Naznačme nyní, bez nároků na kvantitativní detaily, jakou má poruchový potenciál R_i pro pohyb i-té planety závislost na orbitálních elementech. To potřebujeme pro aplikaci Lagrangeových rovnic. Zároveň připomínáme, že se budeme stručně pokoušet v rámci aproximace středování přes rychlé proměnné ℓ (střední anomálie) a to nezávisle pro i-tou a j-tou (interagující) planety. Připomeňme, že

$$R_i = - \sum_{j \neq i} G m_j \left\{ \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_i^3} \right\}$$

V prvém kroku ukážeme, že střední hodnota nepřímé části poruchy $\left(G m_j \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_i^3} \right)$ je vždy nulová a nepřispívá tedy k sekulárním změnám drah planet.

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\ell_i \, d\ell_j \, r_j \frac{\overbrace{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}^{\cos S}}{r_i^2}$$

přejdeme ke středování přes pravou anomálii

$$d\ell \to \frac{1}{\eta} \left(\frac{r}{a} \right)^2 df$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\eta_i \eta_j} \iint df_i \, df_j \cancel{\left(\frac{r_i}{a_i} \right)^2} \left(\frac{r_j}{a_j} \right)^2 \cos S \frac{r_j}{\cancel{r_i^2}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\eta_i \eta_j a_i^2 a_j^2} \iint df_i \, df_j \, r_j^3 \cos S$$

Nyní $\cos S = (\cos f_i \, \vec{e}_{pi} + \sin f_i \, \vec{e}_{ai}) \cdot (\cos f_j \, \vec{e}_{pj} + \sin f_j \, \vec{e}_{aj})$
takže počítaná veličina je

$$\propto \ldots \int_0^{2\pi} df_i \, (\cos f_i \, \vec{e}_{pi} + \sin f_i \, \vec{e}_{ai}) = 0$$

Pro druhý planet $i \leftrightarrow j$ tedy máme předpověď (P2)

$$\left.\begin{aligned} \overline{R}_i &= -Gm_j \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^2} \iint dl_i\, dl_j \frac{1}{\Delta_{ij}}}_{R_{ij}} \\ \overline{R}_j &= \frac{m_i}{m_j} \overline{R}_i \end{aligned}\right\}$$ v Lagrangeových rovnicích i-té a j-té planety.

Přímý výpočet $\overline{R}_i$ je možný, ale algebraicky náročný, a to i v případě, že půjčí omezíme na případ drah s malou hodnotou excentricity a sklonu k referenční rovině. Jmenovitě budeme předpokládat, že $(e_i, e_j, \sin i_i/2, \sin i_j/2)$ jsou všechno veličiny malého řádu $\sim \varepsilon$ a $\overline{R}_i$ nám postačí do $\sim \varepsilon^2$. Samozřejmě poznamenáváme, že z principu středování přes $l(\bar{a}\ \lambda)$, v této aproximaci jsou hodnoty střední velké poloosy $\underline{a_i}, \underline{a_j}$ konstantní.

R_{ij} odpovídá potenciální energii konfigurace dvou eliptických prstenců v prostoru. Každá z nich je jednoznačně charakterizována

- $\vec{n}_i = \begin{bmatrix} \sin i \sin\Omega \\ -\sin i \cos\Omega \\ \cos i \end{bmatrix}_i$ normálovým vektorem k dráze

- $\vec{K}_i = e . \vec{e}_{p_i}$ Lenzovým vektorem směřujícím k pericentru

očekáváme tedy, že $R_{ij} = R_{ij}(\vec{n}_i, \vec{K}_i; \vec{n}_j, \vec{K}_j)$

a protože jde o skalární veličinu musí záviset jen na skalárních součinech označených vektorů.

$$(\vec{n}_i, \vec{K}_i) \longleftrightarrow (\vec{n}_j, \vec{K}_j)$$

vypišme seznam možných skalárních součinů

$(\vec{n}_i\cdot\vec{K}_i)$, $(\vec{n}_i\cdot\vec{K}_i)^2$, ...

$(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)$, $(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)^2$, ...

$(\vec{n}_i\cdot\vec{K}_j)$, $(\vec{n}_i\cdot\vec{K}_j)^2$, ...

$(\vec{K}_i\cdot\vec{K}_i)$, $(\vec{K}_i\cdot\vec{K}_i)^2$, ...

$(\vec{K}_i\cdot\vec{n}_j)$, $(\vec{K}_i\cdot\vec{n}_j)^2$, ...

$(\vec{n}_j\cdot\vec{K}_j)$, $(\vec{n}_j\cdot\vec{K}_j)^2$, ...

$(\vec{K}_j\cdot\vec{K}_j)$, $(\vec{K}_j\cdot\vec{K}_j)^2$, ...

$(\vec{K}_i\cdot\vec{K}_j)$, $(\vec{K}_i\cdot\vec{K}_j)^2$, ...

plus ve vyšších řádech můžeme mít kombinace, jako

$(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)(\vec{K}_i\cdot\vec{K}_j)$, ...

každý takovýto člen přispěje do R_{ij} s nějakým koeficientem závislým na a_i, a_j.

Pro naše účely ale velkou řadu vyloučíme. Některé se v R_{ij} v principu neobjeví, některé jsou vyššího řádu než ε^2. Např. jednoduše ~~vyjdeme~~ vidíme, že $(K_i\cdot K_j)^2\sim\varepsilon^4$, $(n_i\cdot K_j)^2\sim\varepsilon^4$ .... Členy do řádu ε^2 jsou ordinovány modu.

