R1

Motivace: Připomeňme, že při započtení J_2 potenciálu pro pohyb umělé družice, oskulační uzel dráhy Ω vykazoval sekulární drift

$$\dot{\Omega} \simeq -\frac{3}{2} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \frac{\cos i}{\eta^4}$$

Pro $\cos i \simeq -0.1$ ($i \sim 96°$) může být perioda stáčení Ω zhruba 1 rok a tudíž být v 1/1 rezonanci s oběhem Slunce v geocentrické soustavě. Pak můžeme očekávat, že efekty slunečního gravitačního pole, se mohou rezonančně zesílit. V této kapitole se pokusíme podat základní popis tohoto jevu.

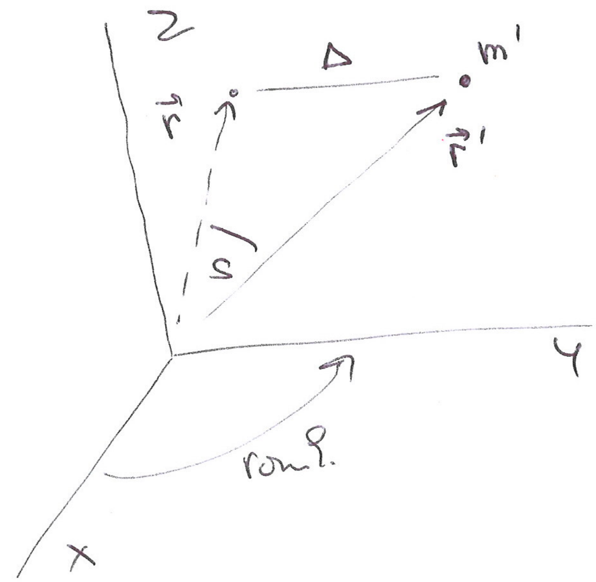
Když pouze J_2 člen, pak

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2a} + \frac{\mu}{4a}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \frac{1-3\cos^2 i}{\eta^3} + \dots \quad (\simeq \text{periodické členy})$$

$\mu = GM$, $\eta = \sqrt{1-e^2}$

Mezi opomenutými členy ... bychom měli započíst sekulární části solární perturbace, ale také započíst členy obsahující úhel $\psi = \Omega - \lambda'$, neboť ten se pozvolna mění (tj. chová se jako součást sekulární poruchy). Prvním naším úkolem tedy bude odvodit příslušný poruchový člen a odvodit sekulární i ψ-závislou část.

Připomeňme, že potenciál tělesa $(m', \vec r')$ v bodě $(\vec r)$ je dán (v geocentrické soustavě)



$$R' = -Gm'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec r\cdot\vec r'}{r'^3}\right)$$

$$\Delta = |\vec r - \vec r'|$$

provedením multipólní rozvoj $1/\Delta$ máme

$$R' = -Gm'\left\{\frac{1}{r'}\sum_{n\ge1}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos S) - \frac{\vec r\cdot\vec r'}{r'^3}\right\} =$$

$$= -Gm'\left\{\frac{1}{r'}\cancel{\frac{r}{r'}\cos S} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3}(3\cos^2 S-1)+\dots \cancel{-\frac{r\cos S}{r'^2}}\right\}$$

$$\boxed{\approx -\frac{Gm'}{r'^3}\frac{1}{2}r^2(3\cos^2 S-1)}$$ (kvadrupólní aproximace)

V dalším se omezíme na předpoklad kruhové dráhy m' v geocentrické soustavě se sklonem ε ($\simeq 23{,}4°$) a uzlem průmětu shodným s osou X. Pak $r' = \text{konst.}$ a $Gm'/r'^3 = n'^2$ kde $\underline{n'}$ je střední pohyb tělesa m' ($\simeq 2\pi/365.25$ dne).

