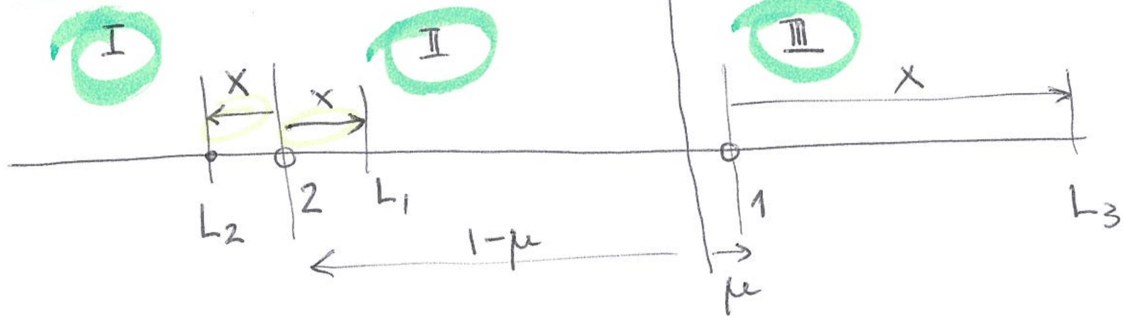
Určení polohy přímkových stacionárních bodů



$\mu_2 = \mu$
$\mu_1 = 1-\mu$

a) **oblast I:** zde $$\xi + \frac{\mu_1}{(\mu_2-\xi)^2} + \frac{\mu_2}{(\xi+\mu_1)^2} = 0 \qquad (1)$$

ozn. $x = -\mu_1 - \xi = \mu - 1 - \xi$

dosazením do (1) dostaneme $$\underbrace{x+1-\mu}_{\text{celk. } \xi} - \overbrace{\frac{1-\mu}{(1+x)^2}}^{\text{vzdálení od 1}} - \overbrace{\frac{\mu}{x^2}}^{\text{vzdálení od 2}} = 0$$

drobné úpravy:

$$(\overbrace{1-\mu+\mu}^{1})\,x + (1-\mu)\left[1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right] - \frac{\mu}{x^2} = 0$$

$$(1-\mu)\left[1 + x - \frac{1}{(1+x)^2}\right] \cancel{x} + \mu\left[x - \frac{1}{x^2}\right] = 0$$

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{1 + x - \frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{x^2} - x} = x^2 \frac{(1+x)^3 - 1}{(1+x)^2(1-x^3)} \ ;$$ $$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$\boxed{\frac{\mu}{3(1-\mu)} = x^3 \frac{1 + x + x^2/3}{(1+x)^2(1-x^3)}}$$ pro $\mu \to 0$ musí $x \to 0$ a to $x^3 \sim \frac{\mu}{3(1-\mu)}$

ozn. $\nu = \left[\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right]^{1/3}$ a předpokládejme rozvoj:

$x = \nu + a\nu^2 + b\nu^3 + \dots$ určeme alespoň koeficient a

$$\cancel{\nu^3} = \cancel{\nu^3}\,(1+3a\nu+\dots)\,\frac{1+\nu+\dots+O(2)}{(1+\nu\dots)^2(1+O(3))}$$

$$1+\nu+\dots = 1+3a\nu+\dots \rightarrow \underline{a=1/3}$$

při pečlivém setřezení členů různých mocnin lze řešit

$\underline{a, b, \dots}$:
$$\underline{x = \nu\left(1+\tfrac{1}{3}\nu-\tfrac{1}{9}\nu^2-\tfrac{31}{81}\nu^3+\dots\right)}$$

b) oblast II : zde
$$\underline{\xi + \frac{\mu_1}{(\mu_2-\xi)^2} - \frac{\mu_2}{(\xi+\mu_1)^2} = 0} \quad (2)$$

op. $\underline{x = \xi+1-\mu}$ (vzdálenost od primeru 2)

dosazením do (2) dostaneme
$$\underline{x+\mu-1+\frac{1-\mu}{(1-x)^2}-\frac{\mu}{x^2}=0}$$

drobné úpravy :

$$\underbrace{(1-\mu+\mu)}^{1}x + (1-\mu)\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1\right]-\frac{\mu}{x^2}=0$$

$$(1-\mu)\left[\frac{1}{(1-x)^2}-1+x\right]+\mu\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=0$$

$$\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{1-x-\frac{1}{(1-x)^2}}{x-1/x^2} = x^2\,\frac{1-(1-x)^3}{(1-x)^2(1-x^3)}$$ odkud

$$\boxed{\frac{\mu}{3(1-\mu)} = x^3\,\frac{1-x+x^2/3}{(1-x)^2(1-x^3)}}$$ opět lehce předpokládáme

$$\underline{x = \nu+a\nu^2+b\nu^3+\dots}$$

$$\cancel{\nu^3} = \cancel{\nu^3}(1+3a\nu+\dots)\,\frac{1-\nu+o(2)}{(1-\nu\dots)^2\cdot 1}$$