Z nich, ale se řada nerealizuje v důsledku následujícího argumentu: záměna $\vec{n}\to-\vec{n}$ u libovolné planety značí jen opačné pohlížení těla dolů, a nemůže změnit R_{ij}. Odtud plyne, že všechny členy, které obsahují $\vec{n}_i\ (\vec{n}_j)$ lineárně (nebo v liché mocnině) musí mít v principu nulový koeficient. Zbývají tedy jen $\underline{3}$ ~~čle~~ členy do řádu ε^2:

$$\boxed{\begin{array}{l} \circ\ (\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)^2 \\ \circ\ (\vec{K}_i\cdot\vec{K}_i),\ (\vec{K}_j\cdot\vec{K}_j) \\ \circ\ (\vec{K}_i\cdot\vec{K}_j)\quad (i\neq j) \end{array}}$$

- $$\vec{n} = \begin{bmatrix} \sin i \sin\Omega \\ -\sin i\cos\Omega \\ \cos i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin i/2 \cos i/2 \sin\Omega \\ -2\sin i/2\cos i/2\cos\Omega \\ 1-2\sin^2 i/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p + O(\varepsilon^3) \\ -2q + O(\varepsilon^3) \\ 1-2p^2-2q^2 \end{bmatrix}$$

a tudíž

$$(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j) = 1 + 4(q_iq_j+p_ip_j) - 2(q_i^2+p_i^2+q_j^2+p_j^2) + O(\varepsilon^4)$$

$$(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)^2 = 1 + 8(q_iq_j+p_ip_j) - 4(q_i^2+p_i^2+q_j^2+p_j^2) + O(\varepsilon^4)$$

$$\boxed{1-(\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j)^2 = 4\left[\zeta_i\bar{\zeta}_j + \zeta_j\bar{\zeta}_i - \zeta_i\bar{\zeta}_i - \zeta_j\bar{\zeta}_j\right]}$$

- $$\vec{e}_p = \begin{bmatrix} \cos\tilde{\omega} + 2\sin^2 i/2 \sin\Omega\sin\omega \\ \sin\tilde{\omega} - 2\sin^2 i/2\cos\Omega\sin\omega \\ 2\sin i/2\cos i/2 \sin\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\tilde{\omega} + O(\varepsilon^2) \\ \sin\tilde{\omega} + O(\varepsilon^2) \\ O(\varepsilon^1) \end{bmatrix}$$

tedy $$\vec{K} = e\,\vec{e}_p = \begin{bmatrix} k + O(\varepsilon^3) \\ h + O(\varepsilon^3) \\ O(\varepsilon^2) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{K}_i\cdot\vec{K}_j = k_ik_j + h_ih_j = \tfrac{1}{2}(z_i\bar{z}_j + z_j\bar{z}_i)}\quad (i\neq j)$$

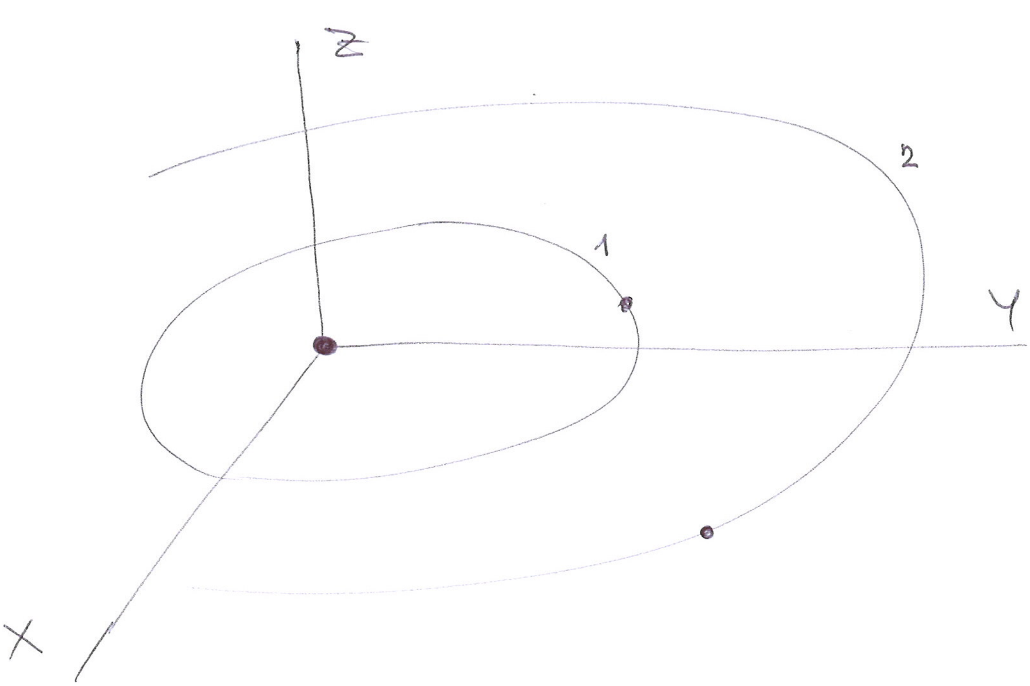
a samozřejmě $K_i\cdot K_i = e^2 = z_i\bar{z}_i \ldots$

Očekávaný tvar R_{ij} (do ε^2) tedy je

$$\boxed{\begin{aligned} R_{ij} = {} & B(a_i,a_j)\left[z_i\bar{z}_i + z_j\bar{z}_j\right] + \bar{B}(a_i,a_j)\left[z_i\bar{z}_j + z_j\bar{z}_i\right] \\ & + C(a_i,a_j)\left[\xi_i\bar{\xi}_j + \xi_j\bar{\xi}_i - \xi_i\bar{\xi}_i - \xi_j\bar{\xi}_j\right] + O(\varepsilon^4) \end{aligned}}$$

Tento výsledek se potvrzuje přímým výpočtem, který navíc poskytuje skutečný tvar funkcí $B(a_i,a_j)$, $\bar{B}(a_i,a_j)$, $C(a_i,a_j)$. My je budeme dále pouze konstatovat.

Začneme případem dvou interagujících planet, který je algebraicky jednodušší a navíc obsahuje všechny kvalitativní výsledky i obecného případu n-planet.



Uvažujme nejdříve případ dvou planet, 1 a 2 tak, že dráha 1 leží uvnitř dráhy 2. Středování poruchové funkce R_1 a R_2, kterou působí planeta 2 na 1, resp. 1 na 2, dává takovýto tvar

$$\bar{R}_1 = -Gm_2 \left[N_{12}\left(z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2\right) - P_{12}\left(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1\right) - 4N_{12}\left(\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \zeta_2\bar{\zeta}_2 - \zeta_1\bar{\zeta}_2 - \zeta_2\bar{\zeta}_1\right)\right]$$

$$\bar{R}_2 = \frac{m_1}{m_2}\bar{R}_1$$

kde připomínáme

$$z = e\exp(i\tilde{\omega})$$
$$\zeta = \sin i/2 \, \exp(i\Omega)$$

$$N_{12} = \frac{1}{8a_2}\alpha\, b^{(1)}_{3/2}(\alpha), \quad P_{12} = \frac{1}{8a_2}\alpha\, b^{(2)}_{3/2}(\alpha), \quad \alpha = \frac{a_1}{a_2}$$

