty)$ existuje $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takové, že pro všechna řešení $\varphi(t)$ soustavy (10.2), pro která je

$$|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

je

$\varphi(t)$ definováno v $(t_0, +\infty)$. To platí proto, že funkce $\xi(t) = \varphi(t) - \xi(t)$ je řešením (10.3). Navíc

$$|\varphi(t) - \psi(t)| = |\xi(t)| < \varepsilon \quad ,$$

tedy každé řešení $\psi(t)$ je stabilní podle Ljapunova.

Konec důkazu.

Mějme nyní autonomní nelineární systém.

(10.4) $$\dot{x} = X(x) \quad .$$

Buď $x^{(0)}$ bod, pro který platí

$$X(x^0) = 0 \quad ,$$

tj. $x = x^{(0)}$ je stacionární řešení. Zavedeme-li $x' = x - x^{(0)}$, převedeme stacionární bod do počátku $x' = 0$. Předpokládejme, že tento posun byl již proveden a že tedy platí

$$X(0) = 0 \quad .$$

Položíme-li v (7.18) $x_i = 0$ a naopak $h_i = x_i$, dostaneme pro Taylorův rozvoj funkce $X(x)$ v okolí počátku

$$(10.5) \quad X_i(x_1 \dots x_n) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} B_{ijk}\, x_j\, x_k + \dots \quad ,$$

kde

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{x=0} , \qquad B_{ijk} = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\right|_{k=0} X_i(x_1, \ldots x_n) .$$

Budeme-li se zabývat pohybem v nejbližším okolí stacionárního bodu $x=0$ , zanedbáme v rozvoji (10.5) členy druhého a vyššího stupně v $x_i$ . Této aproximaci říkáme lineární aproximace. Dosazením z (10.5) do (10.4) dostaneme v lineární aproximaci soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \quad . \tag{10.6}$$

Budeme říkat, že stacionární řešení $x=0$ systému (10.4) je stabilní v lineární aproximaci, jestliže je stabilní linerání systém (10.6). Místo o stabilitě v lineární aproximaci často mluvíme jednodušeji o lineární stabilitě. Je možno ukázat, že jestliže stacionární řešení $x=0$ rovnice (10.4) je stabilní ve smyslu Ljapunova, pak musí být stabilní i systém (10.6). Opačně ovšem z lineární stability nevyplývá stabilita stacionárního řešení nelineárního systému.

Vyšetřujeme nyní stabilitu systému (10.6). Úloha je zvláště jednoduchá, má-li matice $A$ typu $n \times n$ $n$ různých vlastních čísel. Hledáme-li totiž řešení rovnice (10.6) ve tvaru

$$x = a\, e^{\lambda t} ,$$

kde $a$ je vektor, který chceme určit, dostáváme dosazením do (10.6)

$$\sum_j (A_{ij} - \lambda \sigma_{ij}) a_j = 0 \qquad i = 1, \ldots n \quad . \tag{10.7}$$

Aby měla tato soustava řešení, musí platit

(10.8) $\det | A - \lambda E^{(n)} | = 0$ ,

tj. $\lambda$ musí být vlastní číslo matice $A$ . Je-li $n$ různých řešení $\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_n$ , pak je možno ke každému $\lambda_i$ nalézt vektor $a^{(i)}$ splňující (10.7). Obecné řešení (10.6) je pak lineární kombinací, jejíž koeficienty $C_k$ tvoří n-tici integračních konstant.

(10.9) $$x = \sum_{k=1}^{n} C_k \, a^{(k)} \exp \lambda_k \, t \quad .$$

Je-li některé z $\lambda_k$ reálné a $\lambda_k > 0$ , potom řešení $C_k a^{(k)} e^{\lambda k t}$ může být pro $t=t_0$ učiněno volbou $C_k \neq 0$ libovolně blízké k 0 . Pro dostatečně velké $t$ se však toto řešení od 0 libovolně vzdálí. Existence reálného vlastního čísla $\lambda_k$ matice $A$ , pro které je $\lambda_k > 0$ zatučuje v tomto případě nestabilitu systému.

Pro obecnou matici $A$ může však rovnice (10.8) mít nekolikanásobný kořen $\lambda$ . Pak již není zajištěna existěnce $n$ různých vlastních vektorů $a^{(k)}$ a řešení nelze obecně psát ve tvaru (10.9).

V matematice se však dokazuje, že obecně vždy existuje matice $H$ , která podobnostní transformací převede libovolnou matici $A$ na tzv. Jordanův tvar.

(10.10) $$J = H^{-1} A H = \begin{pmatrix} \lambda_1 E^{(k_1)} + P^{(k_1)}, & 0 & , \ldots 0 \\ 0 & , \lambda_2 E^{(k_2)} + P^{(k_2)}, & \ldots 0 \\ 0 & , \ldots & \lambda_r E^{(k_r)} + P^{(k_r)} \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ jsou vlastní čísla, $E^{(k_i)}$ je jednotková matice typu $k_i \times k_i$ , $P^{(k_i)}$ je též matice typu $k_i \times k_i$

$$(10.11)\qquad P^{(k_i)} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & .. & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0, & & & & 0 & 1 \\ 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{(1)} = 0 \quad .$$

Totéž vlastní číslo $\lambda$ se může opakovat ve více maticích na diagonále v (10.10). Násobnost vlastního čísla $\lambda$ je součet všech $k_i$ u matic odpovídajících tomuto kořeni. Protože rovnice (10.8) musí mít s uvážením násobnosti $n$ kořenů, musí platit

$$(10.12)\qquad \sum_{i=1}^{r} k_i = n \quad .$$

Jinak řečeno, matice (10.10) je rozblokována tak, že má kromě r matic na diagonále všude nuly. Matice na diagomále mají tvar

$$(10.13)\qquad \begin{pmatrix} \lambda_i, & 1, & 0, & \ldots & , & 0 \\ 0, & \lambda_i, & 1, & & 0, & 0 \\ 0, & 0 , & & & \lambda_i, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & 0, & \lambda_i \end{pmatrix} \quad .$$