$$1-\nu+\dots = 1+3a\nu+\dots \longrightarrow \underline{a=-1/3} \quad \text{a celkem}$$

$$\boxed{x = \nu\left(1-\tfrac{1}{3}\nu-\tfrac{1}{9}\nu^2-\tfrac{23}{81}\nu^3+\dots\right)}$$

c) v oblasti III: zde $\quad \xi - \dfrac{\mu_1}{(\xi-\mu_2)^2} - \dfrac{\mu_2}{(\xi+\mu_1)^2} = 0 \quad (3)$

ozn. $x = \xi-\mu$ dosazením do (3) dostaneme

$$x+\mu - \frac{1-\mu}{x^2} - \frac{\mu}{(1+x)^2} = 0$$

při $\mu\to 0$ evidentně $x\to 1$

po roznásobení

$$x^5+(2+\mu)x^4+(1+2\mu)x^3-(1-\mu)x^2-2(1-\mu)x-(1-\mu)=0$$

neboť při $\mu\simeq 0$ je $x\simeq 1$ přejdeme k $x = 1+y$ malé pro μ malé

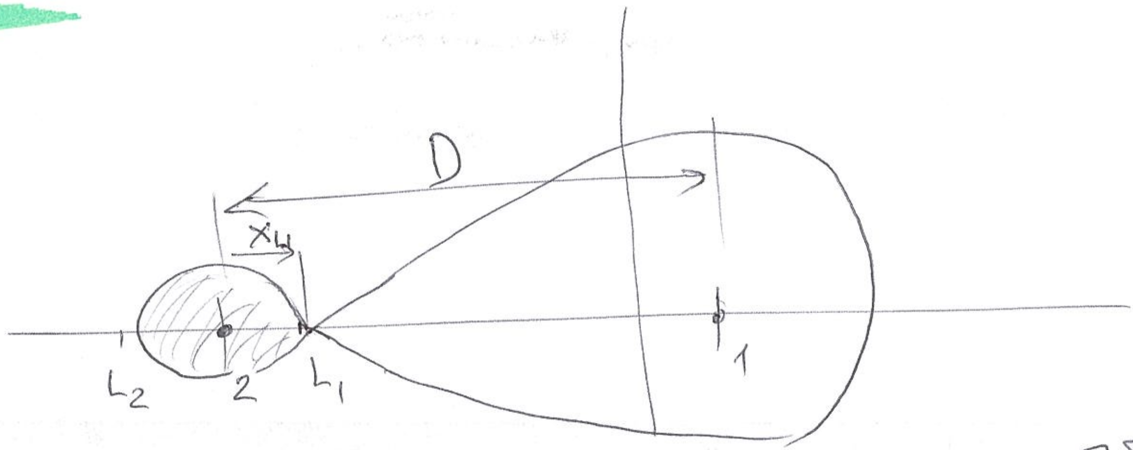
$$y^5+(7+\mu)y^4+(19+6\mu)y^3+(24+13\mu)y^2+2(6+7\mu)y+7\mu=0$$

a odtud snadno vidíme, že $\quad y\simeq -\frac{7}{12}\mu + o(2)$

obecnější, když položíme $\nu = \frac{7}{12}\mu$ pak

$$\boxed{y = -\nu\left(1+\tfrac{23}{84}\nu^2+\tfrac{23}{84}\nu^3+\dots\right)}$$

Pozn. limitní Hillova plocha odpovídající C hodnotě bodu L_1



posléze mezní plochu $2W = C$, která je právě uzavřena ekvipotenciálou kolem primáru 2; tekutinový model satelitu s vysokou koncentrací hmoty ve středu, kde má tvar maximální "charakteristický" polohou

$$R_s \le x_{L_1} \simeq D \cancel{\left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3}} \nu \simeq D\left(\frac{\mu}{3(1-\mu)}\right)^{1/3}$$

z definice $\mu = \frac{m_s}{m_p + m_s}$ je $\frac{\mu}{1-\mu} = \frac{m_s}{m_p} \simeq \frac{\rho_s R_s^3}{\rho_p R_p^3}$

$$\frac{\cancel{R_s}}{\cancel{R_p}} \lesssim \frac{D}{R_p} \cdot \frac{1}{3^{1/3}} \cdot \left(\frac{\rho_s}{\rho_p}\right)^{1/3} \cdot \frac{\cancel{R_s}}{\cancel{R_p}}$$

tj. $$\boxed{\frac{D}{R_p} \ge 3^{1/3} \cdot \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3} \simeq 1.442 \times \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3}}$$

pro tekutinový model kontaktní hmoty existují konfigurace satelitu do $\frac{D}{R_p} \ge 2{,}456 \left(\frac{\rho_p}{\rho_s}\right)^{1/3}$

vnější okraj A-prstence kolem Saturnu je ve vzdálenosti $\simeq 136800$ km tj. $\simeq \boxed{2.27\,R_p}$!