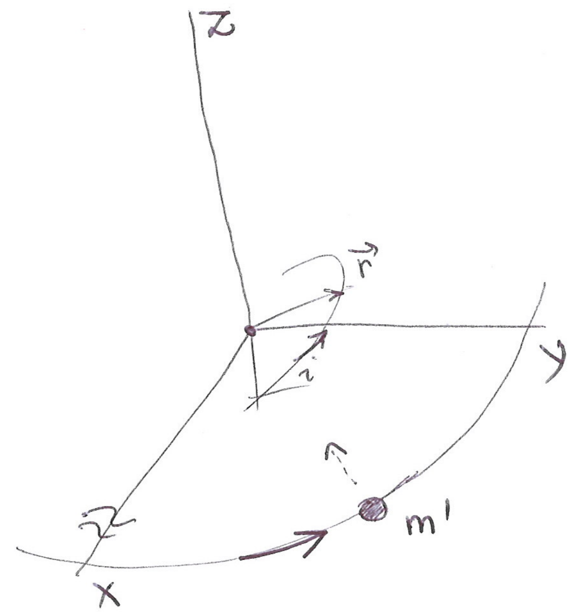
Kozaiův model - resonance

Kozai (1962) rozvinul jednodušší model pohybu částice v axisymetrickém poli daném střední hodnotou kvadrupólového slapového členu. V této kapitole představíme elementy Kozaiova modelu, který nachází uplatnění v mnoha planetárních aplikacích (některé zmíníme na závěr).



Model: V soustavě hmotného středu $\mu = Gm$ se pohybuje testovací částice na keplerovské oskulační dráze $(a, e \ldots l)$. Kromě monopólového členu hmotného středu na ni poruchově působí vnější těleso na fixní eliptické dráze s excentricitou e' a velkou poloosou a'; rovinu jeho pohybu můžeme bez újmy obecnosti považovat za xy. Takto

$$R = R(a, e \ldots l;\, a', e', \varpi')$$ [lze orientovat x, že $\omega' = 0$]

Klademe si za cíl analyzovat dráhu testovacího tělesa na časové škále mnohem delší než oběžné periody obou těles a též předpokládáme, že nejsou ve vzájemné resonanci. Vystředujeme tedy R přes $\underline{l}$ a $\underline{l'}$.

Omezíme se jen na kvadrupólní část R (K2

$$\boxed{R = -\frac{Gm'}{r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^2 P_2(\cos S) = = -\frac{Gm'}{2r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^2 (3\cos^2 S - 1) = -\frac{Gm'}{2r'}\left(\frac{r}{r'}\right)^2\left[3(\vec{n}\cdot\vec{n}')^2 - 1\right]}$$

Středování přes l, l' provedeme nezávisle.

<u>středování přes l:</u> (provedeme velmi podobně jako v modelu heliocentrické rezonance)

$$\vec{r} = a\left[(\cos u - e)\vec{e}_p + \eta \sin u\, \vec{e}_a\right]$$

$$\vec{n} = \left(\frac{a}{r}\right)\left[(\cos u - e)\vec{e}_p + \eta \sin u\, \vec{e}_a\right] \;; \quad l \to u: \; du\left(\frac{r}{a}\right) = dl$$

$$\overline{R} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dl\, R = -\frac{Gm'}{2r'^3}a^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du \left(\frac{r}{a}\right)\left[3(\vec{r}\cdot\vec{n}')^2 - r^2\right]\frac{1}{a^2}$$

$$= -\frac{Gm'}{2r'}\left(\frac{a}{r'}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du\left(\frac{r}{a}\right)\left\{3\left[(\cos u - e)(e_{pn}) + \eta \sin u\,(e_{an})\right]^2 - 1 + 2e\cos u \pm e^2\cos^2 u\right\}$$