Pro $k_i=1$ se matice (10.13) na diagonále redukuje na jediné číslo $\lambda_i$ . Pro případ $n$ různých vlastních čísel jsou všechna $k_i=1$. Zavedeme-li tedy v původním systému (10.6)

$$\dot{x} = A\,x$$

nové neznámé funkce $y$ vztahem

$$(10.14)\qquad x = H\,y \quad \text{resp.} \quad y = H^{-1}\,x \quad ,$$

kde $H$ je matice převádějící matici $A$ na Jordanův tvar, potom pro $y$ dostaneme soustavu rovnic

(10.15) $\dot{y} = H^{-1} x = H^{-1} Ax = H^{-1} A Hy = J y$ ,

kde $J$ je Jordanova matice (10.10). Díky tomu, žematice $J$ je rozblokována, rozpadají se rovnice pro $y$ na $r$ nezávislých soustav. Označíme-li

$$z_j = y_{k_1+\ldots+k_{i-1}+j} \qquad \text{pro } j=1,\ldots k_i \text{ , tj.}$$

zabýváme se na chvíli jen blokem odpovídajícím číslu $\lambda_i$ .

Potom platí

(10.16)
$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_i z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_i z_2 + z_3 \\ \dot{z}_{k_i-1} &= \lambda_i z_{k_i-1} + z_{k_i} \\ \dot{z}_{k_i} &= \lambda_i z_{k_i} \end{aligned} \quad .$$

Poslední rovnice má řešení

(10.17) $$z_{k_i} = e^{\lambda_i t}$$ a

dosazením do předposlední rovnice

$$\dot{z}_{k_i-1} = \lambda_i z_{k_i-1} + e^{\lambda_i t}$$

a řešení

$$z_{k_i-1} = t\, e^{\lambda_i t}$$

takto postupně vyřešíme celou soustavu (10.16). Její řešení

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k_i-1} \\ z_{k_1} \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} \frac{1}{(k_i-1)!}\, t^{k_i-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Položíme-li místo (10.17) $z_{k_i-1}$ , dostaneme další nezávislé řešení

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k_i-1} \\ z_{k_i} \end{pmatrix} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} \frac{1}{(k_i-2)!}\, t^{k_i-2} \\ \\ \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Další nezávislá řešení dostaneme obdobně

$$e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \frac{1}{(k_i-3)!}\, t^{k_i-3} \\ \\ \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} \frac{1}{(k_i-4)!}\, t^{k_i-4} \\ \\ \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda_i t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \\ \\ \\ 0 \end{pmatrix},$$

Obecné řešení je potom lineární kombinací těchto řešení, kde koeficienty lineární kombinace tvoří $k_i$ integračních konstant. Každé $z_i$ je tak součinem $e^{\lambda_i t}$ s polynomem $R(t)$, jehož stupeň v $t$ je menší než $k_i$ . Totéž platí i pro $x$ , neb vztah mezi $x$ a $y$ (10.14) je lineární. Z toho plyne pro stabilitu řešení (10.6)

a) Jestliže alespoň jedno z charakteristických čísel $\lambda_i$ má kladnou reálnou část, pak soustava (10.16) je nutně nestabilní. Vždy totiž existuje řešení, které se od řešení $z = 0$ libovolně vzdálí. Tedy i soustava (10.6) je nestabilní. Při vhodné volbě

počátečních podmínek může i řešení (10.6) obsahovat jen faktor $e^{\lambda_i t}$, tedy řešení vždy unikne z $\varepsilon$- okolí nuly.

b) Jestliže všechna charakteristická čísla $\lambda_i$ mají reálnou část zápornou, pak je řešení $x=0$ rovnice (10.6) asymptoticky stabilní. Každý člen v řešení obsahuje faktor $e^{\lambda_i t}$.

c) Nenastává-li ani jeden z případů a), b), tj. existuje-li alespoň jedna ryze imaginární vlastní hodnota matice $A$ a žádná vlastní hodnota nemá kladnou reálnou část, máme nejsložitější případ, kdy záleží na tvaru Jordanovy matice. Jsou-li všechna vlastní čísla vzájemně různá, pak je v tomto případě rovnice (10.6) stabilní. Řešení obsahuje jen tlumené nebo oscilující členy. Rovnice však může být v případě c) stabilní, i když existují vícenásobná vlastní čísla. To v případě, kdy matice odpovídající imaginárnímu kořenu $\lambda_i = \lambda_j$ mají $k_i = k_j = 1$, tj. v Joradnově tvaru matice $A$ je sice kořen $\lambda_i$ alespoň 2x na diagonále, ale je vždy spojen jen s $P^{(1)}=1$, Tedy vedle $\lambda_i$ není v Jordanově matici nikdy jednička. V ostatních případech, kdy vícenásobnému kořenu $\lambda_i$ odpovídá $k_i > 1$ se u periodického $e^{\lambda_i t}$ objevuje polynom alespoň 1.stupně v $t$ a rovnice (10.16) jsou nestabilní.

## 10.3 Vyšetřování stability kolineárních libračních bodů

Vyšetřeme nyní lineární stabilitu libračních bodů omezeného kruhového problému tří těles. Připomeňme pohybové rovnice (9.26)

(10.18)
$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad ,$$
$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad ,$$
$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad ,$$

kde tečkou značíme derivaci podle $\tau$ a

(10.19)
$$w = \left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\xi^2 + \eta^2\right) \quad ,$$

$\rho_1$, $\rho_2$ jsou dány (9.23)

(10.20)
$$\rho_1 = \left[(\xi - \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2\right]^{1/2} \quad ,$$
$$\rho_2 = \left[(\xi + 1 - \mu)^2 + \eta^2 + \zeta^2\right]^{1/2} \quad .$$

Vyšetřujme nyní pohyb okolo přímkových (kolineárních) libračních bodů. Označme $L_i = (\xi_i, 0, 0)$. Přitom je-li $L_i$ i-tý libračí bod