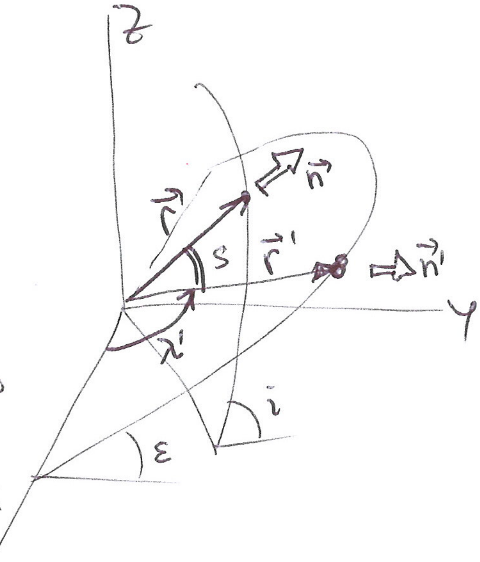
Pak máme $$\boxed{R' = -\frac{1}{2}n'^2 r^2(3\cos^2 S-1)}$$

Umělá družice je na obecné eliptické dráze s oskulačními elementy $(a, e, i, \Omega, \omega, \ell)$.

kde: $r = a(1 - e\cos u)$

$$\vec{n} = \left(\frac{a}{r}\right)\left[(\cos u - e)\,\vec{e}_P + \eta \sin u\,\vec{e}_Q\right]$$

$$\vec{n}\,' = \begin{bmatrix}\cos\lambda' \\ \cos\varepsilon\,\sin\lambda' \\ \sin\varepsilon\,\sin\lambda'\end{bmatrix}$$



A kvadrupólní potenciál slunečního gravitačního pole je

$$R' = -\frac{1}{2} n'^2 r^2 \left[3(\vec{n}\cdot\vec{n}\,')^2 - 1\right] = R(\boxed{l, g, \lambda'}, \psi = \Omega - \lambda')$$

přes tyto úhlové proměnné zamýšlíme R' průměrovat

▲ středování přes l:

provedeme záměnu proměnné $l \to u$: $u - e\sin u = l$

$du\left(\frac{r}{a}\right) = dl$

$$\overline{R'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dl\, R' = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du\left(\frac{r}{a}\right)\frac{1}{2}n'^2 a^2\left[3\left(\frac{r}{a}\right)^2(\vec{n}\cdot\vec{n}\,')^2 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}n'^2 a^2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du\,(1 - e\cos u)\Big\{3(\cos u - e)^2(e_P n)^2 + 3\eta^2\sin^2 u\,(e_Q n)^2 +$$

$$\cancel{+\,6\eta\sin u(\cos u - e)(e_P n)(e_Q n)} \to 0$$

$$-\,1 + 2e\cos u - e^2\cos^2 u\Big\} =$$

$$= -\frac{1}{2}n'^2 a^2\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du\,(1 - e\cos u)\Big\{3(e_P n)^2(e^2 + \cos^2 u - 2e\cos u) + 3\eta^2\sin^2 u\,(e_Q n)^2$$

$$-\,1 - e^2\cos^2 u + 2e\cos u\Big\} =$$

R4

$$= -\frac{1}{2} n'^2 a^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du \Big\{ 3 (e_P n)^2 \big(e^2 + \cos^2 u - \cancel{2e\cos u}^{\,0} - \cancel{e^2 \cos u}^{\,0} - \cancel{e\cos^3 u}^{\,0} + 2e^2\cos^2 u \big)$$

$$+ 3\eta^2 (e_Q n)^2 \sin^2 u - \cancel{3e\eta^2 (e_Q n)^2 \cos u \sin^2 u}^{\,0}$$

$$- 1 - e^2\cos^2 u + \cancel{2e\cos u}^{\,0} + \cancel{e\cos u}^{\,0} + \cancel{e^3\cos^3 u}^{\,0} - 2e^2\cos^2 u \Big\}$$

$$= -\frac{1}{2} n'^2 a^2 \left\{ 3 (e_P n)^2 \left(2e^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\eta^2 (e_Q n)^2 - 1 - \frac{3}{2} e^2 \right\}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{4} n'^2 a^2 \left\{ 3(1+4e^2)(\vec{e}_P \vec{n}')^2 + 3\eta^2 (\vec{e}_Q \vec{n}')^2 - 2 - 3e^2 \right\}}$$