a definice $b^{(j)}_s(\alpha)$: tzv. Laplaceovy koeficienty

$$(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} b^{(j)}_s(\alpha)\cos jx =$$

$$= \frac{1}{2} b^{(0)}_s(\alpha) + \sum_{1}^{\infty} b^{(j)}_s(\alpha)\cos jx$$

Lagrangeovy pohybové rovnice pro 1 a 2 planetu pak dávají

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot z_1 &= -\frac{2i}{n_1 a_1^2}\frac{\partial \bar R_1}{\partial \bar z_1} + O(3)\\
\dot \xi_1 &= -\frac{i}{2 n_1 a_1^2}\frac{\partial \bar R_1}{\partial \bar \xi_1} + O(3)\\
\dot z_2 &= -\frac{2i}{n_2 a_2^2}\frac{\partial \bar R_2}{\partial \bar z_2} + O(3)\\
\dot \xi_2 &= -\frac{i}{2 n_2 a_2^2}\frac{\partial \bar R_2}{\partial \bar \xi_2} + O(3)
\end{aligned}}$$

$O(e_1^2 \sin i_1/2,\ e_1 \sin^2 i/2, \dots)$ jakákoli veličina 3-řádu v malých parametrech $[e_1, e_2, \sin i_1/2, \sin i_2/2]$

& $\boxed{\dot a_1 = \dot a_2 = 0}$

potřebné derivace jsou

$$\frac{\partial \bar R_1}{\partial \bar z_1} = G m_2 \left[N_{12} z_1 - P_{12} z_2\right], \quad \frac{\partial \bar R_2}{\partial \bar z_2} = G m_1 \left[N_{12} z_2 - P_{12} z_1\right]$$

$$\frac{\partial \bar R_1}{\partial \bar \xi_1} = -4 G m_2 N_{12} (\xi_1 - \xi_2), \quad \frac{\partial \bar R_2}{\partial \bar \xi_2} = -4 G m_1 N_{12} (\xi_2 - \xi_1)$$

tedy dostáváme rovnice

(A)

$$\dot z_1 = +\frac{2i}{n_1 a_1^2} G m_2 (N_{12} z_1 - P_{12} z_2)$$
$$\dot z_2 = +\frac{2i}{n_2 a_2^2} G m_1 (N_{12} z_2 - P_{12} z_1)$$

(SEPAROVANÉ)

(B)

$$\dot \xi_1 = \cancel{-}\,\frac{2i}{n_1 a_1^2} G m_2 N_{12} (\xi_1 - \xi_2)$$
$$\dot \xi_2 = \cancel{-}\,\frac{2i}{n_2 a_2^2} G m_1 N_{12} (\xi_2 - \xi_1)$$

Podívejme se tedy nejdříve na rovnice (A), které určují změny excentricitních vektorů z_1, z_2:

Přejdeme k notaci v reálné a imaginární složce: $z = k + ih$

$$iz = -h + ik$$

$$\dot{k}_1 = \cancel{+}-\frac{2Gm_2}{n_1 a_1^2}\left(N_{12} h_1 - P_{12} h_2\right)$$

$$\dot{h}_1 = +\frac{2Gm_2}{n_1 a_1^2}\left(N_{12} k_1 - P_{12} k_2\right)$$

$$\dot{k}_2 = \cancel{+}-\frac{2Gm_1}{n_2 a_2^2}\left(N_{12} h_2 - P_{12} h_1\right)$$

$$\dot{h}_2 = +\frac{2Gm_1}{n_2 a_2^2}\left(N_{12} k_2 - P_{12} k_1\right)$$

řešení se zjednoduší v proměnných

$$K_i = k_i \sqrt{m_i n_i a_i^2} \qquad H_i = h_i \sqrt{m_i n_i a_i^2} \qquad i = 1,2$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -A_{11} H_1 - A_{12} H_2$$

$$\frac{dK_2}{dt} = -A_{12} H_1 - A_{22} H_2$$

$$\frac{dH_1}{dt} = +A_{11} K_1 + A_{12} K_2$$

$$\frac{dH_2}{dt} = +A_{12} K_1 + A_{22} K_2$$

$$A_{11} = 2\frac{Gm_2}{n_1 a_1^2} N_{12}$$

$$A_{22} = 2\frac{Gm_1}{n_2 a_2^2} N_{12}$$

$$A_{12} = -2\frac{G\sqrt{m_1 m_2}}{a_1 a_2 \sqrt{n_1 n_2}} P_{12}$$

okamžitě vidíme, že existuje integrál

$$\boxed{K_1^2 + H_1^2 + K_2^2 + H_2^2 = \text{konst.}}$$

tj. $m_1 n_1 a_1^2 e_1^2 + m_2 n_2 a_2^2 e_2^2 = \text{konst.}$

odtud okamžitě plyne, že excentricity oscilují v omezeném intervalu hodnot; systém rovnice pro (K_1, K_2, H_1, H_2) je lineární s konstantními koeficienty, tedy můžeme určit vlastní hodnoty matice soustavy

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\emptyset} & -A_{11}, & -A_{12} \\ & & -A_{12}, & -A_{22} \\ \hline A_{11}, & A_{12} & \multicolumn{2}{c}{\emptyset} \\ A_{12}, & A_{22} & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$\det\left[\begin{array}{cc|cc} -\lambda & 0 & -A_{11} & -A_{12} \\ 0 & -\lambda & -A_{12} & -A_{22} \\ \hline A_{11} & A_{12} & -\lambda & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & -\lambda \end{array}\right] = \dots = \underline{\lambda^4 + \lambda^2\left[A_{11}^2 + A_{22}^2 + 2A_{12}^2\right] + (\det A)^2 = 0}$$

když $\lambda^2 = \Lambda$ pak oba kořeny Λ_1, Λ_2 jsou reálné a záporné, neboť

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = -\left[A_{11}^2 + A_{22}^2 + 2A_{12}^2\right] < 0$$

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = (\det A)^2 > 0$$

---

tedy $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_3, \lambda_4)$ jsou dva páry komplexně sdružených a ryze imaginárních hodnot

$$\lambda_{1,2} = \pm i g_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm i g_2$$

Přímější cesta k získání vlastních frekvencí (g_1, g_2) systému je předpokládat řešení ve tvaru

