Variační křivka v Hillově úloze

vycházejme z rovnic

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} - 2n'\dot{y} &= \frac{\partial F}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n'\dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned}}$$

planární Hillovy úlohy

$$F = \frac{Gm}{R} + \frac{3}{2} n'^2 x^2 \quad \left(+ n'^2 a' \delta_{12}\, x \right) \qquad R = \sqrt{x^2+y^2}$$

zavedeme komplexní proměnnou $u = x + iy$

a časový parametr $\tau = (n-n')t + \tau_0$

(též $\zeta = e^{i\tau}$, $D = \frac{1}{i}\frac{d}{d\tau} = \zeta \frac{d}{d\zeta}$)

zde nový parametr n je siderická oběžná doba měsíce, tj. perioda $P = 2\pi/(n-n')$ je synodická perioda oběhu měsíce v rotujícím systému (~ 29.5 dne)

pak jednoduše vidíme

$$\ddot{u} + 2n' i \dot{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) F$$

a při označení

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\boxed{D^2 u + 2mDu = -2\frac{\partial F'}{\partial \bar{u}}} \quad (1) \qquad F' = F/(n-n')^2\,; \quad m \equiv \frac{n'}{n-n'} \approx$$

$$\approx 0.08085\ldots$$

Představujme si nyní, že námi hledané periodické řešení zobecňuje kruhové řešení; bude pak výhodné zavést malou veličinu w místo u že

$$u = a\zeta(1+w)\,, \quad \bar u = a\zeta^{-1}(1+\bar w) \qquad (|w| \ll 1)$$ (V2

kde $\underline{a}$ je jiný škálový parametr. Uvidíme, že je ho výhodné s pohybem $(\underline{n-n'})$ svázat vztahem

$$\boxed{\frac{Gm}{(n-n')^2 a^3} = K(m) = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2}$$

z definice $\left.\begin{array}{l} u = x+iy \\ \bar u = x - iy \end{array}\right\} \quad x = \frac{1}{2}[u+\bar u]$

$$x = \frac{a}{2}\left[\zeta(1+w) + \zeta^{-1}(1+\bar w)\right]$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4}\left[\zeta^2(1+w)^2 + \zeta^{-2}(1+\bar w)^2\right] + \frac{a^2}{2}(1+w)(1+\bar w)$$

$$R^2 = u\bar u = a^2(1+w)(1+\bar w)$$

$\frac{\partial}{\partial \bar u} = \frac{\zeta}{a}\frac{\partial}{\partial \bar w}$, přímou aplikací dostaneme

levou str. (1) $= \cancel{a\zeta}\left[D^2 w + 2(m+1)Dw\right] + (1+2m)\cancel{a\zeta}(1+w)$

pravou str. (1) $= -\cancel{a\zeta}\frac{\partial}{\partial \bar w}\left\{K\frac{2}{\sqrt{(1+w)(1+\bar w)}} + \frac{3}{4}m^2\left[\zeta^2(1+w)^2 + \zeta^{-2}(1+\bar w)^2\right] + \frac{3}{2}m^2(1+w)(1+\bar w)\right\}$

odtud již velmi snadno (1) → (1')

$$\boxed{D^2 w + 2(m+1)Dw = -\frac{\partial G}{\partial \bar w}} \qquad (1')$$

$$G = K(m)\left[\frac{2}{\sqrt{(1+w)(1+\bar w)}} + (1+w)(1+\bar w)\right] + \frac{3}{4}m^2\left[\zeta^2(1+w)^2 + \zeta^{-2}(1+\bar w)^2\right]$$

kdyby ještě člen SEP

$\left(+\lambda\left[\zeta(1+w) + \zeta^{-1}(1+\bar w)\right]\right) \qquad \lambda \equiv m^2\delta_{12}\frac{a'}{a}$

