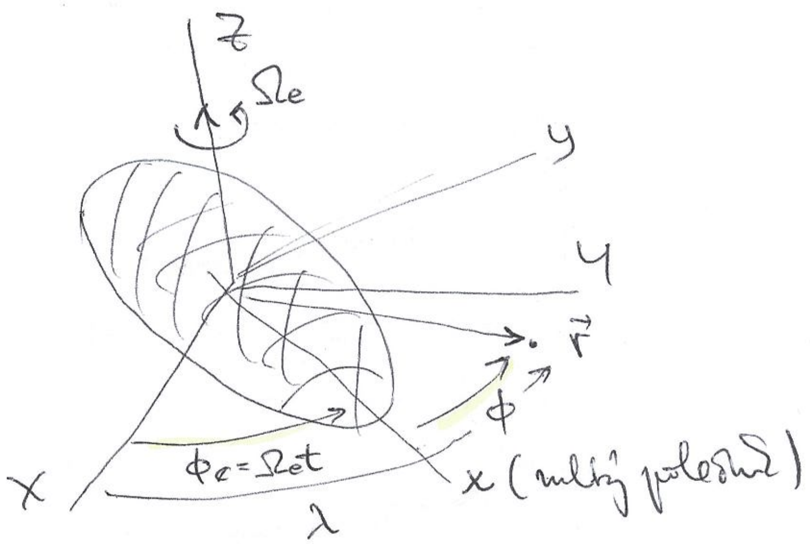
(1.

Pohyb geostacionární družice se započtením U_{22} poruchového potenciálu

$$U \equiv -\frac{GM}{r} - \frac{3GM}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 J_{22} \sin^2\theta \cos 2(\phi - \phi_{22})$$

$\left(J_{22} \simeq 1.84 \times 10^{-6},\ \phi_{22} \simeq -15^\circ \right)$ (nenormalizované koef.)

uvažme pohyb v ekvatoreální rovině $(\theta = \pi/2)$ s velmi malou excentricitou tak, že členy $\sim O(e)$ budeme zanedbávat.



$$\lambda = \phi + \phi_e + O(e)$$

$\phi_e = \Omega_e t$ rotační fáze nultého poledníku

poruchový potenciál:

$$\phi = \lambda - \phi_e^{(t)} + O(e)$$

$$R \equiv -\frac{3GM}{a}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_{22} \cos 2(\phi - \phi_{22}) + O(e)$$

a Lagrangeovy rovnice do řádu $O(e)$ dávají

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \lambda} && (1) \\ \dot{\lambda} &= n + \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + O(e) && (2) \end{aligned}}$$

Abychom se zbavili explicitní závislosti R na čase budeme používat geografickou délku družice ϕ místo délky v dráze λ, tj.:

$$\boxed{\dot{\phi} = n - \Omega_e + \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + O(e)} \quad (2')$$

V nulté aproximaci, při $R=0$, je geostacionární dráha charakterizována $\dot{a}=0$, $\dot{\phi}=0$, a z $(2')$

$$\boxed{n = \Omega_e} \quad \text{tj.} \quad \sqrt{GM/a_0^3} = \Omega_e \quad \text{či} \quad \boxed{a_0^3 = \frac{GM}{\Omega_e^2}}$$

budeme uvažovat $a = a_0 + \delta a$, kde δa je malá veličina (resp. $\delta a / a_0$)

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = \frac{\partial R}{\partial \phi} = \frac{6GM}{a}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_{22} \sin 2(\phi - \phi_{22})$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{9GM}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_{22} \cos 2(\phi - \phi_{22})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\delta a} &= -\frac{12GM}{n_0 a_0^2}\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 J_{22} \sin 2(\phi - \phi_{22}) && (3) \\ \dot{\phi} &= n - \Omega_e + \frac{18\,GM}{n_0 a_0^3}\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 J_{22} \cos 2(\phi - \phi_{22}) && (4) \end{aligned}}$$

do veličin prvního řádu v J_{22}

$(n^2 a^3 = GM)$

Derivací (4) dostaneme

$$\dot{\phi} = \cancel{n_0} + \frac{\partial n}{\partial a}\delta a - \cancel{\Omega_e} + \frac{18GM}{n_0 a_0^3}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_{22} \cos 2(\phi - \phi_{22})$$

$+O(\delta a^2)$

$$\dot{\phi} = -\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0}\delta a + \frac{18GM}{n_0 a_0^3}\left(\frac{R}{a}\right)^2 J_{22}\cos 2(\phi-\phi_{22})$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{3}{2}\frac{n_0}{a_0}\delta\dot{a} + \text{členy vyššího řádu než } O(J_{22})$$

$$\ddot{\phi} = \frac{18GM}{a_0^3}\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 J_{22}\sin 2(\phi-\phi_{22}) =$$

$$= 18 n_0^2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 J_{22}\sin 2(\phi-\phi_{22}) = 18\Omega_e^2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2 J_{22}\sin 2(\phi-\phi_{22})$$

ozn. $\boxed{K \equiv 18\Omega_e^2 (R/a_0)^2 J_{22}}$, pak

$$\boxed{\ddot{\phi} - K\sin 2(\phi-\phi_{22}) = 0}$$

ještě je výhodné zavést pomocnou úhlovou proměnnou $\psi \equiv 2(\phi-\phi_{22})+\pi$

$$\boxed{\ddot{\psi} + 2K\sin\psi = 0} \quad (5)$$

Toto je rovnice matematického kyvadla se stabilním stacionárním bodem $\psi=0$ a nestabilním stacionárním bodem $\psi=\pi$ a frekvencí malých kmitů

$$\omega_r = \sqrt{2K} = 6\Omega_e (R/a_0)\sqrt{J_{22}}$$ nebo periodou ve dnech

$$P_r\Big|_d = \frac{1}{6(R/a_0)\sqrt{J_{22}}} \doteq 820^d \quad (\text{nebo } a_0/R \simeq 6.62)$$

stacionární bod $\psi=0\,(2\pi)$ se zobrazí na geografickou délku

$\boxed{\phi = \phi_{22} \pm \pi/2}$, kdežto nestabilní bod je v $\phi_{22}, \phi_{22}+\pi$

