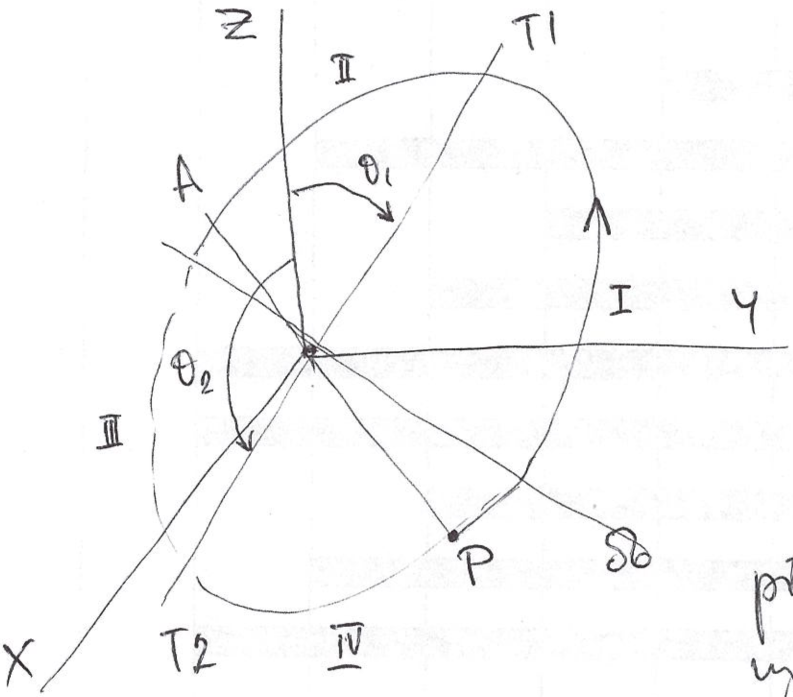
Poznámky k řešení problému 2 těles H-J rovnicí, kontinuální Q_1, Q_2, Q_3 souřadnice při pevném oběhu a přidružené věci.

P, A ... pericentrum & apocentrum

$T1, T2$ ... extrémy θ



P-T1 ... fáze I
T1-A ... fáze II
A-T2 ... fáze III
T2-P ... fáze IV

[illegible]

předpokládáme separaci vytvořující funkce

$$F = -P_3 t + P_1 \varphi + F_2(\theta, P_1, P_2) + F_3(r, P_2, P_3)$$

a víme

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta} = \pm \sqrt{P_2^2 - \frac{P_1^2}{\sin^2\theta}} \quad (1) \quad \left(= p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial r} = \pm \sqrt{2\mu P_3 - \frac{P_2^2}{r^2} + 2G\frac{\mu^2 M}{r}} \quad (2) \quad \left(= p_r = \mu \dot{r}\right)$$

nutno tedy vyšetřit odlišná znaménka v rovnicích (1) & (2) pro fáze I - IV.

body obrátu v θ- a r-pohybu jsou dány kořeny výrazů pod odmocninami v (1) a (2).

- $$P_2^2 - \frac{P_1^2}{\sin^2\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\sin\theta_{1,2} = P_1/P_2 = \cos I}$$

takže např. pro $I \leq \pi/2$: $\theta_1 = \pi/2 - I$

$\theta_2 = \pi/2 + I$

- $$2\mu P_3 - \frac{P_2^2}{r^2} + 2G\frac{\mu^2 M}{r} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{r_{1,2} = -\frac{1}{2}\left[G\frac{\mu M}{P_3} \pm \sqrt{\frac{G^2\mu^2 M^2}{P_3^2} + 2\frac{P_2^2}{\mu P_3}}\right]} \qquad (P_3 < 0)$$

Pro účely kvadratury (1) a (2) definujme

$$f_2(\theta; P_1, P_2) \equiv \int_{\pi/2}^{\theta} \sqrt{P_2^2 - P_1^2/\sin^2\theta'}\, d\theta'$$

$$f_3(r; P_2, P_3) \equiv \int_{r_1}^{r} \sqrt{2\mu P_3 - P_2^2/r'^2 + 2G\frac{\mu^2 M}{r'}}\, dr'$$

a) řešení $F_2(\theta; P_1, P_2)$ a spojitost Q_1:

- fáze I : $F_2 = -f_2(\theta)$

- fáze II : $F_2 = +f_2(\theta) + C_1$, tak aby Q_1 bylo spojité přechodem přes T_1

$$\left(Q_1 = \frac{\partial F}{\partial P_1} = \varphi + \frac{\partial F_2}{\partial P_1}\right)$$

$$\underbrace{\varphi_{T1} - \frac{\partial}{\partial P_1} f(\theta_1)}_{\text{limita z obl. I}} = \underbrace{\varphi_{T1} + \frac{\partial}{\partial P_1}\left(f(\theta_1)+C_1\right)}_{\text{limita z obl. II}}$$

bereme tedy $C_1 = -2f(\theta_1)$

– fáze III: $F_2 = +f_2(\theta) + C_1$

– fáze IV: $F_2 = -f_2(\theta) + C_2$, tak aby Q_1 bylo spojité v T2

$$\underbrace{\varphi_{T2} + \frac{\partial}{\partial P_1}\left(f_2(\theta_2)+C_1\right)}_{\text{limita z obl. III.}} = \underbrace{\varphi_{T2} - \frac{\partial}{\partial P_1}\left(f_2(\theta_2) - C_2\right)}_{\text{limita z obl. IV}}$$

bereme tedy $C_2 = +2f_2(\theta_2) + C_1 = +2\left[f_2(\theta_2) - f_1(\theta_1)\right]$

$$C_2 = +2\left[\int_{\pi/2}^{\theta_2}\sqrt{\dots} - \int_{\pi/2}^{\theta_1}\sqrt{\quad}\right] = +2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{P_2^2 - P_1^2/\sin^2\theta'}\,d\theta' \quad (3)$$