Rovnice pohybu pro $\underline{w}$ tedy zní

$$D^2 w + 2(m+1)Dw + K(m)\left[1+w-(1+w)^{-1/2}(1+\bar{w})^{-3/2}\right] + \frac{3}{2}m^2\xi^{-2}(1+\bar{w}) \quad (2)$$

$$(+\lambda\xi^{-1}) = 0$$

→ až na tento člen vše lineární !!

rozepíšeme lin. a nelin. části (2)

$$\boxed{L(w,\bar{w}) = W(w,\bar{w})} \quad (3)$$

$$L(w,\bar{w}) = D^2 w + 2(m+1)Dw + \frac{3}{2}K(m)(w+\bar{w})$$

$$W(w,\bar{w}) = -\frac{3}{2}m^2\xi^{-2}(1+\bar{w}) - \lambda\xi^{-1} + K(m)\,Q(w,\bar{w})$$

$$Q(w,\bar{w}) = (1+w)^{-1/2}(1+\bar{w})^{-3/2} - 1 + \frac{1}{2}w + \frac{3}{2}\bar{w} = \underline{\frac{3}{8}w^2 + \frac{15}{8}\bar{w}^2 + \frac{3}{4}w\bar{w} + O(3)}$$

Jak nyní řešit (3) ?! metoda iterací

- 1 krok $Q \equiv 0$ a vyřešit jen rovnice s lineárním zdrojem $\underline{W = -\frac{3}{2}m^2\xi^{-2}(1+\cancel{\bar{w}}) - \lambda\xi^{-1}}$
- tohle řešení vzít a dosadit do Q ...

my se omezíme jen na řešení 1. řádu

$$\boxed{L(w,\bar{w}) = -\frac{3}{2}m^2\xi^{-2} - \lambda\xi^{-1}}$$

snadno se přesvědčíme, že řešením je

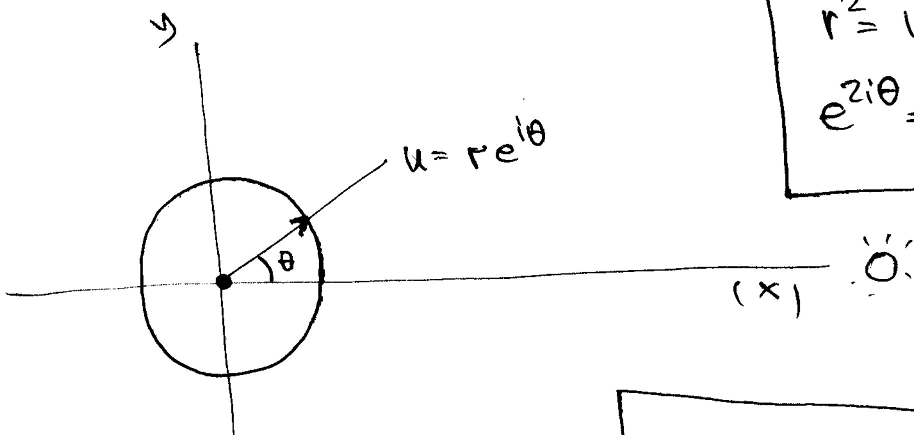
$$\underline{w = w_2\xi^2 + w_{-2}\xi^{-2} + w_1\xi + w_{-1}\xi^{-1}} \quad \text{kde}$$

$$w_2 = \frac{9}{4}\,\frac{\kappa(m)\,m^2}{4(3-2m+\frac{1}{2}m^2)} \simeq \underline{\frac{3}{16}m^2 + O(m^4)}$$

$$w_{-2} = -\frac{3}{2}\,\frac{4+4(m+1)+\frac{3}{2}\kappa(m)}{4(3-2m+\frac{1}{2}m^2)}\,m^2 \simeq \underline{-\frac{19}{16}m^2 + O(m^4)}$$

$$w_1 = \frac{3}{2}\,\frac{\kappa(m)\,\lambda}{m(-2+\frac{1}{2}m)} \simeq \underline{-\frac{3}{4}\,\frac{\lambda}{m}}$$