(10.21)
$$\nabla w(\xi_i, 0, 0) = 0 \quad .$$

Zavedeme počátek soustavy souřadnic do vyšetřovaného i-tého libračního bodu a rozvineme pravé strany pohybových rovnic do lineárních členů

(10.22)
$$\xi = \xi_i + x \quad ,$$
$$\eta = y \quad ,$$
$$\zeta = z \quad .$$

Potom

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \mathcal{W}_x(\xi_i+x,y,z) = \mathcal{W}_{xx}(\xi_i,0,0)x + \mathcal{W}_{xy}(\xi_i,0,0)y + \mathcal{W}_{xz}(\xi_i,0,0)z \quad , \tag{10.23}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \mathcal{W}_y(\xi_i+x,y,z) = \mathcal{W}_{yx}(\xi_i,0,0)x + \mathcal{W}_{yy}(\xi_i,0,0)y + \mathcal{W}_{yz}(\xi_i,0,0)z \quad ,$$

$$\ddot{z} = \mathcal{W}_z(\xi_i+x,y,z) = \mathcal{W}_{zx}(\xi_i,0,0)x + \mathcal{W}_{zy}(\xi_i,0,0)y + \mathcal{W}_{zz}(\xi_i,0,0)z \quad ,$$

kde indexy u $\mathcal{W}$ vyznačují parciální derivace počítané v příslušném libračním bodě. Abychom mohli použít teorii rozvinutou pro rovnici (10.4) převedeme soustavu (10.23) na soustavu 6 rovnic prvního řádu. Zavedeme

$$p_x = \dot{x} \quad , \quad p_y = \dot{y} \quad , \quad p_z = \dot{z} \quad . \tag{10.24}$$

Rovnice (10.23) a (10.24) potom dávají

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{W}_{xx} & \mathcal{W}_{xy} & \mathcal{W}_{xz} & 0 & 2 & 0 \\ \mathcal{W}_{yx} & \mathcal{W}_{yy} & \mathcal{W}_{yz} & -2 & 0 & 0 \\ \mathcal{W}_{zx} & \mathcal{W}_{zy} & \mathcal{W}_{zz} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \tag{10.25}$$

Spočtěme postupně čísla $\mathcal{W}_{xy}$, $\mathcal{W}_{xy}$ atd. Jde o čísla, neb jde o druhé derivace funkce $\mathcal{W}(\xi_i+x,y,z)$ spočtené v libračním bodě.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[ \frac{1-\mu}{[(\xi_i+x-\mu)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + \frac{\mu}{[(\xi_i+x+1-\mu)^2+y^2+z^2]^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\xi+x)^2 + \frac{1}{2}y^2 \right] = \xi_i+x - \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\xi_i+x-\mu) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi_i+x+1-\mu) \quad ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = y - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} y - \frac{\mu}{\rho_2^3} y \quad ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{1-\mu}{\rho_1^3} z - \frac{\mu}{\rho_2^3} z \quad .$$

Označme $R_1 = \rho_1(L_i) = |\xi_i - \mu|$ $\qquad$ $R_2 = \rho_2(L_i) = |\xi_i + 1 - \mu|$ .

Dále

$$\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right|_{L_i} = \left.\frac{\xi_i + x - \mu}{\rho_1}\right|_{L_i} = \frac{\xi_i - \mu}{R_1} = \begin{cases} -1 & \text{pro } L_1 \\ 1 & \text{pro } L_2 \\ -1 & \text{pro } L_3 \end{cases}$$

podobně

$$\left.\frac{\partial \rho_2}{\partial x}\right|_{L_i} = \left.\frac{\xi_i + x + 1 - \mu}{\rho_2}\right|_{L_i} = \frac{\xi_i + 1 - \mu}{R_2} = \begin{cases} 1 & \text{pro } L_1 \\ 1 & \text{pro } L_2 \\ -1 & \text{pro } L_3 \end{cases}$$

$$(10.26)\quad W_{xx} = \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_{L_i} = 1 - \frac{1-\mu}{R_1^3} - \frac{\mu}{R_2^3} + 3\,\frac{1-\mu}{R_1^4} R_1 + 3\,\frac{\mu}{R_2^4} R_2 = 1 + 2B_i \quad ,$$

kde jsme zavedli číslo

$$(10.27)\qquad B_i = \frac{1-\mu}{R_1^3} + \frac{\mu}{R_2^3} \quad ,$$

které samozřejmě závisí na libračním bodu $L_i$ . Podobně

$$(10.28)\quad W_{yy} = 1 - \frac{1-\mu}{R_1^3} - \frac{\mu}{R_2^3} = 1 - B_i \quad ,$$

$$(10.29)\quad W_{zz} = - \frac{1-\mu}{R_1^3} - \frac{\mu}{R_2^3} = - B_i \quad .$$

Dále se snadno přesvědčíme, že veškeré smíšené derivace jsou rovny nule. Platí totiž

$$\left.\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right|_{L_i} = \frac{y}{\varrho_1}_{L_i} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right|_{L_i} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right|_{L_i} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right|_{L_i} = 0 \; .$$

Rovnice (10.8) pro vlastní hodnoty matice linearizované soustavy tedy zní

$$Q = \det \begin{pmatrix} -\lambda & , & 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & -\lambda & , & 0 & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & -\lambda & , & 0 & , & 0 & , & 1 \\ 1+2B_i & , & 0 & , & 0 & , & -\lambda & , & 2 & , & 0 \\ 0 & , & 1-B_i & , & 0 & , & -2 & , & -\lambda & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & -B_i & , & 0 & , & 0 & , & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Rozvineme-li determinant podle 3.řádku, bude

$$Q = -\lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & , & 0 & , & 1, & 0, & 0 \\ 0 & , & -\lambda & , & 0, & 1, & 0 \\ 1-2B_i, & & 0 & , & -\lambda, & 2, & 0 \\ 0 & , & 1-B_i & , & -2, & -\lambda, & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0, & 0, & -\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -\lambda, & 0 & , & 0 & , & 1, & 0 \\ 0 & , & -\lambda & , & 0 & , & 0, & 1 \\ 1+2B_i, & 0 & , & 0 & , & -\lambda, & 2 \\ 0 & , & 1-B_i, & 0, & , & -2, & -\lambda \\ 0 & , & 0 & , & -B_i, & 0, & 0 \end{pmatrix} .$$