▲ středování přes $g\,(=\omega)$:

$$\vec{e}_P = \cos g\, \vec{a} + \sin g\, \vec{b}$$
$$\vec{e}_Q = -\sin g\, \vec{a} + \cos g\, \vec{b}$$

kde $\vec{a} = \begin{bmatrix} \cos\Omega \\ \sin\Omega \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -\cos i \sin\Omega \\ \cos i \cos\Omega \\ \sin i \end{bmatrix}$

$$(\vec{e}_P \vec{n}') = \cos g\,(an) + \sin g\,(bn)$$
$$(\vec{e}_Q \vec{n}') = -\sin g\,(an) + \cos g\,(an)$$

$$(\vec{e}_P \vec{n}')^2 = \cos^2 g\,(an)^2 + \sin^2 g\,(bn)^2 + 2\sin g \cos g\,(an)(bn)$$
$$(\vec{e}_Q \vec{n}')^2 = \sin^2 g\,(an)^2 + \cos^2 g\,(bn)^2 - 2\sin g \cos g\,(an)(bn)$$

a střední hodnoty $\langle \cos^2 g \rangle_g = \langle \sin^2 g \rangle_g = 1/2$

$$\langle (e_P n)^2 \rangle_g = \langle (e_Q n)^2 \rangle_g = \frac{1}{2}\left[(an)^2 + (bn)^2\right] = \underline{\frac{1}{2}\left[1 - (cn)^2\right]}$$

kde $\vec{c} = \begin{bmatrix} \sin i \sin\Omega \\ -\sin i \cos\Omega \\ \cos i \end{bmatrix}$

neboť $\vec{n}'$ je jednotkový vektor a tudíž pro libovolnou ortonormální triádu $(an)^2 + (bn)^2 + (cn)^2 = 1$

tudíž zjišťujeme

$$\boxed{\bar{R}'} = -\frac{1}{4} n'^2 a^2 \left\{ 3(1+4e^2)\frac{1}{2}(1-(cn)^2) + \frac{3}{2}\eta^2(1-(cn)^2) - 2 - 3e^2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{8} n'^2 a^2 \left\{ [1-(cn)^2](3+12e^2+3-3e^2) - 4 - 6e^2 \right\}$$

$$= -\frac{1}{8} n'^2 a^2 \left\{ [1-(cn)^2][6+9e^2] - 4 - 6e^2 \right\} =$$

$$= -\frac{1}{8} n'^2 a^2 \left\{ 6+9e^2-4-6e^2 - 3(2+3e^2)(\vec{c}\cdot\vec{n}')^2 \right\} =$$

$$\boxed{= -\frac{2+3e^2}{8} n'^2 a^2 \left\{ 1 - 3(\vec{c}\cdot\vec{n}')^2 \right\}}$$

▲ nakonec středování přes λ': zde zavedeme

$$(\Omega, \lambda') \longmapsto (\underbrace{\psi}_{\text{skoro se nemění}} = \Omega - \lambda', \lambda')$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} \sin i \sin\Omega \\ -\sin i \cos\Omega \\ \cos i \end{bmatrix} \quad \vec{n}' = \begin{bmatrix} \cos\lambda' \\ \cos\varepsilon \sin\lambda' \\ \sin\varepsilon \sin\lambda' \end{bmatrix}$$

$$(\vec{c}\vec{n}') = \sin i \sin\Omega \cos\lambda' - \sin i \cos\varepsilon \cos\Omega \sin\lambda' + \cos i \sin\varepsilon \sin\lambda'$$

$$= \sin i \sin\psi + \sin i (1-\cos\varepsilon)\cos(\overbrace{\psi+\lambda'}^{\Omega})\sin\lambda' + \cos i \sin\varepsilon \sin\lambda'$$