$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= M_1 \cos(gt+\beta), & H_1 &= M_1 \sin(gt+\beta) \\ K_2 &= M_2 \cos(gt+\beta), & H_2 &= M_2 \sin(gt+\beta) \end{aligned}}$$

pak dosazením do rovnic pro (K_1, K_2, H_1, H_2) máme

$$\begin{bmatrix} A_{11}-g, & A_{12} \\ A_{12}, & A_{22}-g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (**)$$

$$g^2 - (A_{11}+A_{22})g + \det(A) = 0$$ s řešeními

$$\boxed{g_{1,2} = \frac{A_{11}+A_{22} \pm \sqrt{(A_{11}-A_{22})^2+4A_{12}^2}}{2}}$$

poněvadž $\det(A) > 0$ bude i kořen s "−" kladný; z definice "A" k tomu stačí aby $N_{12} > P_{12}$, tj. $b^{(1)}_{3/2}(\alpha) > b^{(2)}_{3/2}(\alpha)$

toto snadno vidíme z definice

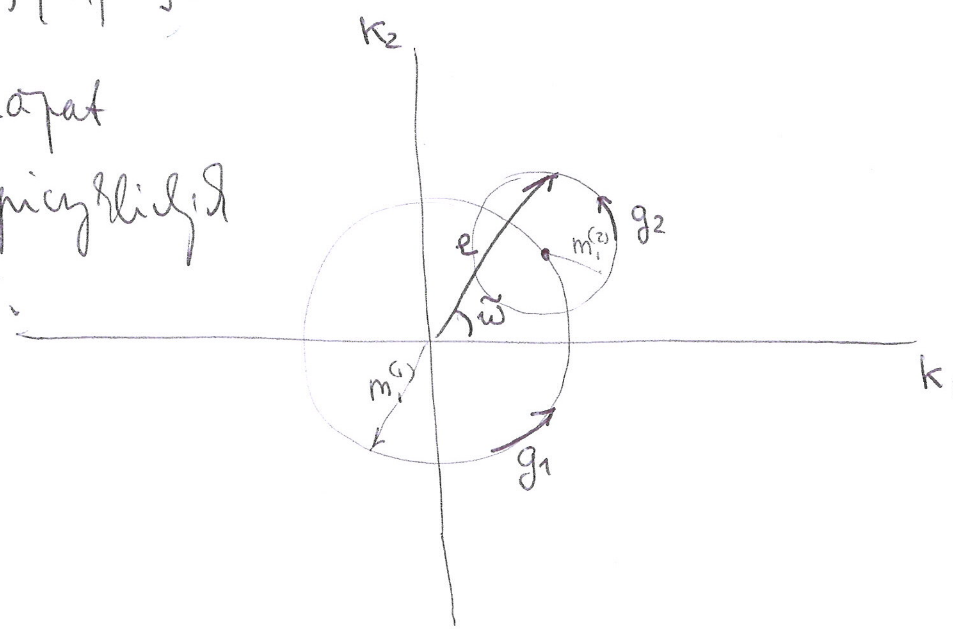
$$b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^{-s}\cos jx \, dx .$$

Obě frekvence g_1, g_2 jsou tedy kladné. Obecné řešení tedy je

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{m_1 n_1 a_1^2}\, z_1 &= m_1^{(1)}\exp(ig_1t+i\beta_1) + m_1^{(2)}\exp(ig_2t+i\beta_2)\\ \sqrt{m_2 n_2 a_2^2}\, z_2 &= m_2^{(1)}\exp(ig_1t+i\beta_1) + m_2^{(2)}\exp(ig_2t+i\beta_2)\end{aligned}}$$

$[m_2^{(1)}, m_2^{(2)}]$ plynou z $[m_1^{(1)}, m_1^{(2)}]$ z rovnice $(**)$, tedy obecné počáteční podmínky $[z_1, z_2]_0$ determinují volné parametry $[m_1^{(1)}, m_1^{(2)}; \beta_1, \beta_2]$.

Řešení tedy lze chápat jako složení dvou epicyklických pohybů v z-rovině.



Nyní se vrátíme k rovnicím pro ξ vektory. Zavedením reálné a komplexní části

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= q + ip \\ i\xi &= -p + iq \end{aligned}}$$

máme

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{2Gm_2}{n_1 a_1^2} N_{12} \, (p_1 - p_2) \\
\dot{p}_1 &= -\frac{2Gm_2}{n_1 a_1^2} N_{12} \, (q_1 - q_2) \\
\dot{q}_2 &= \frac{2Gm_1}{n_2 a_2^2} N_{12} \, (p_2 - p_1) \\
\dot{p}_2 &= -\frac{2Gm_1}{n_2 a_2^2} N_{12} \, (q_2 - q_1)
\end{aligned}}$$

zavedením

$$Q_i = \sqrt{m_i n_i a_i^2}\, q_i \qquad (i = 1,2)$$

$$P_i = \sqrt{m_i n_i a_i^2}\, p_i$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{dQ_1}{dt} &= -B_{11} P_1 - B_{12} P_2 \\
\frac{dQ_2}{dt} &= -B_{12} P_1 - B_{22} P_2 \\
\frac{dP_1}{dt} &= B_{11} Q_1 + B_{12} Q_2 \\
\frac{dP_2}{dt} &= B_{12} Q_1 + B_{22} Q_2
\end{aligned}}$$

s parametry

$$B_{11} = -2 \, \frac{Gm_2}{n_1 a_1^2} N_{12}$$

$$B_{22} = -2 \, \frac{Gm_1}{n_2 a_2^2} N_{12}$$

$$B_{12} = +2G \, \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{a_1 a_2 \sqrt{n_1 n_2}} N_{12}$$

což má úplně stejnou strukturu jako rovnice pro (K, H); platí tedy stále integrál

$$\underline{Q_1^2 + P_1^2 + Q_2^2 + P_2^2 = \text{konst}} \quad \left(= m_1 n_1 a_1^2 \sin^2 i_1/2 + m_2 n_2 a_2^2 \sin^2 i_2/2\right)$$

Platí tedy, že i sklony obou drah oscilují v omezeném intervalu hodnot. Navíc si můžeme povšimnout, že nyní $\det(\mathbb{B}) = B_{11} B_{22} - B_{12}^2 = 0$ a tudíž $\underline{\Lambda_1 = 0}$ a $\underline{\Lambda_2 < 0}$

jmenovatel dostáváme po úpravě

$$\Lambda^2 = -\left[B_{11}^2 + B_{22}^2 + 2B_{12}^2\right] = \dots = -4\,\frac{G^2N_{12}^2}{(n_1n_2a_1^2a_2^2)^2}\left[m_1n_1a_1^2 + m_2n_2a_2^2\right]^2$$

tedy
$$\lambda^2 = \Lambda \;\rightarrow\; \lambda = \pm i2\,\frac{GN_{12}}{n_1n_2a_1^2a_2^2}\left[m_1n_1a_1^2 + m_2n_2a_2^2\right]$$