Rozvineme oba determinanty podle 5.řádku

$$Q = +\lambda^2 \det \begin{pmatrix} -\lambda & , & 0 & , & 1, & 0 \\ 0 & , & -\lambda & , & 0, & 1 \\ 1+2B_i, & & 0 & , & -\lambda, & 2 \\ 0 & , & 1-B_i & , & -2, & -\lambda \end{pmatrix} + B_i \det \begin{pmatrix} -\lambda & , & 0 & , & 1, & 0 \\ 0 & , & -\lambda & , & 0, & 1 \\ 1+2B_i, & & 0 & , & -\lambda, & 2 \\ 0 & , & 1-B_i & , & -2, & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \ldots \; (\lambda^2 + B_i) \det \begin{pmatrix} -\lambda & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ 0 & , & -\lambda & , & 0 & , & 1 \\ 1+2B_i, & & 0 & , & -\lambda & , & 2 \\ 0 & , & 1-B_i & , & -2 & , & -\lambda \end{pmatrix} \quad .$$

Konečně rozvoj podle 2.řádku s výpočtem obou determinantů dává

$$Q = (\lambda^2 + B_i)\left[-\lambda(-\lambda^3 + (1+2B_i)\lambda - 4\lambda) + (1+2B_i)(1-2B_i) - (1-B_i)\lambda^2\right] =$$

$$= (\lambda^2 + B_i)\left[\lambda^4 + (2-B_i)\lambda^2 + (1+2B_i)(1-B_i)\right].$$

Vzhledem k tomu, že $B_i > 0$ dostáváme přímo dvě vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{B_i} \quad .$$

Tato dvě charakterisická čísla bychom mohli dostat rovnou z (10.18), kde poslední rovnice je odseparována a po její linearizaci dostaneme $\ddot{\xi} = -B_i \xi$ , tedy řešení $A_1 \exp i\sqrt{B_i}\tau +$ $+ A_2 \exp - i\sqrt{B_i}\tau$ . U trojúhelníkových libračních bodů už budeme postupovat tímto způsobem. Tj. dvě vlastní čísla určíme z poslední separované rovnice a zbývající čtveřici z charakteristické rovnice plynoucí z prvních dvou rovnic, tedy rovnice čtvrtého stupně. Další čtyři vlastní čísla jsou určena bikvadratickou rovnicí

(10.30) $$\lambda^4 + (2-B_i)\lambda^2 + (1+2B_i)(1-B_i) = 0 \quad .$$

Determinant odpovídající kvadratické rovnice pro $\Lambda = \lambda^2$ je

(10.31) $$D = (2 - B_i)^2 - 4(1+2B_i)(1-B_i) = B_i(9B_i - 8)$$

Jak po chvíli uvidíme, je vždy $B_i \geq 1$ , tedy $D > 0 \Rightarrow$ obě řešení $\Lambda_1, \Lambda_2$ jsou reálná, jejich součin $\Lambda_1 \Lambda_2 = (1+2B_i)(1-B_i) < 0$ . Tedy jedno řešení $\Lambda_1$ je záporné, druhé kladné. Kladnému řešení

$$\Lambda_1 = \frac{B_i - 2 + \sqrt{D}}{2}$$

odpovídají dvě charakteristická čísla

$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\Lambda_1} \, .$$

Protože jedno z čísel $\lambda_3 = \sqrt{\Lambda_1}$ je kladné $\Rightarrow$ kolineární librační body jsou nestabilní již v lineární aproximaci, tedy jsou nestabilní obecně.

K úplnosti důkazu nestability kolineárních libračních center zbývá dokázat nerovnost $B_i > 1$ . Pro librační bod $L_1$ je nerovnost zřejmá, neb v tomto případě je $R_1 \leq 1$ , $R_2 \leq 1$ a tedy

$$B_1 = \frac{1-\mu}{R_1} + \frac{\mu}{R_2} \geq (1-\mu) + \mu = 1 \quad .$$

Pro $B_2$, $B_3$ využijeme (9.48), kterou souřadnice $\xi_i$ libračního bodu splňují. Platí tedy

$$\xi_i - \frac{\mu_1}{R_1^3}(\xi_i - \mu_2) - \frac{\mu_2}{R_2^3}(\xi_i + \mu_1) = 0$$

neboli

$$\xi_i\,(1 - B_i) = \mu_1 \mu_2 \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right) ,$$

tedy

$$1 - B_i = \mu_1 \mu_2 \left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right) \Big/ \xi_i \quad .$$

poz. pro dvě malá tělesa bylo by možné

Pro $i=2$ je $R_2 > R_1$ a $\xi_2 > 0 \Rightarrow 1 - B_i < 0 \Rightarrow B_i > 1$ .

Pro $i=3$ je $R_1 > R_2$ a $\xi_3 < 0 \Rightarrow 1 - B_i < 0 \Rightarrow B_i > 1$ .

Pro všechny tři přímkové body je tedy $B_i \geq 1$ .