$$= \sin i \sin\psi + \sin i (1-\cos\varepsilon)\sin\lambda'(\cos\psi\cos\lambda' - \sin\psi\sin\lambda') + \cos i \sin\varepsilon \sin\lambda'$$

a tudíž hledaný výraz

$$\langle(\vec{c}\cdot\vec{n}')^2\rangle_{\lambda'} = \Big\langle \sin^2 i \sin^2\psi + \sin^2 i (1-\cos\varepsilon)^2 \cos^2\psi \sin^2\lambda' \cos^2\lambda' +$$
$$+ \sin^2 i (1-\cos\varepsilon)^2 \sin^2\psi \sin^4\lambda' + \cos^2 i \sin^2\varepsilon \sin^2\lambda'$$
$$-2\sin^2 i (1-\cos\varepsilon)\sin^2\psi \sin^2\lambda' + (\text{ostatní členy} = 0 \text{ po středování}) \Big\rangle_{\lambda'}$$

R6

$$= \left[\langle \sin^2\lambda \cos^2\lambda \rangle_\lambda = \frac{1}{8} \,,\ \langle \sin^4\lambda \rangle_\lambda = \frac{3}{8} \ \dots \right]$$

$$= \sin^2 i \cos\varepsilon \sin^2\psi + \frac{1}{2}\cos^2 i \sin^2\varepsilon + \frac{1}{8}\sin^2 i\,(1-\cos\varepsilon)^2\cos^2\psi + \frac{3}{8}\sin^2 i\,(1-\cos\varepsilon)^2\sin^2\psi =$$

$$= \dots = \boxed{\frac{1}{2}\cos^2 i \sin^2\varepsilon + \frac{1}{4}\sin^2 i\,(1+\cos^2\varepsilon) - \frac{1}{8}\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2\cos 2\psi}$$

a tudíž výsledně

$$\bar{R}' = -\frac{2+3e^2}{8} n'^2 a^2 \left[1 - \frac{3}{2}\cos^2 i \sin^2\varepsilon - \frac{3}{4}\sin^2 i\,(1+\cos^2\varepsilon) + \frac{3}{8}\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2\cos 2\psi \right] =$$

$$= -\frac{2+3e^2}{64} n'^2 a^2 \left[8 - 12\cos^2 i\,(1-\cos^2\varepsilon) - 6(1-\cos^2 i)(1+\cos^2\varepsilon) + 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2\cos 2\psi \right] =$$

$$= -\frac{2+3e^2}{64} n'^2 a^2 \left[8 - 12\cos^2 i + 12\cos^2 i\cos^2\varepsilon - 6 + 6\cos^2 i - 6\cos^2\varepsilon + 6\cos^2 i\cos^2\varepsilon + 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2\cos 2\psi \right] =$$

$$= \boxed{+\frac{2+3e^2}{64} n'^2 a^2 \left[2(3\cos^2\varepsilon - 1)(1-3\cos^2 i) - 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2\cos 2\psi \right]}$$

Výsledně tedy pro náš model získáváme poruchovou funkci ve tvaru [zahrnuje sekulární část J_2 potenciálu, sekulární část solárního kvadrupólového pole a také v solárním poli člen obsahující ψ-úhel, neboť ten se "prakticky" nemění"]

(R7

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2a} + \frac{\mu}{4a}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \, \frac{1-3\cos^2 i}{\eta^3}$$

$$+ \frac{2+3e^2}{64} n'^2 a^2 \left[2(3\cos^2\varepsilon - 1)(1-3\cos^2 i) - 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2 \cos 2\varphi\right]$$

$$+ \dots$$

K tomuto tvaru Hamiltoniánu se ještě vrátíme, dříve však vyjasníme proměnné, které budeme používat:

$$(L, G, H; l, g, h) + \lambda' \; : \; \mathcal{H} = \mathcal{H}'(L, G, H; l, g, h; \lambda') =$$