$$= -\frac{Gm'}{2r'}\left(\frac{a}{r'}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du\,(1 - e\cos u)\Big\{3(\cos u - e)^2(e_{pn})^2 + 3\eta^2\sin^2 u\,(e_{an})^2 +$$
$$\cancel{+\,6(\cos u - e)\sin u\,(e_{pn})(e_{an})} \to \text{liché } u\to -u$$
$$-\,1 + 2e\cos u \pm e^2\cos^2 u\Big\}$$

$$= -\frac{Gm'}{2r'}\left(\frac{a}{r'}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du\,\Big\{3(\cos^2 u + e^2 - \cancel{2e\cos u})(e_{pn})^2 + 3\eta^2\sin^2 u\,(e_{an})^2 \quad \nearrow \text{liché } u\to -u$$
$$-\,1 + \cancel{2e\cos u} \pm e^2\cos^2 u -$$
$$-\,3e(\cancel{\cos^3 u} + \cancel{e\cos u} - 2e\cos^2 u)(e_{pn})^2 + \cancel{3\eta^2\sin^2 u\, e\cos u\,(e_{an})^2}$$
$$+\,\cancel{e\cos u} \pm 2e^2\cos^2 u + \cancel{e^3\cos^3 u}\Big\}$$

$$\langle \cos^2 u\rangle = 1/2$$

$$= -\frac{Gm'}{2r'}\left(\frac{a}{r'}\right)^2\left[3\left(\tfrac{1}{2}+e^2\right)(e_{pn'})^2+\tfrac{3}{2}\eta^2(e_{Qn'})^2-1-\frac{e^2}{2}+3\underbrace{e^2}_{(e_{pn})^2}-e^2\right]$$

$$\boxed{= -\frac{Gm'}{4r'}\left(\frac{a}{r'}\right)^2\left[3(1+4e^2)(\vec{e}_p\cdot\vec{n}')^2+3\eta^2(\vec{e}_Q\cdot\vec{n}')^2-2-3e^2\right]}$$

nyní středování přes l': $\quad \vec{n}' = \begin{bmatrix}\cos f'\\ \sin f'\\ 0\end{bmatrix}$

$$\bar{R} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dl'\,(\dots) = \left(l'\to f':\ dl' = df'\,\frac{1}{\eta'}\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{Gm'}{4a'}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\frac{1}{\eta'}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} df'\left(\frac{a'}{r'}\right)\left[3(1+4e^2)(\vec{e}_p\cdot\vec{n}')^2+3\eta^2(\vec{e}_Q\cdot\vec{n}')^2-2-3e^2\right]$$

udělalo by liché mocniny $\cos f'$

$$= -\frac{Gm'}{4a'}\left(\frac{a}{a'}\right)^2\frac{1}{\eta'^3}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} df'\,(1+\cancel{e\cos f'})\Big\{3(1+4e^2)\left[e_{p1}^2\cos^2 f+e_{p2}^2\sin^2 f+\cancel{2e_{p1}e_{p2}\sin f\cos f}\right]$$

$f\to -f$

$$+3\eta^2\left[e_{Q1}^2\cos^2 f+e_{Q2}^2\sin^2 f'+\cancel{2e_{Q1}e_{Q2}\sin f\cos f}\right]$$

$f\to -f$

$b' = a\eta'$

$$-2-3e^2\Big\} =$$

$$= -\frac{Gm'}{4b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2\left\{\tfrac{3}{2}(1+4e^2)\underbrace{(e_{p1}^2+e_{p2}^2)}_{1-e_{p3}^2}+\tfrac{3}{2}\eta^2\underbrace{(e_{Q1}^2+e_{Q2}^2)}_{1-e_{Q3}^2}-2-3e^2\right\}$$

$$= -\frac{Gm'}{8b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2\left[3(1+4e^2)(1-\sin^2 i\sin^2 g)+3(1-e^2)(1-\sin^2 i\cos^2 g)-4-6e^2\right\}$$