Tentýž výsledek obdržíme dosazením ansatzu

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= L_1\cos(st+\gamma), & P_1 &= L_1\sin(st+\gamma)\\ Q_2 &= L_2\cos(st+\gamma), & P_2 &= L_2\sin(st+\gamma)\end{aligned}}$$

pak
$$\begin{bmatrix} B_{11}-s, & B_{12}\\ B_{12}, & B_{22}-s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1\\ L_2\end{bmatrix} = 0 \qquad (R)$$

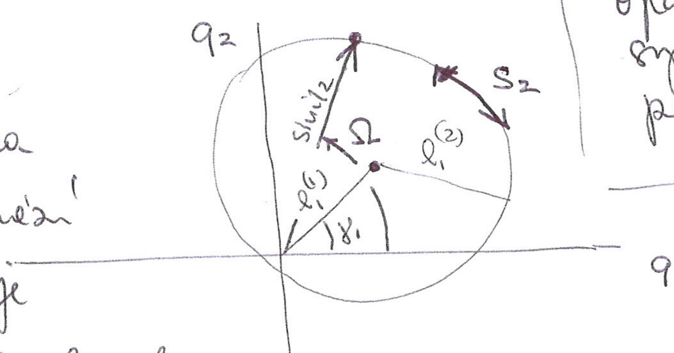
vede na
$$\boxed{s_1 = 0,\quad s_2 = B_{11}+B_{22} = -2\,\frac{GN_{12}}{n_1n_2a_1^2a_2^2}\left[m_1n_1a_1^2+m_2n_2a_2^2\right]}$$

↑ $s_2 = s$ je záporné; uzel tedy precesuje v opačném smyslu než pericentrum

a obecné řešení

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt{m_1n_1a_1^2}\,\xi_1 &= l_1^{(1)}\exp(i\gamma_1) + l_1^{(2)}\exp(is_2t + i\gamma_2)\\ \sqrt{m_2n_2a_2^2}\,\xi_2 &= l_2^{(1)}\exp(i\gamma_1) + l_2^{(2)}\exp(is_2t + i\gamma_2)\end{aligned}}$$

Opět platí epicyklické representace. Fakt, že jedna s-frekvence je nulová naznačuje jednoduché vysvětlení: je myslitelné řešení, kdy obě planety se pohybují **koplanárně** (na rozdíl od excentricit).



~~Rovina definovaná délkou výstupního uzlu γ_1 a sklonem $l_1^{(1)}$ ke zvolené referenční rovině~~

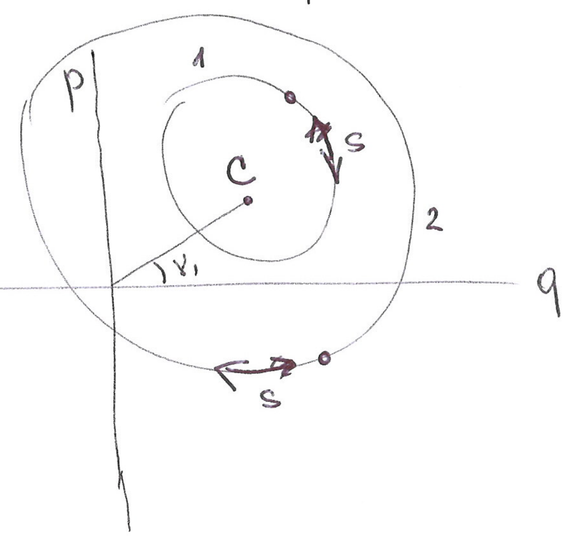
Ve skutečnosti relace (R) z předchozí str. dávají vazbu na l-koeficienty řešení tak, že

$$l_2^{(1)} = \frac{\psi_2}{\psi_1} l_1^{(1)}, \quad l_2^{(2)} = -\frac{\psi_1}{\psi_2} l_1^{(2)} \qquad \text{kde} \qquad \psi_i = \sqrt{m_i n_i a_i^2}$$

pak je snadno vidět, že konstantní členy v ξ_1 a ξ_2 jsou stejné:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{\psi_1} l_1^{(1)} e^{i\gamma_1} + \frac{1}{\psi_1} l_1^{(2)} e^{i(st+\gamma_2)} \\ \xi_2 &= \frac{1}{\psi_2} \underbrace{\frac{\psi_2}{\psi_1} l_1^{(1)}}_{l_2^{(1)}} e^{i\gamma_1} - \frac{\psi_1}{\psi_2^2} l_1^{(2)} e^{i(st+\gamma_2)} \end{aligned}}$$

tedy graficky obě řešení opisují kružnice kolem společného středu C:



protože navíc precedují se stejnou frekvencí s, udržují si stále stejnou konfiguraci.
Např. označíme-li γ vzájemný úhel sevřený normálami drah obou planet

$$\cos\gamma = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1 + 4(q_1 q_2 + p_1 p_2) - 2(q_1^2 + q_2^2 + p_1^2 + p_2^2) + O(\varepsilon^4)$$

$= 1 - 2\sin^2 \gamma/2$, tedy

$$\sin^2 \gamma/2 = q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2 - 2(q_1 q_2 + p_1 p_2) + O(\varepsilon^4) =$$

$$= \frac{1}{\psi_1^2}(Q_1^2 + P_1^2) + \frac{1}{\psi_2^2}(Q_2^2 + P_2^2) - \frac{2}{\psi_1 \psi_2}(Q_1 Q_2 + P_1 P_2) + O(\varepsilon^4) =$$

$$= \ldots = \left[\frac{l_1^{(2)}}{\psi_1} - \frac{l_2^{(2)}}{\psi_2} \right]^2 + O(\varepsilon^4) = \text{konst.}$$

Kdybychom natočili referenční systém tak, že $\underline{l_1^{(1)} = 0}$ [tj. sklonili xy o $\underline{\frac{1}{\psi_1} l_1^{(1)}}$ a uzel zvolili γ_1], pak by obě planety precedovaly kolem osy $\underline{z}$ nově zvoleného systému. Takovou rovinu (xy) nazýváme <u>Laplaceovou rovinou</u> systému.