(též $C_1 = +\frac{1}{2}C_2$)

potřebujeme tedy spočítat integrál (3):

$\boxed{C_2 = \dots = +2\pi\,(P_2 - P_1)}$, tj. $C_1 = \pi\,(P_2 - P_1)$

při opětovném přechodu IV → II, ale skok Q_1:

$\boxed{\delta Q_1 = Q_1^{I} - Q_1^{IV} = -\frac{\partial C_2}{\partial P_1} = +2\pi}$

což je v souladu s interpretací $Q_1 = \Omega$ jako 2π-periodické veličiny

b) řešení $F_3(r; P_2, P_3)$ a spojitost Q_3:

- fáze I & II: $F_3 = f_3(r)$
- fáze III & IV: $F_3 = -f_3(r) + \bar{C}$

kde $\bar{C}$ volíme, aby člen v A zaručil spojitost Q_3

$$\left(Q_3 = \frac{\partial F}{\partial P_3} = -t + \frac{\partial F_3}{\partial P_3} \right)$$

$$\underbrace{-t_A + \frac{\partial}{\partial P_3} f_3(r_2)}_{\text{limita II}} = \underbrace{-t_A - \frac{\partial}{\partial P_3}\left(f_3(r_2) - \bar{C}\right)}_{\text{limita III}}$$

tedy

$$\bar{C} = 2 f_3(r_2) = 2 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2\mu P_3 - \frac{P_2^2}{r'^2} + 2G\frac{\mu^2 M}{r'}}\, dr'$$

$$= 2\sqrt{-2\mu P_3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{r'} \sqrt{(r_2 - r')(r' - r_1)}$$

$$= \dots = \frac{\pi}{2}\left(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2}\right)$$

$r_1 + r_2 = -G\frac{\mu M}{P_3}$; $r_1 r_2 = -\frac{1}{2}\frac{P_2^2}{\mu P_3}$; tedy dohromady

$$\boxed{\bar{C} = \dots = \sqrt{2}\pi \frac{G\mu^{3/2}M}{\sqrt{-P_3}} - 2\pi P_2}$$! (odděleně závislé na P_2 a P_3)

při opětovném průchodu IV → I, má tedy Q_3 skok

$$\delta Q_3 = Q_3^{I} - Q_3^{IV} = \frac{\partial \bar{C}}{\partial P_3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{G\mu^{3/2}M}{(-P_3)^{3/2}}$$; když $P_3 = -G\frac{\mu M}{2a}$

a dosaď

$$\delta Q_3 = \ldots = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}} = \frac{2\pi}{n} = T$$

což lze absorbovat do nové definice to posunuté o T periodu oběhu ✓

souhrnně tedy vytvořující funkce v jednotlivých fázích

- fáze I:

$$F^{I} = -tP_3 + P_1\varphi - f_2(\theta) + f_3(r)$$

- fáze II:

$$F^{II} = -P_3 t + P_1\varphi + f_2(\theta) + f_3(r) + \pi(P_2 - P_1)$$

- fáze III:

$$F^{III} = -P_3 t + P_1\varphi + f_2(\theta) - f_3(r) - \pi(P_2 + P_1) + \sqrt{2}\pi\frac{G\mu^{3/2}M}{\sqrt{-P_3}}$$

- fáze IV:

$$F^{IV} = -P_3 t + P_1\varphi - f_2(\theta) - f_3(r) - 2\pi P_1 + \sqrt{2}\pi\frac{G\mu^{3/2}M}{\sqrt{-P_3}}$$

ověříme nakonec, že i Q_2 je spojité

$$Q_2 \equiv \frac{\partial F}{\partial P_2} = \cancel{-\frac{\partial f_2}{\partial P_2} + \frac{\partial f_3}{\partial P_2}}$$

- fáze I:

$$Q_2^{I} = -\frac{\partial f_2}{\partial P_2} + \frac{\partial f_3}{\partial P_2}$$

fáze II:

$$Q_2^{II} = \frac{\partial f_2}{\partial P_2} + \frac{\partial f_3}{\partial P_2} + \pi$$

tedy "skok" na T_1 by byl

$$Q_2'' - Q_2' = \frac{\partial}{\partial P_2}\Big[\underbrace{2 f_2(\theta_1)}_{-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\ } \,=\, -\pi(P_2 - P_1)} + \pi P_2\Big] \to \underline{0}$$

• fáze III: $$Q_2^{III} = \frac{\partial f_2}{\partial P_2} - \frac{\partial f_3}{\partial P_2} - \pi$$

tedy opět "skok" na A by byl

$$Q_2''' - Q_2'' = \frac{\partial}{\partial P_2}\Big[-\underbrace{2 f_3(v_2)}_{\cancel{2\pi P_2} + f(P_3)} \cancel{- 2\pi P_2}\Big] \to \underline{0}$$

• fáze IV: $$Q_2^{IV} = -\frac{\partial f_2}{\partial P_2} - \frac{\partial f_3}{\partial P_2}$$

tedy opět "skok" v T2 by byl

$$Q_2^{IV} - Q_2''' = +\frac{\partial}{\partial P_2}\Big[-\underbrace{2 f_2(\theta_2)}_{-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\ } \,=\, -\pi(P_2 - P_1)} + \pi P_2\Big] \to \underline{0}$$

---

o skok při přechodu IV → I:

$$\boxed{\delta Q_2 = Q_2' - Q_2^{IV} = 0}$$