$$= -\frac{Gm'}{8b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2\Big[3(1-\sin^2 i\sin^2 g+1-\sin^2 i\cos^2 g)+$$

$$+3(4e^2-4e^2\sin^2 i\sin^2 g-e^2+e^2\sin^2 i\cos^2 g)-4-6e^2\Big\}$$

(K4

$$= -\frac{Gm'}{8b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2 \Big[3(2-\sin^2 i) + 9e^2 - 4 - 6e^2 - \qquad 5\cos^2 g - 4$$

$$+ 3e^2\sin^2 i\,(\cos^2 g - 4\sin^2 g)\Big]$$

$$\boxed{= -\frac{Gm'}{8b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2 \left[2 + 3e^2 - 3\sin^2 i\,(1 + 4e^2 - 5e^2\cos^2 g)\right]}$$

$$\boxed{= \ldots = -\frac{Gm'}{16b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2 \left[(2+3e^2)(3\cos^2 i - 1) + 15e^2\sin^2 i\cos 2g\right]} = \overline{R}$$

Všimněme si, že $\underline{R = R(a, e, i, -, g; a')}$, jak jsme očekávali (?) po středování vypadla závislost na $\underline{\Omega}$ a jde tedy o typ axisymetrického Hamiltoniánu. Vedle samozřejmého integrálu $\underline{a = \text{konst.}}$ tedy máme i $\underline{\eta\cos i = \text{konst.}}$ jak jsme dokázali v obecné kapitole o poruchovém počtu. Závislost na $\underline{i}$ z R lze tedy eliminovat pomocí tohoto integrálu. Navíc také víme, že

$$\underline{R(a, e, i, g; a') = \text{konst.}}$$

je integrál pro zbývající systém rovnic pro $\underline{(e, g)}$ či $\underline{z = e\exp(ig)}$ nebo třeba i (G, g) v Delaunayových proměnných. Ať už ji řešíme pro $\underline{z(t)}$ jakkoli složitě musí sledovat isolinie $R=$ konst. v rovině (KS

(e, g).

Provedeme krátkou analýzu isolinií $R=$ konst. Označme „k" „i"

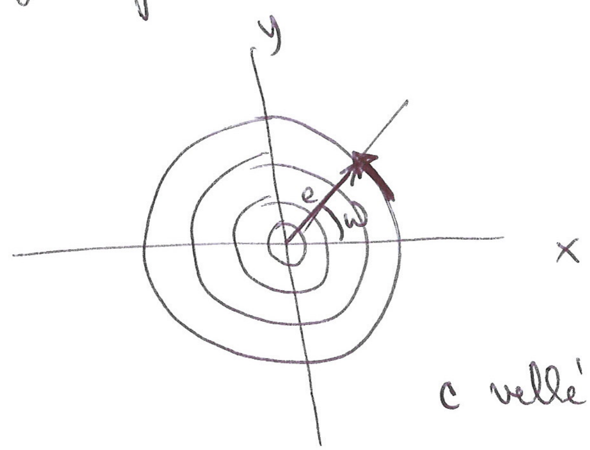
$c = \eta \cos i = \sqrt{1-e^2}\cos i$. Dále označme komponenty $x = (x+iy)$

$x = e\cos\omega$, $y = e\sin\omega$. Z R můžeme vynechat konstantní

škálovací faktor „$-\frac{Gm'}{16b'}\left(\frac{a}{b'}\right)^2$".

$$\Phi(x,y) = (2+3x^2+3y^2)\left(\frac{3c^2}{1-x^2-y^2}-1\right) + 15(x^2-y^2)\left(1-\frac{c^2}{1-x^2-y^2}\right)$$

Regulární dráhy, např. asteroidů, mají velmi malé e i i a tedy c blízké 1. Pro takové hodnoty $\Phi(x,y)$ jsou isolinie kruhové křivky s jediným minimem $(0,0)$



c velké ($\gtrsim 0.8$)