$$= -\frac{\mu^2}{2L^2} + R(L, G, H; l, g, h; \lambda')$$

v tomto tvaru Hamiltonián λ' nevystupuje jako "další" proměnná, ale jen zastupuje jako funkce času $\lambda' = n't$. Hamiltonián je tedy explicitní funkcí času skrze $\lambda' = \lambda'(t)$. Můžeme ale sadu proměnných rozšířit o (Λ', λ'), že

$$K = K(L, G, H, \Lambda'; l, g, h, \lambda') = \mathcal{H} + n'\Lambda'$$

Tento rozšířený Hamiltonián už formálně nezávisí na čase; dodatečné Hamiltonovy rovnice jsou

$$\dot{\lambda}' = \frac{\partial K}{\partial \Lambda'} = n' \rightarrow \lambda' = n't \quad (\mathrm{OK})$$

$$\dot{\Lambda}' = -\frac{\partial K}{\partial \lambda'} \rightarrow \Lambda'(t)$$

formálně $K = \cancel{\;} \mathrm{const.}$, ale samozřejmě z něj neurčíme $\Lambda'(t)$.

Pro účel analýzy satelitu na dráze blízké heliosynchronní, provedeme kanonickou transformaci

$$(L, G, H, \Lambda'; l, g, h, \lambda') \longmapsto (L, G, H, H+\Lambda'; l, g, h-\lambda', \lambda')$$

[ověříme že "$PdQ - pdq = 0$":

$$H\,d(h-\lambda') + (H+\Lambda')\,d\lambda' - H\,dh - \Lambda' d\lambda' = 0 \quad \checkmark \text{]}$$

nové proměnné si ozn.

L	; l
G	; g
$\Psi = H$	; $\psi = h - \lambda'$
$\Phi = H + \Lambda'$	; $\varphi = \lambda'$

neboť vytvořující funkce takovéto transformace nezávisí na čase, je nový Hamiltonián roven starému, jen přepsaném do nových proměnných:

Φ jen zde, tudíž stále $\dot{\varphi} = n'$ $(= \dot{\lambda}')$

$$\boxed{K = -\frac{\mu^2}{2L^2} + R(L, G, \Psi, \cancel{\bar{\Phi}}; l, g, \psi, \varphi) + n'(\Phi - \Psi)}$$

v tomto Hamiltonian se úhlové proměnné l, g, φ mění "rychle":

l ...	≈ hodiny
g ...	≈ měsíce
λ' ...	rok

ale ne Ψ (≈ skoro konstantní)

Později nám půjde o analýzu dráhy na delší

časové škále než zmíněné, pak můžeme přijmout (R9
„princip středování" a nahradit $\mathcal{K} \to \overline{K}$:

$$\overline{K} = \langle \mathcal{K} \rangle_{l, g, \lambda' = \varphi} \; ; \text{ pak}$$

$$\boxed{\overline{K} = \overline{K}(L, G, \Psi, \Phi; -, -, \psi, -)}$$

a jediné dopiše netriviální Hamiltonovy rovnice

je

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{\partial \overline{K}}{\partial \Psi} \; ; \quad \dot{\Psi} = -\frac{\partial \overline{K}}{\partial \psi}} \quad (*)$$

, ostatní

$$\dot{L} = 0 \to L = \text{konst.} \to a = \text{konst.}$$

$$\dot{G} = 0 \to G = \text{konst.} \to e = \text{konst.}$$

$$\dot{\Phi} = 0 \to \Phi = \text{konst.}$$

$\dot{l} = + \dfrac{\partial \overline{K}}{\partial L}$; pakliže budeme znát $\Psi(t), \psi(t)$

lze $l - l_0 = \int_{t_0}^{t} (\partial \overline{K} / \partial L)\, dt$

chápat jako formální řešení $l(t)$.

stejně pro $g(t)$, $\varphi(t) = n't$.