## 10.4 Stabilita trojúhelníkových libračních bodů

Souřadnice trojúhelníkových libračních bodů jsou

$$(10.32)\quad L_{4,5} = (\mu - \tfrac{1}{2}\ ,\ \pm\sqrt{3/2},\ 0) = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \quad .$$

Položíme-li počátek souřadné soustavy $[L_i, x, y, z]$ do i-tého libračního bodu, tj.

$$(10.33)\quad \xi = \xi_i + x \ ,\ \eta = \eta + y \ ,\ \zeta = z \ ,$$

dostaneme po linearizaci rovnice

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = w_{xx}\, x + w_{xy}\, y + w_{xz}\, z \quad , \tag{10.34}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = w_{yx}\, x + w_{yy}\, y + w_{yz}\, z \quad ,$$

$$\ddot{z} = w_{zx}\, x + w_{zy}\, y + w_{zz}\, z \quad ,$$

kde např.

$$w_{xy} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}\right|_{L_i} \quad .$$

Protože platí

$$w_x = \xi - \frac{\mu_1}{\varrho_1^3}(\xi - \mu_2) - \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}(\xi + \mu_1) \quad , \tag{10.35}$$

$$w_y = \eta - \frac{\mu_1}{\varrho_1^3}\eta - \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}\eta \, ,$$

$$w_z = -\left(\frac{\mu_1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu_2}{\varrho_2^3}\right)\zeta \, ,$$

dostáváme

$$w_{xx} = \left[1 - \frac{\mu_1}{\varrho_1^3} - \frac{\mu_2}{\varrho_2^3} + 3\frac{\mu_1}{\varrho_1^5}(\xi - \mu_2)^2 + 3\frac{\mu_2}{\varrho_2^5}(\xi + \mu_1)^2\right]\Bigg|_{L_{4,5}} =$$

$$= 3\mu_1\left(\mu_2 - \tfrac{1}{2} - \mu_2\right)^2 + 3\mu_2\left(\mu_2 - \tfrac{1}{2} + \mu_1\right)^2 = \tfrac{3}{4}\mu_1 + \tfrac{3}{4}\mu_2 = \tfrac{3}{4}$$

$$w_{xy} = w_{yx} = \left[3\frac{\mu_1}{\varrho_1^5}(\xi - \mu_2)\eta + 3\frac{\mu_2}{\varrho_2^5}(\xi + \mu_1)\eta\right]\Bigg|_{L_{4,5}} =$$

$$= 3\mu_1\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\mu_2\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(\mu_2 - \mu_1) =$$

$$= \pm 3\frac{\sqrt{3}}{4}(2\mu - 1)$$

$$w_{xz} = w_{zx} = \left[\frac{3\mu_1}{\rho_1^5}(\xi - \mu_2)\xi + 3\frac{\mu_2}{\rho_2^5}(\xi + \mu_1)\xi\right]\Big|_{L_{4,5}} = 0 \quad ,$$

$$w_{yy} = \left[1 - \frac{\mu_1}{\rho_1^3} - \frac{\mu_2}{\rho_2^3} + 3\frac{\mu_1}{\rho_1^5}\eta^2 + 3\frac{\mu_2}{\rho_2^5}\eta^2\right]\Big|_{L_{4,5}} = 3\mu_1\frac{3}{4} + 3\mu_2\frac{3}{4} = \frac{9}{4} \quad ,$$

$$w_{yz} = w_{zy} = 0 \quad ,$$

$$w_{zz} = -\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3}\right)\Big|_{L_{4,5}} = -1 \quad .$$

Linearizované rovnice jsou tedy

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{3}{4}x \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu - 1)y \quad , \tag{10.36}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{9}{4}y \pm \frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu - 1)x \quad ,$$

$$\ddot{z} + z = 0 \quad ,$$

Rovnici pro $z$ můžeme rovnou vyřešit

$$z = A_1 e^{i\tau} + A_2 e^{-i\tau} = C\cos(\tau - \tau_0) \quad . \tag{10.37}$$

Vlastní hodnoty $\pm i$ vnesené tímto řešením zatím stabilitě nevadí. Dvojici rovnic pro $x,y$ převedeme na 4 rovnice prvního řádu zavedením

$$p_x = \dot{x} \qquad p_y = \dot{y} \quad . \tag{10.38}$$

Potom

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \pm B & 0 & 2 \\ \pm B & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix} \tag{10.39}$$

kde $B = \frac{3}{4}\sqrt{3}(2\mu-1)$ .

Odpovídající rovnice pro vlastní hodnoty

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \mp B & -\lambda & 2 \\ \mp B & \frac{9}{4} & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Rozvoj podle prvního řádku dává

$$-\lambda\,(-\lambda^3 \mp 2B + \tfrac{9}{4}\lambda - 4\lambda) + 1(\mp 2B\lambda + \tfrac{27}{16} - B^2 - \tfrac{3}{4}\lambda^2) =$$

$$= \lambda^4 + \lambda^2 + (\tfrac{27}{16} - B^2) = 0 \quad .$$

Protože platí

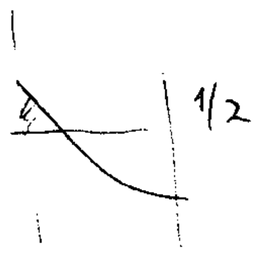
$$\tfrac{27}{16} - B^2 = \tfrac{27}{16} - \tfrac{27}{16}(2\mu - 1)^2 = \tfrac{27}{4}\mu(1-\mu) \quad ,$$

dostáváme charakteristickou rovnici

(10.40) $$\lambda^4 + \lambda^2 + \tfrac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \quad .$$

Determinant kvadratické rovnice pro veličinu $\Lambda = \lambda^2$ je

$$D = 1 - 27\mu(1-\mu) \quad .$$




$D(0) = 1$
$D(1/2) = 1 - \frac{27}{4} = -\frac{23}{4}$

Je-li $D > 0 \Rightarrow \sqrt{D}$ je reálné číslo a

$$\Lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}\left[-1 \pm \sqrt{D}\right]$$

jsou obě reálná. Protože součin $\Lambda_1 \Lambda_2 = \frac{27}{4}\mu(1-\mu)$ je kladný a součet $\Lambda_1 + \Lambda_2 = -1$ je záporný , je jak $\Lambda_1$ , tak $\Lambda_2$ záporné číslo a tedy všechna čtyři $\lambda$ jsou ryze imaginární a různá. Pro $D > 0$ je tedy librační trojúhelníkové řešení stabilní. Podmínka $D > 0$ vede na

$$27\mu^2 - 27\mu + 1 > 0 \quad .$$

Kořeny rovnice $27\mu^2 - 27\mu + 1 = 0$ jsou

$$\mu_{A,B} = \frac{27 \pm \sqrt{23.27}}{54} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23.27}}{54} \quad .$$