Rovnice (5) má první integrál

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - 2K\cos\psi = I_1}$$

$$\left(\frac{dI_1}{dt} = \dot{\psi}\ddot{\psi} + 2K\dot{\psi}\sin\psi = \dot{\psi}\left(\ddot{\psi} + 2K\sin\psi\right) = 0\right)$$

Rovnici (3) lze pak zapsat

$$\boxed{\delta\dot{a} - \frac{2a_0}{3n_0}K\sin\psi = 0}$$

po vyřešení (5) lze kvadraturou zjistit $\delta a(t)$

nám bude postačovat znalost prvního integrálu

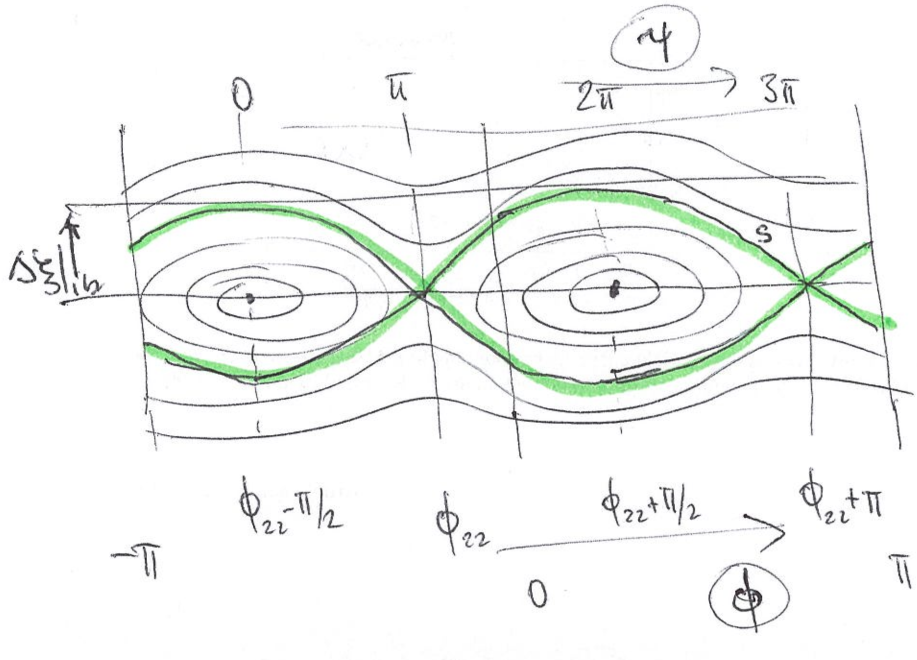
$$\boxed{\delta a + \frac{a_0}{3n_0}\dot{\psi} = I_2}$$

$$\left(\frac{dI_2}{dt} = \delta\dot{a} + \frac{a_0}{3n_0}\ddot{\psi} = \delta\dot{a} - \frac{2a_0}{3n_0}K\sin\psi = 0\right)$$

ozn. $\xi \equiv \delta a / a_0$ pak trajektorní řešení v rovině (ξ, ψ) jsou

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(C - 3n_0\xi\right)^2 - 2K\cos\psi = I_1}$$

librační řešení až po separatrix (S), které vyberu z $\delta a = 0 \wedge \dot{\psi} = 0$ mají $C = 0$; jmenovitě separatrix má rovnici



$$\boxed{\xi = \pm\frac{2\sqrt{2K}}{3\Omega_e}\sin\psi/2}$$

odtud dostaneme šířku librační oblasti $(\psi = 2\pi)$

$$\Delta\xi\Big|_{lib} = \frac{2\sqrt{2}K}{3\,\Omega_e} = 4\left(\frac{R}{a_0}\right)\sqrt{J_{22}}$$ nebo přímo

$$\Delta a\Big|_{lib} = 4R\sqrt{J_{22}} \simeq 34.2 \text{ km}$$

Oktupólní členy (neaxiální) mají tento tvar

$$-\frac{3}{2}\frac{GM}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^3 J_{31}\overbrace{\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)}^{\theta=\pi/2\,:\,4}\cos(\varphi-\varphi_{31})$$

$$\cancel{-15\frac{GM}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^3 J_{32}\cos\theta\sin^2\theta\cos 2(\varphi-\varphi_{32})} \longrightarrow \theta=\pi/2 \Rightarrow 0$$

$$-15\frac{GM}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^3 J_{33}\underbrace{\sin^3\theta}_{\theta=\pi/2\,:\,1}\cos 3(\varphi-\varphi_{33})$$

členy $\sim J_{31}$ a $\sim J_{33}$ budou tedy také důležité připsat k dynamice v geostacionární oblasti...