Rovnice (*) mohou být velmi složité k získání řešení $\psi(t)$, $\Psi(t)$, ale alespoň připomínají integrál

$$\boxed{\overline{K} = \overline{K}(L, G, \Psi, \Phi; -, -, \psi, -) = \text{konst.}}$$

kde $L = \text{konst}$, $G = \text{konst}$, ~~Φ = konst~~ $\Phi = \text{konst}$.

(neboť $\bar{K}$ bylo vystředováno přes $\varphi = \lambda'$)

Isokontury tohoto integrálu poskytnou kvalitativní informaci o řešení úlohy, které je možno porovnat např. s pomocí numerických integrací.

V našem případě tedy máme

$$\bar{K} = -\frac{\mu}{2a} + \frac{\mu}{4a}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \frac{1-3\cos^2 i}{\eta^3} +$$

$$+ \frac{3e^2+2}{64} n'^2 a^2 \left[2(3\cos^2\varepsilon - 1)(1-3\cos^2 i) - 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2 \cos 2\psi\right]$$

$$+ n'(\Phi - \Psi)$$

Z $\bar{K}$ můžeme odejmout konstantní členy $\bar{K}_0$; navíc neboť

$$\Psi = H = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\cos i = \underbrace{n a^2 \eta}_{\substack{\text{všechno} \\ \text{konstanty}}} \cos i$$

lze místo kontur v (Ψ, ψ) postupně pracovat $(\cos i, \psi)$.

$$\frac{1}{n^2a^2}\left[\bar{K} - \bar{K}_0\right] = -\frac{3}{4}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \frac{\cos^2 i}{\eta^3} + \frac{2+3e^2}{64}\left(\frac{n'}{n}\right)^2 \left[2(3\cos^2\varepsilon - 1)(1-3\cos^2 i) - 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2 \cos 2\psi\right]$$

$$-\left(\frac{n'}{n}\right)\eta\cos i = \text{konst.}$$

(samozřejmě J_2, R, ε, n' jsou konstanty)

Pozice nodální sluneční resonance je dána stacionárním bodem soustavy (Ψ, ψ):

$$\dot\psi = \frac{\partial K}{\partial \Psi} = \frac{1}{na^2\eta}\frac{\partial}{\partial(\cos i)}\Big\{\frac{1}{4} n^2 a^2 \left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \frac{1-3\cos^2 i}{\eta^3} + \frac{2+3e^2}{64} n'^2 a^2 \left[2(3\cos^2\varepsilon-1)(1-3\cos^2 i) - 3\sin^2 i\,(1+\cos\varepsilon)^2\cos 2\psi\right] + n'(\Phi - na^2\eta\cos i)\Big\}$$

$$= \underbrace{-\frac{3}{2} n \left(\frac{R}{a}\right)^2 J_2 \frac{\cos i}{\eta^4}}_{\dot\Omega_{J_2}} \underbrace{- \frac{3}{16}\frac{2+3e^2}{\eta} n'\left(\frac{n'}{n}\right)(3\cos^2\varepsilon-1)\cos i}_{\dot\Omega_{sol,sec}} - n' + \frac{3}{32}\frac{2+3e^2}{\eta} n'\left(\frac{n'}{n}\right)(1+\cos\varepsilon)^2 \cos i \cos 2\psi = 0 \quad (*)$$