Větší z kořenů je větší než 0,5, není proto zajímavý. Pro

(10.41) $$\mu < \mu_B = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}}\right) = 0{,}038520896$$

je tedy trojúhelníkový librační bod stabilní. Pokud $\mu > \mu_B$ je $D<0$ , $\Lambda_{1,2}$ jsou komplexně sdružená

$$\Lambda_{1,2} = |\Lambda| \cdot e^{\pm i\varphi} \qquad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle \quad .$$

Buď $\lambda_{1,2}$ kořeny rovnice $\lambda^2 = \Lambda_1$

$$\lambda_1 = \sqrt{|\Lambda|} = \sqrt{|\Lambda|}\ e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{|\Lambda|}\ e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)} \quad .$$

Už tato dvě $\lambda$ mají opačnou reálnou část, tedy alespoň pro jedno z nich, totiž pro $\lambda_2$ je tato reálná část záporná. Podle vět o stabilitě je tedy pro $\mu > \mu_B$ trojúhelníkový librační bod nestabilní.

## 10.5 Librační body v eliptickém problému

Na závěr úvah o problému tří těles nalezneme speciální řešení omezeného eliptického problému. Toto řešení je spojeno se jménem českého nebeského mechanika profesora Nechvíle, který je

publikoval v r.1926.

Lagrangián problému je dán podobně jako u kruhového pčoblému vzorcem (9.1)

$$(10.1)\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{\mu_1}{R_1} + \frac{\mu_2}{R_2} \quad ,$$

kde fixní souřadnicovou soustavu $[T;\ X,\ Y,\ Z]$ již předpokládáme bezrozměrnou, tj. gravitační konstanta $G_0 = 1$ , $\mu_1 + \mu_2 = 1$ a velká poloosa eliptického pohybu primárů $a' = 1$ . Protože jde o eliptický pohyb, obdoba vzorců (9.4) má nyní tvar

$$(10.2)\quad X_1 = r(\tau)\,\mu_2 \cos v(\tau) \ , \quad Y_1 = r(\tau)\,\mu_2 \sin v(\tau) \quad ,$$

$$X_2 = -r(\tau)\,\mu_1 \cos v(\tau) \ , \quad Y_2 = -r(\tau)\,\mu_1 \sin v(\tau) \quad ,$$

kde $r(\tau)$ je vzdálenost primárů, $v\ (\tau)$ je pravá anomálie pro pohyb primárů. Platí samozřejmě

$$\underline{r^2\dot{v}} = M = \sqrt{Gma(1-e^2)} = \underline{na^2\sqrt{1-e^2}}$$

$$(10.3)\quad r(\tau) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos v(\tau)} \quad .$$

Zavedeme-li souřadnice $[T;\ x,\ y,\ z]$ otáčející se tak, že osa x zachovává směr primárů, tj.

$$(10.4)\quad X = x\cos v - y\sin v \quad ,$$

$$Y = x\sin v + y\cos v \quad ,$$

dostaneme pro kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + 2\dot{v}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{v}^2(x^2+y^2) \ ,$$

zatímco pro potenciální energii

$$U = -\left(\frac{\mu_1}{R_1} + \frac{\mu_2}{R_2}\right) \quad , \text{ kde } \quad R_1^2 = (x - \mu_2\, r(t))^2 + y^2 + z^2 \quad ,$$

$$R_2^2 = (x + \mu_1\, r(t))^2 + y^2 + z^2 \quad .$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu potom dávají

$$\ddot{x} - 2\,\dot{v}\,\dot{y} - \ddot{v}\,y - \dot{v}^2 x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad , \tag{10.5}$$

$$\ddot{y} + 2\,\dot{v}\,\dot{x} + \ddot{v}\,x - \dot{v}^2 y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad ,$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad .$$

Konečně zaveďme pulsující souřadnice $[T; \xi, \eta, \zeta]$ vztahem

$$x = r(\tau)\,\xi \quad , \tag{10.6}$$

$$y = r(\tau)\,\eta \quad ,$$

$$z = r(\tau)\,\zeta \quad .$$

Potom

$$U = -\frac{1}{r(\tau)}\left(\frac{\mu_1}{\varrho_1} + \frac{\mu_2}{\varrho_2}\right), \tag{10.7}$$

kde

$$\varrho_1^2 = (\xi - \mu_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad , \quad \varrho_2^2 = (\xi + \mu_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad . \tag{10.8}$$

Zavedeme-li

$$R = \frac{\mu_1}{\varrho_1} + \frac{\mu_2}{\varrho_2} \quad , \tag{10.9}$$

potom

(10.10) $$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \xi} R \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \eta} R \, , \, \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \zeta} R \, .$$

Zapíšeme rovnice (10.5) pro $\xi, \eta, \zeta$ s tím, že místo času $\tau$ zavedeme nezávislou proměnnou v . Tedy

$$\frac{d}{d\tau} = v \frac{d}{dv} \, .$$

Označíme-li derivaci podle v čárkou, potom pro vztah mezi derivací funkce f podle $\tau$ a v platí

$$\dot{f} = \dot{v} f' \quad .$$

Abychom mohli dosadit do (10.5), vypočteme nejprve $\dot{x}$, $\ddot{x}$ atd. pomocí $\xi'$, $\xi''$ atd.