Všimněme si též, že první sada rovnic na LL6) poskytuje zatím nepoužitý integrál

$$m_1 n_1 a_1^2 \xi_1 + m_2 n_2 a_2^2 \xi_2 = \text{konst.}$$

(vedle již uvedeného $m_1 n_1 a_1^2 \xi_1 \bar{\xi}_1 + m_2 n_2 a_2^2 \xi_2 \bar{\xi}_2 = \text{konst.}$), jaká je jeho interpretace? Připomeňme, že do lineárních členů ε je moment hybnosti dráhy dán

$\vec{M}_{\text{L}} \approx m n a^2 \begin{bmatrix} 2p \\ -2q \\ 1 \end{bmatrix}$, tj. označíme-li celkový moment hybnosti obou planet $\underline{M_{tot}}$

pak zase do lineárních členů

$$m_1 n_1 a_1^2 \xi_1 + m_2 n_2 a_2^2 \xi_2 = \frac{1}{2}\left(-M_{tot,y} + i M_{tot,x}\right) + O(\varepsilon^2)$$

takže tento integrál je vyjádřením zachování x–y složek celkového momentu hybnosti. Všimněme si, že

$$\boxed{\psi_1^2 \xi_1 + \psi_2^2 \xi_2 = (\psi_1^2 + \psi_2^2)\, l_1^{(1)} e^{i\gamma_1}}$$

tj. časově závislé členy vymizí; projekce celkového momentu hybnosti

$$\frac{1}{2}\left(-M_{tot,y} + i M_{tot,x}\right) = (\psi_1^2 + \psi_2^2) \sin i_{tot}/2 \; e^{i\Omega_{tot}}$$

Tedy jednoznačně souvisí s konstantním členem v řešení ζ_1, ζ_2. Volbou Laplaceovy roviny za xy referenčního systému tak též automaticky $l_1^{(1)} = 0$ a $(M_{tot,x}, M_{tot,y}) = 0$ a celkový moment hybnosti je kolmý na Laplaceovu rovinu.

Na závěr ještě upozorněme, že moment hybnosti se v našem řešení zachovává i do člen řádu ε^2. V z-komponentě totiž je (x-y pak až korekce $\sim \varepsilon^3$)

$$M_z \simeq m_1 n_1 a_1^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(e^2 + \sin^2 i/2 \right) + O(4) \right\} =$$

$$= m_1 n_1 a_1^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left(z\bar{z} + \zeta\bar{\zeta} \right) + O(\varepsilon^4) \right\}$$

integrály
$$\psi_1^2 z_1 \bar{z}_1 + \psi_2^2 z_2 \bar{z}_2 = \text{konst.}$$
$$\psi_1^2 \zeta_1 \bar{\zeta}_1 + \psi_2^2 \zeta_2 \bar{\zeta}_2 = \text{konst}$$

tedy v součtu garantují zachování z-složky celkového momentu hybnosti do ε^2.

Pokusme se nyní zobecnit předchozí řešení pro dvě interagující planety na případ N-planet. (LL11)

Celková poruchová funkce příslušící na pohyb i-té planety je lineární součet vlivů j-té planety $(j=1\ldots n,\ j\neq i)$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{R}_i = -\sum_j Gm_j \Big[& N_{ij}(z_i\bar{z}_i + z_j\bar{z}_j) - P_{ij}(z_i\bar{z}_j + z_j\bar{z}_i) \\ & -4N_{ij}(\zeta_i\bar{\zeta}_i + \zeta_j\bar{\zeta}_j - \zeta_i\bar{\zeta}_j - \zeta_j\bar{\zeta}_i)\Big]\end{aligned}} \quad i=1\ldots N$$

kde $\quad N_{ij} = \frac{1}{8a'}\alpha\, b^{(1)}_{3/2}(\alpha)\,,\quad P_{ij} = \frac{1}{8a'}\alpha\, b^{(2)}_{3/2}(\alpha) \qquad \alpha = \frac{\min(a_i,a_j)}{\max(a_i,a_j)}$

$$a' = \max(a_i,a_j)$$

Dosazením do Lagrangeových rovnic dostaneme (opět do řádu ε, při $R_{ij}\sim O(\varepsilon^2)$):

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{z}_i &= \frac{2i}{n_i a_i^2}\sum_j Gm_j\left[N_{ij} z_i - P_{ij} z_j\right] \\ \dot{\zeta}_i &= -\frac{2i}{n_i a_i^2}\sum_j Gm_j N_{ij}(\zeta_i - \zeta_j)\end{aligned}}$$

SEPARACE

opět vidíme, že systém rovnic pro $\underline{z}$ je nezávislý na systém rovnic pro $\underline{\zeta}$ a můžeme je vyřešovat nezávisle. Každý z nich ale tvoří problém $\underline{n}$ rovnic.

Začneme tedy opět se systémem rovnic pro excentricitní vektory z. Postupně provedeme

- $z_i \to z_i = k_i + ih_i$
- $(k,h)_i \to (K,H)_i$: $\quad K_i = \psi_i k_i$

$$H_i = \psi_i h_i$$

$$\psi_i = \sqrt{m_i n_i a_i^2}$$

Při těchto substitucích dostaneme systém 2n rovnic

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dK_i}{dt} &= -A_{ii}H_i - \sum_j A_{ij}H_j \\ \frac{dH_i}{dt} &= +A_{ii}K_i + \sum_j A_{ij}K_j\end{aligned}}$$

$i = 1 \ldots n$
$(j = 1 \ldots n,\ i \neq j)$

$$A_{ii} = \sum_{j \neq i} 2\,\frac{G m_i m_j}{\psi_i^2} N_{ij}, \qquad A_{ij} = -\,2\,\frac{G m_i m_j}{\psi_i \psi_j} P_{ij}$$

Důležitá vlastnost symetrie $A_{ij} = A_{ji}$ poskytuje opět integrál

$$\boxed{\sum_i (K_i^2 + H_i^2) = \sum_i \psi_i^2 (k_i^2 + h_i^2) = \text{konst.}}$$

který opět poukazuje na to, že máme očekávat řešení s oscilující mezi minimální a maximální hodnotou.

