Pro periodické systémy s N-stupni volnosti zavádíme akční proměnné $J_i = \oint p_i \, dq_i$

v případě problém 2 těles je tedy

$$\boxed{\begin{aligned} J_\varphi &= \oint p_\varphi \, d\varphi = 2\pi P_1 \\ J_\theta &= \oint p_\theta \, d\theta = 2\pi (P_2 - P_1) \; (= C_2) \\ J_r &= \oint p_r \, dr = \sqrt{2}\,\pi \frac{G\mu^{3/2} M}{\sqrt{-E}} - 2\pi P_2 \; (= \bar{C}) \end{aligned}}$$

všimneme si, že $\quad \sum J_i = \sqrt{2}\,\pi \, G \dfrac{\mu^{3/2} M}{\sqrt{-P_3}}$, tj.

$$\boxed{H = P_3 = -2\pi^2 \frac{G^2 \mu^3 M^2}{(\sum J_i)^2}}$$

při adiabatické změně gravitační konstanty (tj. $G/\dot{G} \simeq \tau_{\text{Hubble}}$) se $(J_\varphi, J_\theta, J_r)$ zachovávají; to znamená

$$P_1 = \mu \sqrt{GMa(1-e^2)} \cos I = \text{konst.} \quad (1)$$

$$P_2 = \mu \sqrt{GMa(1-e^2)} = \text{konst} \quad (2)$$

$$\frac{G}{\sqrt{-E}} = \text{konst.} \longrightarrow G^2/E = \text{konst.} \quad \text{neboť} \quad E \sim \frac{G}{a}$$

platí $\boxed{Ga = \text{konst.}}$ a z (1) a (2) pak $\underline{e, I = \text{konst.}}$

neboli $\boxed{-\dfrac{\dot{a}}{a} = \dfrac{\dot{G}}{G}}$

z 3. Keplerova zákona

$$a^3 = \kappa G P^2$$

tedy $\quad \underbrace{3a^2\dot a} = \kappa P^2 \dot G + 2\kappa G P \dot P \quad / \cdot G$

$$\underbrace{-3a^3 \dot G} = \kappa P^2 G \dot G + 2\kappa G^2 P \dot P$$

$$-3\cancel{\kappa} G \dot G P^2 = \cancel{\kappa} P^2 G \dot G + 2\cancel{\kappa} G^2 P \dot P$$

tj. $\boxed{\dfrac{\dot P}{P} = -2\dfrac{\dot G}{G}}$ tedy u binárních pulsarů & planetárních drah dávají

dnes $\boxed{|\dot G / G| \lesssim \ldots \times 10^{-13}\, y^{-1}}$

podobně, kdyby byla $G =$ konst. ale měnila by se $\underline{m_1}$

$\dfrac{\mu^3 M^2}{\mathcal{E}} =$ konst. , neboť $\mathcal{E} \sim \dfrac{\mu M}{a}$ pak

$\boxed{\mu^2 M a = \text{konst.}}$ hned též vidíme z $P_1, P_2 =$ konst. že opět $\underline{e, I = \text{konst.}}$, ale

$$\dot\mu = \ldots = \mu \frac{\dot M}{M}\frac{m_2}{m_1} \qquad (\dot M = \dot m_1)$$

a hlavně $\quad (\cancel{1 + 2\frac{m_2}{m_1}})\, \dot M a = -M \dot a$

$$\boxed{\frac{\dot a}{a} = -\frac{\dot M}{M}}$$

aplikujme na m_1 Slunce i to ztrácí hmotu ($\dot M / M < 0$)

tedy planetární dráhy expandují

ztráty hmoty Slunce jsou díky

- elektromag. záření (≃ 4.3×10^9 kg/s)
- částicím ⊙ větru (≃ 1.7×10^9 kg/s)
- neutrinům (+ možné nepatrné další exotické částice)

modely odhadují $\frac{\dot{M}}{M} \simeq -10^{-13}\, y^{-1}$ (neb $\dot{M} \simeq \pi \times 10^7 \times 7 \times 10^9$ kg/y ≃ 2.1×10^{17} kg/y, $M \simeq 2 \times 10^{30}$ kg)

největší na tom participuje záření (≃ 80%)

tímto efektem této velké poloosy Zemské dráhy expanduje

$$\simeq \delta a \simeq -\frac{\dot{M}}{M}\, a\, \Delta t \simeq 10^{-11}\, cy^{-1} \times 1.5 \times 10^{11}\, m \simeq \underline{1.5\, m/cy}$$

na hranici měřitelných hodnot.

to se porovnává s ~ $\underline{3.8\ m/cy}$ vzdalováním Měsíce od Země slapovými jevy, ale ten umíte z dlouhé řady extrémně přesných měření LLR

(neboť $a^3 = \kappa M P^2 \rightarrow \dot{P}/P = -2\dot{M}/M$)

další aplikací je přenos hmoty v těsných binárních systémech; v této situaci uvažujeme $G = \text{konst}$, a také $M = \text{konst}$, ale m_1 a m_2 se mění (tak, že $m_1 + m_2 = M = \text{konst.}$, pokud navíc nepředpokládáme ještě únik hmoty z celého systému, což v některých případech také může nastat); pak z podmínek

$$\mu\sqrt{a}\,\sqrt{GM(1-e^2)}\,\cos I = \text{konst.} \qquad (J_\varphi)$$

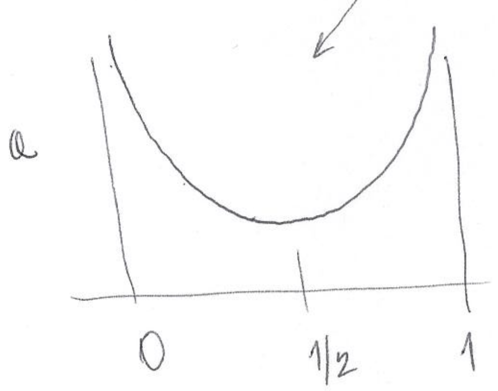
$$\mu\sqrt{a}\,\sqrt{GM(1-e^2)} = \text{konst.} \qquad (J_\theta)$$

$$\frac{\mu^{3/2}}{\sqrt{-E}} \sim \mu\sqrt{a} = \text{konst.} \qquad (J_r)$$

plyne opět $e = \text{konst}$ a $I = \text{konst}$ a

$$\boxed{a \cdot m_1^2 m_2^2 = \text{konst}} \quad \text{neboli} \quad \boxed{a \cdot m_1^2 (M - m_1)^2 = \text{konst}}$$

neboli $\boxed{a \sim \dfrac{1}{\mu_1^2 (1-\mu_1)^2}}$



kde $\mu_1 = m_1/M$; funkce na pravé straně této rovnice má minimum pro $\mu_1 = 1/2$, tj. pro $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}M$

v takovéto konfiguraci je velká poloosa systému nejmenší možná