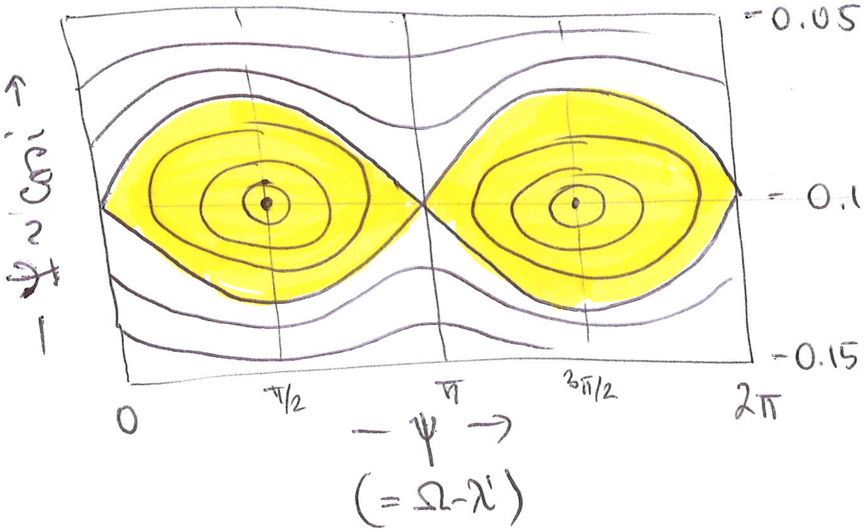
$$\dot\Psi = \frac{\partial K}{\partial \psi} = \frac{3}{32}(2+3e^2) n'^2 a^2 (1+\cos\varepsilon)^2 \sin^2 i \sin 2\psi = 0 \quad (**)$$

z (**) vidíme, že $\psi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ jsou 4 řešení a pro ně z (*)

$$\underbrace{\dot\Omega_{J_2} + \dot\Omega_{sol,sec} - n'}_{} \pm \underbrace{\frac{3}{32}\frac{2+3e^2}{\eta} n'\left(\frac{n'}{n}\right)(1+\cos\varepsilon)^2\cos i}_{\text{malé}} = 0$$

$\dot\Omega_{J_2} - n' \simeq 0$ udává pozici resonance v „$\cos i$"

pro $e=0$, $a \simeq 1.1R$ máme $i \simeq 96°$. Fázový portrét isočáry $K = \text{konst}$ vypadá asi takto



"resonance" stacionární body

a) žlutě označené "librační oblast" vymezují zónu resonance
→ tam ψ osciluje mezi min/max hodnotami a též nutí Ψ (tj. cos i) k resonančním oscilacím

b) když jdeme s Ψ dál od resonance, isoliny skoro přímé vodorovné čáry → sklon se nemění a jen uzel precesuje s hodnotou dost jinou než 2π/1 rok.

c) poloha resonance citlivě závisí na zvolené hodnotě a; pro menší a se resonance posune k menším hodnotám cos i, tj. menším sklonům; pro nízkoletící družice se v praxi a dosti rychle mění díky odporu atmosféry a tudíž dráha družice projde oblastí resonance.

pro analytické řešení resonančního pohybu $(\Psi,\psi)(t)$ (R13

lze postoupit o trochu dále, přijmeme-li následující aproximaci. Šířka resonanční zóny $\delta\Psi$ (či $\delta\sigma_i$) je poměrně malé, pak můžeme provést Taylorův rozvoj kolem Ψ_R, resonanční hodnoty. Jmenovitě

$$K = K_0(\Psi) + K_1(\Psi)\cos 2\psi$$

poloha resonance je velmi dobře určena podmínkou

$$\frac{\partial K_0}{\partial \Psi}(\Psi_R) = 0 \quad \text{neboť} \quad |K_1| \ll |K_0|$$

pak zavedeme $\delta\Psi = \Psi - \Psi_R$ a Hamiltonián aproximujeme

$$\boxed{K} \approx \underbrace{K_0(\Psi_R)}_{\text{konstanta}} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial K_0}{\partial \Psi}(\Psi_0)}}_{=0}\delta\Psi + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K_0}{\partial \Psi^2}(\Psi_R)\,\delta\Psi^2 + \dots + K_1(\Psi_R)\cos 2\psi + \dots$$

$$\approx \boxed{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 K_0}{\partial \Psi^2}(\Psi_R)}_{\text{konst}}\cdot\delta\Psi^2 + \underbrace{K_1(\Psi_R)}_{\text{konst.}}\cos 2\psi}$$

Toto je hamiltonián matematického kyvadla, jehož řešení známe a je možné ho podat např. v eliptických funkcích.