Zadáme-li tedy

$$K_i = M_i \cos(gt + \beta)$$
$$H_i = M_i \sin(gt + \beta)$$

dostaneme systém algebraických rovnic pro $\underline{M_i}$ s nulovou pravou stranou, který vyžaduje nulový determinant

$$A(g) = \begin{vmatrix} A_{11} - g, & A_{12}, & \ldots, & A_{1n} \\ A_{12}, & A_{22} - g, & \ldots, & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots, & A_{nn} - g \end{vmatrix} = 0$$

Vypočítávat kořeny $\underline{g}$ této charakteristické rovnice pro obecný systém planet je obtížné. Sylvester ukázal, že vždy existuje n reálných kořenů a to kladných. (LL13)

Obecné řešení má tedy tvar

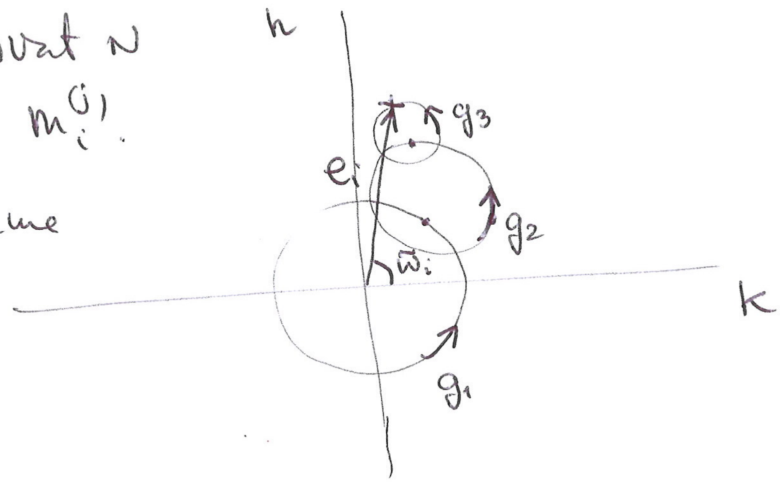
$$K_i = \psi_i k_i = \sum_{j=1}^{n} M_i^{(j)} \sin(g_j t + \beta_j)$$

$$H_i = \psi_i h_i = \sum_{j=1}^{n} M_i^{(j)} \cos(g_j t + \beta_j)$$

---

nebo $$\boxed{z_i = \sum_{j=1}^{n} m_i^{(j)} \exp(i(g_j t + \beta_j))}$$

hodnoty $m_i^{(j)}$ (a fáze β_j) je potřeba získat z počátečních podmínek, což je algebraicky těžká nesnadná úloha. Frekvence g_i nazýváme základní frekvence planetárního systému a oscilace excentricitních vektorů z_i lze representovat N epicykly s amplitudami $m_i^{(j)}$.



Pro sluneční soustavu máme

j	g_j ("/y)	
1	5.46	vnitřní pl.
2	7.34	
3	17.32	
4	18.00	
5	4.26	vnější pl.
6	28.34	
7	3.09	
8	0.8	

; $\boxed{\text{periody} \simeq \dfrac{1.296}{g_j} \text{ My}}$

mezi $10^4 - 10^5$ y

Nyní pro vektor sklonu ξ dostáváme,

po zavedení ∘ $\xi \to \xi = q + ip$

∘ $(q,p) \to (Q,P)$: $Q_i = \psi_i q_i$, $P_i = \psi_i p_i$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dQ_i}{dt} &= -B_{ii} P_i - \sum_{j\neq i} B_{ij} P_j \\ \frac{dP_i}{dt} &= +B_{ii} Q_i + \sum_{j\neq i} B_{ij} Q_j \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} B_{ii} &= -\sum_{j\neq i} 2\,\frac{G m_i m_j}{\psi_i^2} N_{ij} \\ B_{ij} &= +2\,\frac{G m_i m_j}{\psi_i \psi_j} N_{ij} \end{aligned}$$

Ze symetrie $B_{ij} = B_{ji}$ opět plyne integrál

$$\sum_i (Q_i^2 + P_i^2) = \sum_i \psi_i^2 (q_i^2 + p_i^2) = \text{konst.}$$

a zavedeme-li ansatz
$$Q_i = L_i \cos(st+\gamma), \qquad P_i = L_i \sin(st+\gamma)$$

máme pro s frekvence charakteristickou rovnici

$$B(s) = \begin{vmatrix} B_{11}-s, & B_{12} & \dots & , B_{1n} \\ B_{12} & , B_{22}-s, & \dots & , B_{2n} \\ \vdots & & & \\ B_{1n} & , B_{2n} & , \dots & , B_{nn}-s \end{vmatrix} = 0$$

vypočítání jeho kořenů je opět komplikované, ale zase platí, že jeden kořen je nulový. Tento výsledek lze ověřit přímo faktem, že
$$Q_i = \psi_i \cos\gamma, \qquad P_i = \psi_i \sin\gamma$$
je partikulárním řešením

výše uvedených rovnic, neboť platí identita

$$\boxed{B_{ii}\psi_i + \sum_{j\neq i} B_{ij}\psi_j = 0}$$

Obecné řešení tedy má tvar

$$Q_i = \psi_i q_i = L_i^{(1)}\cos\gamma_1 + \sum_{j=2}^{n} L_i^{(j)}\cos(s_j t+\gamma_j)$$

$$P_i = \psi_i p_i = L_i^{(1)}\cos\gamma_1 + \sum_{j=2}^{n} L_i^{(j)}\sin(s_j t+\gamma_j)$$

nebo $$\boxed{\zeta_i = l_i^{(1)}\exp(i\gamma_1) + \sum_{j=2}^{n} l_i^{(j)}\exp[i(s_j t+\gamma_j)]}$$

Frekvence s_i jsou všechny negativní a zhruba

j	s_j ("/y)	
1	−5.2	vnitřní pl.
2	−6.6	
3	−18.7	
4	−17.8	
5	0	Konvence
6	−26.34	vnější pl.
7	−2.90	
8	−0.8	

Konstantní řešení ζ_i opět souvisí s existencí celkové Laplaceovy roviny systému planet, kolem ~~[illegible]~~ jíž normály planetární dráhy precedují. Pro numerické integrace planet se často tato systémová volí a je skloněna o $\approx 1°$ vůči ekliptice J2000; je samozřejmě blízké drahám planet Jupiter a Saturn, neboť by nejvíce přispívají k celkovému momentu hybnosti planetární soustavy. [ověř, že rotační moment hybnosti Slunce je zanedbatelný].