$$w_{-1} = -\frac{1+2(1+m)+\frac{3}{2}\kappa}{m(-2+\frac{1}{2}m)}\,\lambda \simeq \underline{\frac{9}{4}\,\frac{\lambda}{m}}$$



$$\boxed{\begin{aligned} r^2 &= u\bar{u} = a^2(1+w)(1+\bar{w}) \\ e^{2i\theta} &= \frac{u}{\bar{u}} = e^{2i\tau}\,\frac{1+w}{1+\bar{w}} \end{aligned}}$$

$$\delta r = r - a = a\left\{\sqrt{(1+w)(1+\bar{w})} - 1\right\} \simeq \underline{\frac{a}{2}(w+\bar{w}) + O(w^2)}$$

odtud do prvního řádu

$$\boxed{\begin{aligned} \delta r &\simeq \frac{a}{2}(w+\bar{w}) \\ \theta - \tau &\simeq \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+w}{1+\bar{w}}\right) \simeq \frac{1}{2i}(w-\bar{w}) \end{aligned}}$$

pro člen odpovídající variaci:

$$w = w_2\zeta^2 + w_{-2}\zeta^{-2}, \quad \bar{w} = w_2\zeta^{-2} + w_{-2}\zeta^2$$

$$\underline{\delta r} = \frac{1}{2}\left[w_2(\zeta^2+\zeta^{-2}) + w_{-2}(\zeta^2+\zeta^{-2})\right] = (w_2 + w_{-2})\cos 2\tau =$$

$$= \underline{-am^2\cos 2\tau}$$

$$\delta\theta = \frac{1}{2i}\left[w_2(\zeta^2-\zeta^{-2}) + w_{-2}(\zeta^{-2}-\zeta^2)\right] = (w_2 - w_{-2})\sin 2\tau =$$

$$= \underline{\frac{11}{8}m^2\sin 2\tau}$$

radiální perturbace δr je asi 2500 km (V5)

a variace v délce je $\simeq 31'$; ve skutečnosti celková hodnota je $\simeq 39.5'$. Známá již Keplerovi (resp. Tychonovi) má periodu 14.78 dne.

Člen odpovídající SEP:

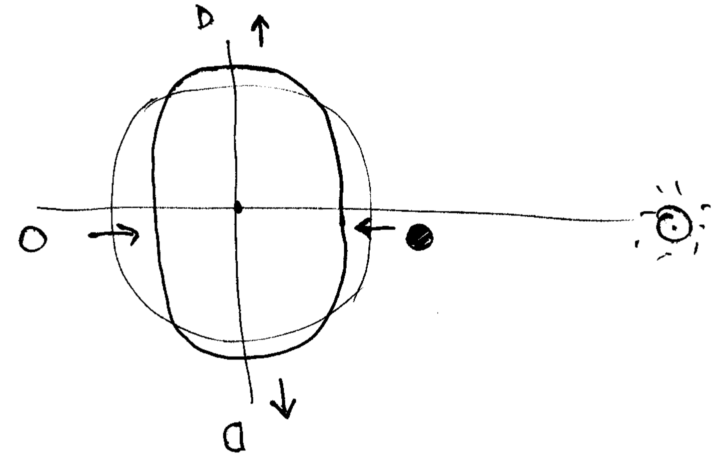
$$w = w_1 \zeta + w_{-1} \zeta^{-1} \; ; \quad \bar{w} = w_1 \zeta^{-1} + w_{-1} \zeta$$

$$\delta r = (w_1 + w_{-1}) \cos\tau = \frac{3}{2} \frac{\lambda a}{m} \cos\tau$$

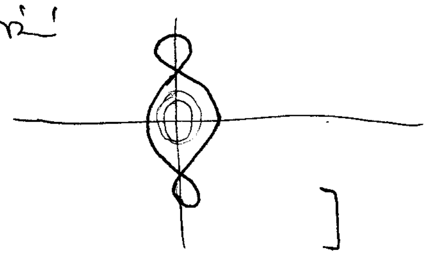
$$\delta\theta = (w_1 - w_{-1}) \sin\tau = -3 \frac{\lambda}{m} \sin\tau$$