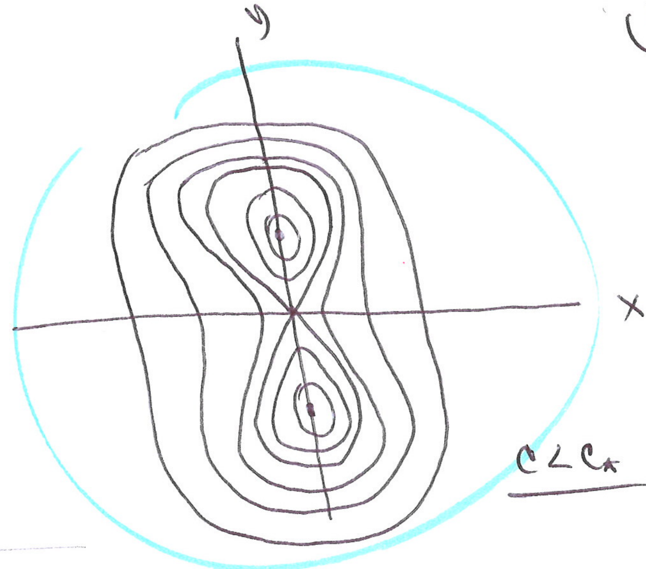
Analýza ukazuje, že pro menší hodnoty c se však topologie křivek $\Phi(x,y)=$ konst. mění.

Za chvíli ukážeme, že pro $c < \sqrt{3/5} = c_*$ je poloha:

a $\Phi(x,y)$ má dvě minima na ose y a inflexní (sedlový) bod v $(0,0)$.

O tom se přesvědčíme analýzou

$$\Phi(x=0,y)=\frac{(3y^2+2)(3c^2-1+y^2)-15y^2(1-c^2-y^2)}{1-y^2}$$



$c < c_*$

(vedle $y=0$)

rovnice $\partial \Phi(x=0,y)/\partial y = 0$ vede na

$$\boxed{3y^4-6y^2+3-5c^2=0}$$

→ má řešení $\boxed{y^2 = 1 \pm c\sqrt{5/3}}$, což má dva kořeny ≤ 1

$y_\pm = \pm\sqrt{1-c\sqrt{5/3}}$

pro $\boxed{c \leq c_* = \sqrt{3/5}}$

neboť $c = \cos i\sqrt{1-e^2}$, pak dostaly pro $i > i_* = \mathrm{acos}(\sqrt{3/5}) \doteq 39.2..^\circ$

máme vždy $c \leq c_*$.

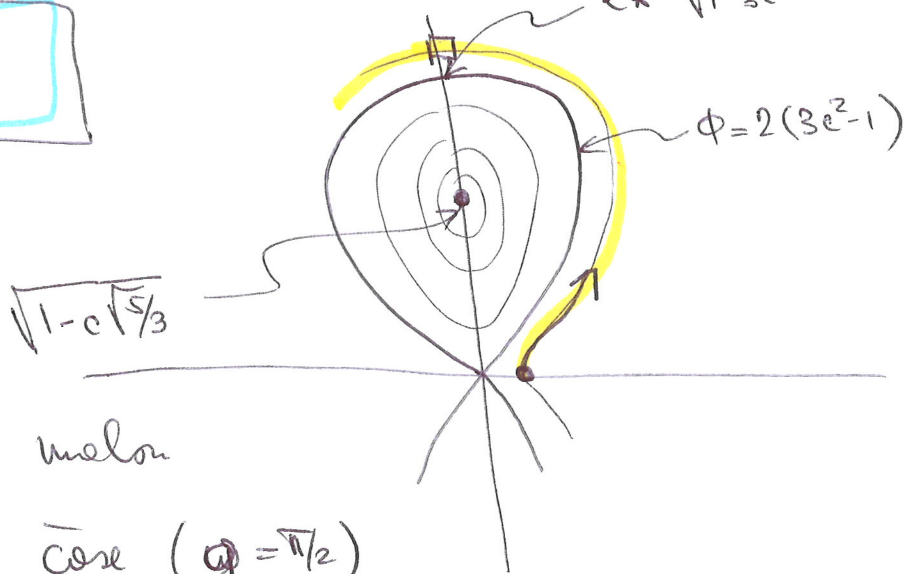
Hodnota $\boxed{\Phi(0,0) = 2(3c^2-1)}$; když s touto hodnotou kontury Φ dosáhne na y ose hodnoty e_*:

$$\Phi(x=0,e_*)=\frac{(3e_*^2+2)(3c^2-1+e_*^2)-15e_*^2(1-c^2-e_*^2)}{1-e_*^2}=2(3c^2-1)$$

$(c \lesssim c_*)$

tato rovnice má vedle ($y=0$) kořen

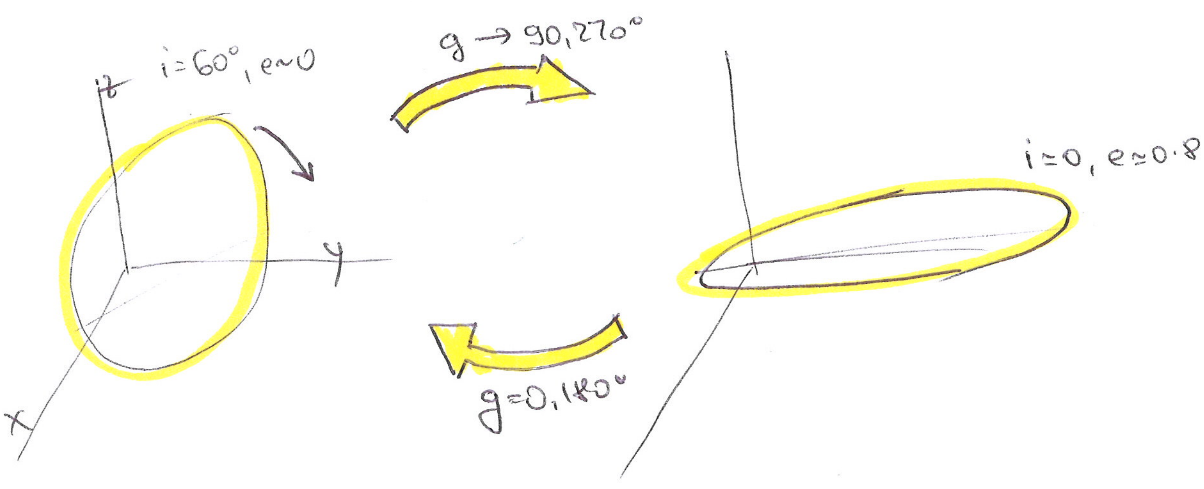
$$\boxed{e_* = \pm\sqrt{1-\frac{5}{3}c^2}}$$



Když tedy začneme pohyb po křivce s $\Phi > 2(3c^2-1)$ i s velmi malou počáteční e, nutně po čase ($g=\pi/2$) excentricita dosáhne hodnoty $> e_* = \sqrt{1-\frac{5}{3}c^2}$, to může být velmi velká hodnota. Např. vezmeme počáteční

$e = 0.05$, $g = 0$, $i = 60°$ $\rightarrow$ $c = 0.499937\ldots$

a $\boxed{e_* = 0.765}$, tj. když $g \to 90°$ hodnota e bude kolem 0.8!



Kozaiův cyklus

Všimněme si, že existence Kozaiova cyklu závisí jen na hodnotě c, tj. počátečních podmínkách dat!

vůbec ale nezávisí na tělese působícím poruchu. (k8

Samozřejmě ale <u>časová škála</u> přechodu do stavu vysoké excentricity na tomto závisí.

<u>Příklady</u>:

1) iregulární satelity
2) Pluto