[rem. zachování složek x-y celkového momentu hybnosti v našem řešení samozřejmě opět souvisí s dalším integrálem $\boxed{\sum_i \psi_i^2 \zeta_i = \text{konst.}}$]

Pohyb asteroidu v gravitačním poli planet

Předchozí řešení pohybu planet lze využít k základní charakterizaci pohybu asteroidů (mimo případy resonancí J2/1, Hildy, Trojany... Kozaiovy stavy atp.). Stačí si uvědomit, že je to jen $(N+1)$ těleso v systému jemuž ale připíšeme hmotu "$=0$". Rovnice po zohlednění změny jeho (z, ζ) vektoru ale stejně vypadají

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{z} &= i\left\{\left(\sum_j \frac{2}{na^2} G m_j N_j\right) z - \sum_j \frac{2}{na^2} G m_j P_j z_j\right\} \\ \dot{\zeta} &= -i\left\{\left(\sum_j \frac{2}{na^2} G m_j N_j\right) \zeta - \sum_j \frac{2}{na^2} G m_j N_j \zeta_i\right\} \end{aligned}} \quad (*)$$

kde $N_j = \frac{1}{8a'} \alpha b^{(1)}_{3/2}(\alpha)$, $P_j = \frac{1}{8a'} \alpha b^{(2)}_{3/2}(\alpha)$ $\qquad \alpha = \frac{\min(a, a_j)}{\max(a, a_j)}$

$a' = \max(a, a_j)$

(a, z, ζ) odpovídají asteroidu

(a_i, z_i, ζ_i) odpovídají i-té planetě.

Jelikož hmota asteroidu je zanedbatelná vůči hmotě planet, lze vzít (z_i, ζ_i) z předchozího řešení pohybu planet jako známé a zadané funkce času, tj. v rovnicích $(*)$ je $z_i = z_i(t)$, $\zeta_i = \zeta_i(t)$. Máme tedy jen řešit $z(t)$ a $\zeta(t)$; díky sekulární povaze úlohy $(R \neq R(\lambda))$ je $a = \text{konst.}$

půjdeme-li k reálným veličinám $z = k + ih$, $\zeta = q + ip$, máme

$$\frac{dk}{dt} = -g h + \sum_j \nu_j \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(g_j t + \beta_j) \quad (1)$$

$$\frac{dh}{dt} = +g k - \sum_j \nu_j \underset{\cos}{\cancel{\sin}}(g_j t + \beta_j) \quad (2)$$

SEPAROVANÉ

$$\frac{dq}{dt} = +g p - \sum_j \mu_j \overset{\sin}{\cancel{\cos}}(s_j t + \beta_j)$$

$$\frac{dp}{dt} = -g q + \sum_j \mu_j \underset{\cos}{\cancel{\sin}}(s_j t + \beta_j)$$

kde $\boxed{g = \frac{2}{na^2} \sum_j G m_j N_j}$ je vlastní frekvence asteroidu.

(g_j, s_j) jsou planetární frekvence a (ν_j, μ_j) jsou malé amplitudy, které bychom dostali po dosazení planetárního řešení (z_j, ζ_j) do původních rovnic.

Jde tedy o dvě dvojice ~~rovnic~~ lineárních diferenciálních rovnic s "pravou stranou"; řešení je dostatečně jednoduché, např.

(2) → (1), (1) → (2)

$$\frac{d^2k}{dt^2} = -g^2 k + \sum_j \nu_j (g + g_j) \cos(g_j t + \beta_j)$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g^2 h + \sum_j \nu_j (g + g_j) \sin(g_j t + \beta_j)$$

které mají řešení

$$\boxed{\begin{aligned} k &= \nu \cos(gt+\beta) + \sum_j \frac{\nu_j}{g-g_j} \cos(g_j t+\beta_j) \\ h &= \nu \sin(gt+\beta) + \sum_j \frac{\nu_j}{g-g_j} \sin(g_j t+\beta_j) \end{aligned}}$$

nebo

$$\boxed{z = \nu \exp[i(gt+\beta)] + \sum_j \frac{\nu_j}{g-g_j} \exp[i(g_j t+\beta_j)]} \quad (a)$$

velmi podobnou manipulací rovnic pro ζ (resp. q, p) obdržíme

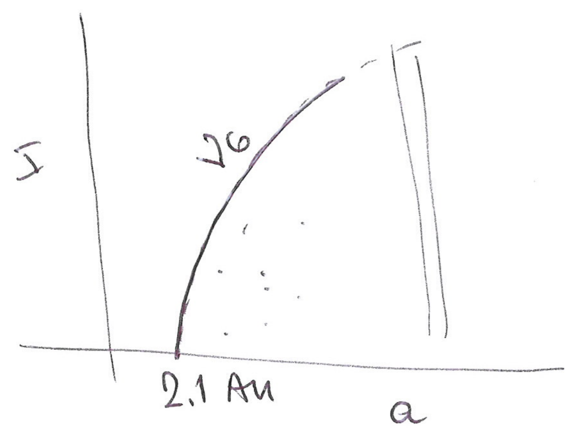
$$\boxed{\zeta = \mu \exp[i(-gt+\cancel{\beta}\gamma)] + \sum_j \frac{\mu_j}{g+s_j} \exp[i(s_j t+\gamma_j)]} \quad (b)$$

Řešení má tedy opět „epicyklický charakter", kde jeden člen je „volný" [odpovídá integračním konstantám předchozích rovnic] a další členy jsou „nucené", dané pravými stranami. Jde o linearizovanou variantu tzv. vlastních elementů asteroidů, důležitých pro analýzu struktury jako rodiny atp. Všimněme si, že opět délka pericentra precesuje progradně ($g \geq 0$) a uzel retrográdně $-g$. V této linearizované teorii je rychlost precese uzlu přesně rovna rychlosti precese pericentra, ale ve skutečnosti je mezi nimi malý rozdíl.

Nejdůležitějším jevem řešení (a) a (b) jsou však <u>dělitelé v menších (planetárních) členech</u>, když $g \simeq g_j$, nebo $g \simeq -s_j$.

Mluvíme o tzv. sekulárních resonancích ($\nu_6, \nu_{16} \dots$), když např. $g \simeq g_6 \simeq 28.25''/y$. Pak excentricita velmi roste, v lineární aproximaci "neomezeně", v nelineární teorii samozřejmě do určité maximální hodnoty.

Resonance ν_6 např. omezuje hlavní pás asteroidů na jeho spodní hranici kolem $a \simeq 2.1$ AU.



Podobně např. ν_{18} & ν_{17} resonance ($g \simeq -s_7$, $g \simeq -s_8$) způsobují velký úbytek pozorovaných <u>TNOs</u> mezi 40-41 AU...