$$\dot{x} = \dot{v}(r(\tau)\xi)' = \dot{v}(r'\xi + r\xi') \, ,$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{d\tau} \dot{v}(r'\xi + r\xi') = \ddot{v}(r'\xi + r\xi') + v^2(r''\xi + 2r'\xi' + z\,\xi'') \, ,$$

$$\dot{y} = \dot{v}\,(r'\eta + r\eta') \, ,$$

$$\ddot{y} = \ddot{v}(r'\eta + r\eta') + \dot{v}^2(r''\eta + 2r'\eta' + r\eta'') \quad ,$$

$$\dot{z} = \dot{v}(r'\zeta + r\zeta') \quad ,$$

$$\ddot{z} = \ddot{v}(r'\zeta + r\zeta') + \dot{v}^2(r''\zeta + 2r'\zeta' + r\zeta'') \quad .$$

Dosazením do (10.5)

$$\ddot{v}(r'\xi + r\xi') + v^2(r''\xi + 2r'\xi' + r\xi'') - 2\dot{v}^2(r'\eta + r\eta') -$$

$$- \ddot{v}\, r\eta - \dot{v}^2 r\xi = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial R}{\partial \xi} \quad ,$$

tedy srovnám-li podle čárkovaných členů

(10.11) $$\dot{v}^2\, r\, \xi'' + \xi'(\ddot{v}\, r + 2\,\dot{v}^2\, r') + \xi\,(\ddot{v}\, r' + \dot{v}^2 r'' - \dot{v}^2 r) -$$

$$- \eta'\, 2\dot{v}^2\, r - \eta(\ddot{v}\, r + 2\dot{v}^2 r') = \frac{1}{r^2}\frac{\partial R}{\partial \xi} \quad .$$

Podobně z dalších dvou rovnic (10.5)

$$(10.12)\quad \dot{v}^2 r\eta'' + \eta'(\ddot{v}\, r + 2\dot{v}^2 r') + \eta(\ddot{v}\, r' + \dot{v}^2 r'' - \dot{v}^2 r) +$$

$$+ \xi'\, 2v^2 r + \xi(\ddot{v}\, r + 2v^2\, r') = \frac{1}{r^2}\frac{\partial R}{\partial \eta} \quad ,$$

$$(10.13)\quad \dot{v}^2 r\xi'' + \xi'(\ddot{v}\, r + 2\dot{v}^2 r') + \xi(\ddot{v}\, r' + \dot{v}^2 r'') = \frac{1}{r^2}\frac{\partial R}{\partial \xi} \quad .$$

Protože pohyb primárů není ovlivněn třetím tělesem (jde stále o omezený problém), platí pro pohyb primárů zákon zachování momentu hybnosti (srovnej (2.16))

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{v}\, r^2) = 0 \qquad \text{tedy}$$

$$\ddot{v}\, r^2 + \dot{v}^2 (r^2)' = \ddot{v}\, r^2 + 2\dot{v}^2\, r\, r' = r(\ddot{v}\, r + 2\dot{v}^2\, r') = 0 \quad .$$

Platí tedy

$$(10.14)\qquad \ddot{v}\, r + 2\dot{v}^2\, r' = 0 \quad ,$$

díky tomu vypadne řada členů v rovnicích (10.11) - (10.13). Ukážeme dále, že platí

$$(10.15)\quad \ddot{v}\, r' + \dot{v}^2 r'' - \dot{v}^2 r = -\dot{v}^2 \frac{r^2}{1-e^2} \quad ,$$

což povede k dalšímu zjednodušení rovnic. Pro důkaz (10.15) vyjdeme ze zákona zachování momentu hybnosti primárů (2.16) v kombinaci z (2.36)

$$r^2\dot{v} = \sqrt{1 - e^2} \quad = C$$

odtud

$$\ddot{v} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{C}{r^2}\right) = -\frac{2C}{r^3}\dot{r} = -\frac{2C}{r^3}\dot{v}\, r' = -\frac{2}{r}\dot{v}^2\, r' \quad ,$$

a proto

$$\ddot{v}\, r' + \dot{v}^2 r'' - \dot{v}^2 r = \dot{v}^2 (r'' - r - \frac{2}{r} (r')^2) \quad .$$

Veličiny $r'$, $r''$ dostaneme derivováním (10.3)

$$r' = \frac{d}{dv} \frac{C^2}{1+e \cos v} = + \frac{C^2 e \sin v}{(1+e \cos v)^2} = \frac{e \sin v}{C^2} r^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{r} (r')^2 = \frac{2e^2 \sin^2 v}{C^4} r^3$$

$$r'' = \frac{d}{dv} r' = \frac{d}{dv} \frac{e \sin v}{C^2} r^2 = + \frac{e \cos v}{C^2} r^2 + 2 \frac{e \sin v}{C^2} r\, r' =$$

$$= + \frac{e \cos v}{C^2} r^2 + 2 \frac{e^2 \sin^2 v}{C^4} r^3 \quad .$$

Tedy

$$r'' - r - \frac{2}{r} (r')^2 = \frac{e \cos v}{C^2} r^2 + 2 \frac{e^2 \sin^2 v}{C^4} r^3 - r - \frac{2e^2 \sin^2 v}{C^4} =$$

$$= \frac{e \cos v}{C^2} r^2 - r = \frac{r^2}{C^2} \left( \frac{C^2}{r} - 1 \right) - r = - \frac{r^2}{C^2}$$

a pro další z koeficientů v (10.11) - (10.13) jsme tak odvodili

$$(10.16) \qquad \ddot{v}\, r' + v^2 r'' - \dot{v}^2 r = - \dot{v}^2 \frac{r^2}{C} \quad .$$

Dosaďme do (10.11)

$$\dot{v}^2 r \xi'' - \xi \dot{v}^2 \frac{r^2}{C^2} - 2\dot{v}^2 r \eta' = \frac{1}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \xi} \quad ,$$

tedy po vydělení obou stran $C^2/r^3$

$$(10.17) \qquad \xi'' - 2 \eta' = \frac{r}{C^2} \frac{\partial R}{\partial \xi} + \xi \frac{r}{C^2} = \frac{r}{C^2} \left[ \xi + \frac{\partial R}{\partial \xi} \right] \quad .$$