---

u variace je výsledná křivka

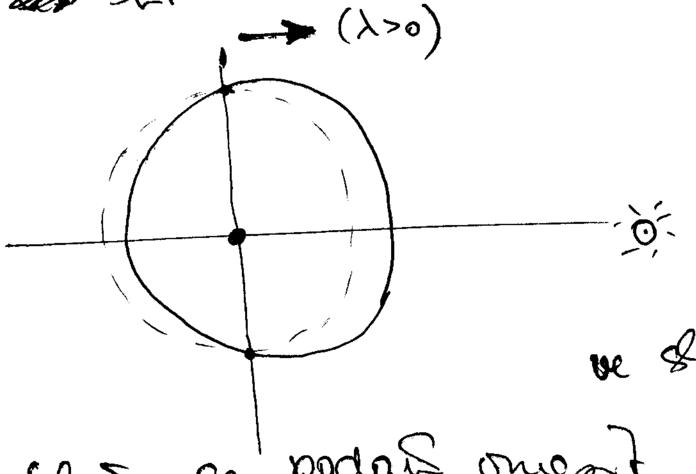


[pozn. Poincaré dokázal položení!



]

u SEP



citlivost $\simeq \frac{3}{2} m \left(\frac{a'}{a}\right) \cdot \delta_{12} \cdot a$

$\simeq \underbrace{\frac{3}{2} m a'}\, \delta_{12}$

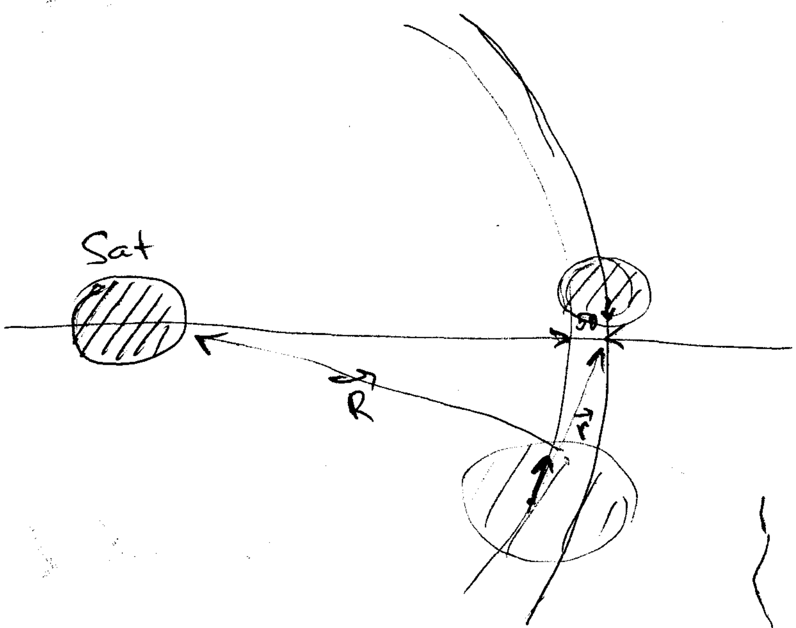
$\simeq 1.82 \times 10^{12}\, \delta_{12}$ (cm)

ve skutečnosti $2.9 \times 10^{12}\, \delta_{12}$ (cm)

pakliže se podaří omezit 1 cm

$\rightarrow \; |\delta_{12}| \lesssim \frac{1}{3} \times 10^{-12} \sim 3.5 \times 10^{-12}$!

Janus - Epimetheus



$a_1 = 151460$ km

$a_2 = 151410$ km

$\boxed{\delta a = 50 \text{ km}}$

$R_{Jan} \doteq 90$ km

$R_{Epi} \doteq 57$ km

v Hillově systému