Podobně z dalších 2 rovnic (10.12) a (10.13) dostaneme

$$\eta'' + 2\xi' = \frac{r}{c^2}\left[\eta + \frac{\partial R}{\partial \eta}\right] \tag{10.18}$$

$$\xi'' + \left(1 - \frac{r}{c^2}\xi\right) = \frac{r}{c^2}\frac{\partial R}{\partial \xi} \quad . \tag{10.19}$$

$\left(\frac{\mu_1}{\rho_1} + \frac{\mu_2}{\rho_2}\right)$

Zavedeme-li konečně

$$\Omega = R + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}\xi^2 \, e \cos v \quad , \tag{10.20}$$

můžeme (10.17), (10.18) a (10.19) zapsat ve tvaru

$$\xi'' - 2\eta' = \frac{1}{1+e\cos v}\frac{\partial}{\partial \xi}\Omega \tag{10.21}$$

$$\eta'' + 2\xi' = \frac{1}{1+e\cos v}\frac{\partial}{\partial \eta}\Omega$$

$$\xi'' = \frac{1}{1+e\cos v}\frac{\partial}{\partial \xi}\Omega \quad .$$

Je zřejmé, že stacionární řešení těchto rovnic splňují $\nabla\Omega = 0$ , tj.

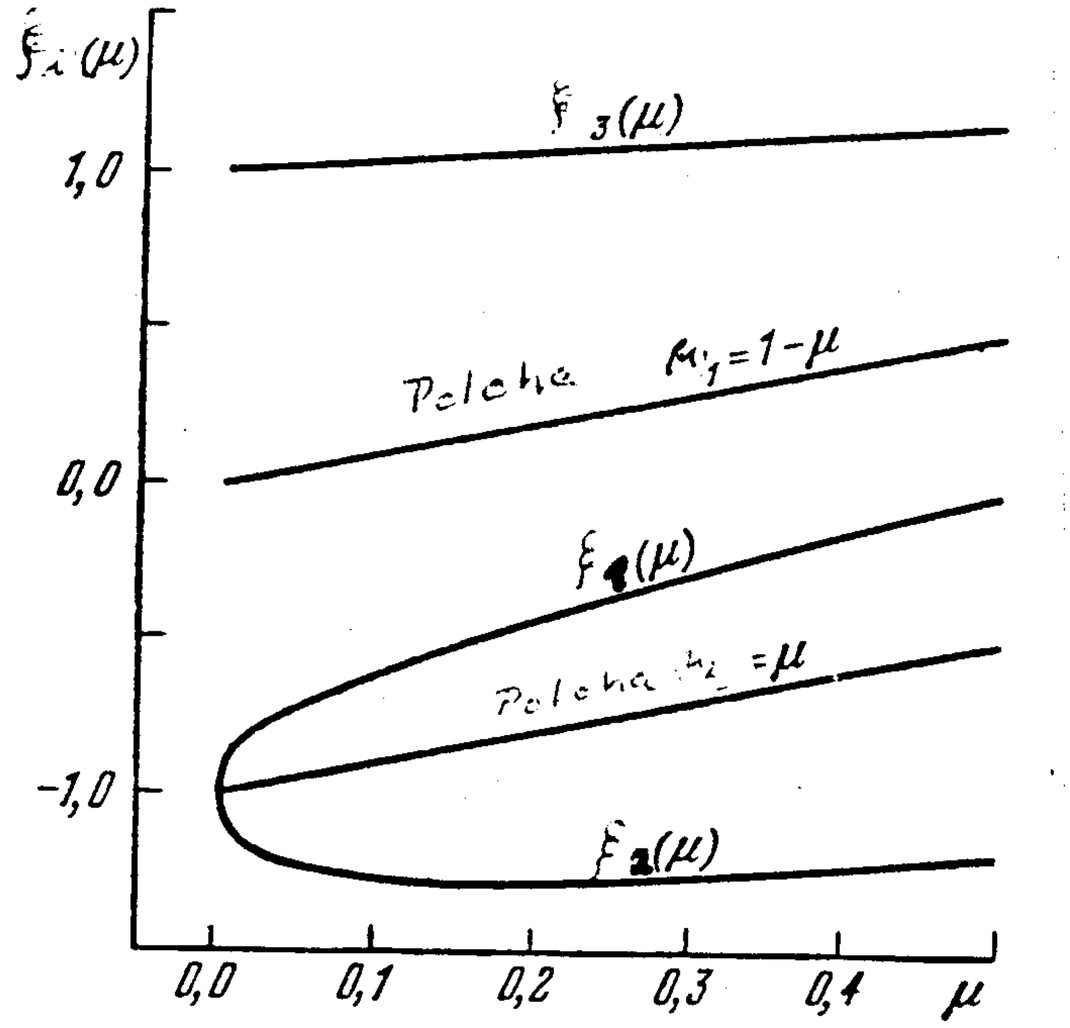
$$\xi - \frac{\mu_1}{\rho_1}(\xi - \mu_2) - \frac{\mu_2}{\rho_1}(\xi + \mu_1) = 0 \quad ,$$

$$\eta - \frac{\eta_1}{\rho_1^3}\eta - \frac{\eta_2}{\rho_2^3}\eta = 0 \quad ,$$

$$-\left(\frac{\mu_1}{\rho_1^3} + \frac{\mu_2}{\rho_2^3} + e\cos v\right)\xi = 0 \quad .$$

Opět musí platit $\xi = 0$ a rovnice pro $\eta$ , $\xi$ jsou úplně stejné jako pro kruhový pohyb. Tedy v rotujících a pulsujících souřad-

nicích existují opět librační body určené stejnými souřadnicemi jako kruhový pohyb. Kdybychom vyšetřovali stabilitu těchto libračních bodů v lineární aproximaci, dostali bychom nestabilitu pro přímkové librační body, zatímco pro trojúhelníkové librační body by se oblast stability v $\mu$ pro dané e rozpadala na dva intervaly. Oblast stability leží uvnitř křivky na obr.4.




Obr.3 Poloha primárů a libračních bodů v omezeném problému tří těles